

Skolans matematik

av Sverker Lundin

avhandlingsmanus sammanställt inför seminarium, EDU-institutionen, Uppsala universitet,
onsdagen den 18 juni 2008 kl 13.15-15.00 i rum 1219, Seminariegatan 1.

Göteborg den 10 juni 2008

Till seminariedeltagarna

Texten som följer är ett manus till min avhandling med den preliminära titeln "Skolans matematik". Den handlar om den svenska skolmatematikens historia, och syftar till att belysa de problem som idag förknippas med grundläggande undervisning i matematik. Jag vill här säga något om textens status, för att sedan nämna några frågor angående texten som jag särskilt angelägen att få besvarade.

Avhandlingsmanuset består av 11 kapitel och av dessa är kapitel 2-8 mer färdiga än de övriga. Som helhet skall texten betraktas som work in progress. Jag skall disputera mot slutet av hösten 2008 och räknar med att behöva genomföra en hel del ändringar fram tills dess. Tyvärr finns det en mängd formella fel och inkonsekvenser i texten som jag inte hunnit göra något åt, till exempel rörande fotnoter och referenser.

I avhandlingen argumenterar jag för en tes som jag tror vissa uppfattar som ganska svårsmält. Därför vill jag gärna av seminariet få hjälp att se vilka aspekter av min tes som (eventuellt) framstår som märkliga, och vilka delar av min argumentation som inte får tillräckligt empiriskt stöd. Avhandlingen består till stor del av en redogörelse för skolmatematikens historia, och jag vill också gärna ha hjälp att knyta denna till annan historisk, idéhistorisk, matematikhistorisk och utbildningshistorisk forskning. Tveka absolut inte att säga till om något verkar fel eller konstigt.

Med vänlig hälsning

Sverker Lundin, sverker.lundin@gmail.com

Innehåll

1. Inledning	5
Frågeställning	6
Tes och syfte	7
1.1. Teori	8
Symbolisk och imaginär identifikation.....	8
Matematiken som sublimt objekt.....	9
Matematikens blick och matematiken som nodpunkt.....	10
1.2. Metod	11
"Matematikens betydelse i samhället"	11
Skolmatematikens historia.....	11
Metodidé.....	14
Disposition.....	15
Del 1: Skolmatematik i periferin.....	19
2. Räknekonsten.....	20
2.1. Räknelärornas disposition och innehåll.....	22
Numeratio	23
De fyra räknesätten i hela tal	25
De fyra räknesätten i blandade tal	26
De fyra räknesätten i bråk.....	27
Regula de Tri	28
Praxis Italica	29
Tillämpningar av Regula de Tri.....	31
2.2. Räknelärans historia	33
Genrens ålder och utveckling	33
Böckernas användning.....	34
Räknekonsten och vetenskapen	35
2.3. Analys.....	36
Räknekonstens egenskaper	38
3. Matematiken	41
3.1. Föreställningar om matematik från 1500-talet till 1700-talet.....	41
"Den vetenskaplig revolutionen"	43
Newtons matematik	47
Wolffs matematik	50
3.2. Den svenska diskursen rörande matematik och utbildning kring mitten av 1700-talet.....	51
3.3. Mötet mellan räknekonsten och matematiken.....	53
Strömers Euklides.....	54
Celsius räknelära.....	56
Palmqvists algebra.....	59
Palmqvists räknelära.....	62
3.4. Analys.....	66
4. Meritokrati	69
4.1. Läroböcker i aritmetik och algebra	70
Nils Petter Beckmarks <i>Arithmetik</i> (1795).....	71
Olof H. Forssells <i>Arithmetik för Begynnare</i> (1818)	74
Beckmarcks <i>Algebra</i> (1794) och Forssells <i>Algebra för Begynnare</i> (1801).....	76
4.2. Matematikens funktioner.....	78
Meritokratins insida och utsida.....	79
Meritokratins insida.....	82
Matematikens instrumentella nytta.....	84
Kritik mot matematiken.....	84

4.3. Analys.....	86
Boken och undervisningspraktiken.....	86
Det skolmatematiska stoffets yttre gränser.....	87
Det skolmatematiska stoffets struktur.....	88
Skolmatematikens producenter och konsumenter	88
5. Matematik för medborgerlig bildning.....	91
5.1. Aritmetik	93
Regler.....	93
Övningsuppgifter	98
Algebra	103
Algebran som väg	104
Första och andra gradens ekvationer	106
5.2. Geometri.....	107
Den praktiska vägen mot geometrin	108
5.3. Analys.....	111
6. Matematik för folket	113
Nya tankar om uppfostran	114
6.1. Undervisningens mål.....	116
Växelundervisningssystemet	116
Bildningstänkandet	119
Perspektiv på kunskaper	122
6.2. Undervisningens medel	123
Växelundervisningssystemet	123
Bildningstänkandet	128
6.3. Analys.....	133
Matematiken och barnet	134
En skolmatematik i periferin	135
Del 2: Skolmatematiken breder ut sig.....	137
7. Matematiken tar plats i folkskola och läroverk.....	138
Matematiken bereder ut sig	138
7.1. Skolmatematikens mål	142
Bildning	142
Nyttiga kunskaper.....	145
Matematik för flickor.....	147
En blick på mogenhetsexamen	149
7.2. Skolmatematikens hinder	150
Objektet och metoden	151
Metoden och det förflutna	152
Matematik som hinder	154
7.3. Skolmatematikens metoder	157
Undervisningen skall vara åskådlig	158
Undervisningen skall vara heuristisk.....	161
Övning	164
7.4. Analys.....	164
8. Skolmatematik för tyst övning.....	166
8.1. Matematikens plats i folkskolan.....	166
De tysta övningarna.....	168
8.2. Matematikens plats i läroverket	172
8.3. Offentlig diskussion	174
Talsortsmetoden.....	174
J. P. Velander om "Hela tal i folkskolan" och "Om ämnet räkning i folkskolan"	176
J. E. Johansson "Om räkneundervisningen i folkskolan"	181

Gammalt möter nytt.....	183
Nytt möter nytt.....	189
8.4. Läroboken som sysselsättning.....	189
Ett nytt läroboksparadigm.....	192
En blick på undervisningen i räkning under första halvan av 1900-talet.....	194
8.5. Analys.....	195
Matematikens blick.....	195
9. Matematiken, barnet och vetenskapen.....	198
9.1. Matematiken och vetenskapen.....	198
Internationellt perspektiv.....	198
Den svenska diskussionen.....	201
9.2. Barnet och vetenskapen.....	208
Internationellt perspektiv.....	208
Den svenska diskussionen.....	209
Små hänvisningar till vetenskap.....	213
9.3. Analys.....	214
10. Utbildningssystemet, skolmatematiken och vetenskapen.....	218
10.1. Utbildningssystemet.....	218
Examensväsendet.....	219
10.2. Undervisningspraktiken.....	221
10.3. Den skolmatematiska diskussionen.....	224
Kampen om matematiken.....	224
Studentexamen och skolans autonomi.....	226
10.4. Skolans vetenskaper.....	228
10.5. Analys.....	229
11. Slutsatser.....	232
11.1. Matematiken.....	232
11.2. Skolan.....	232
Bildningstänkandet.....	232
Undervisningen och matematikens blick.....	232
11.3. Samhället.....	232

1. Inledning

I den här avhandlingen sätter jag in svensk grundläggande matematikutbildning i ett historiskt sammanhang. Med utgångspunkt läroböcker, tidsskriftsartiklar, utredningar, kursplaner och andra typer av material, från 1700-talet fram till mitten av 1900-talet, redogör jag för den historiska process genom vilken det sätt att undervisa i matematik som är gängse idag, tagit form. En central roll i redogörelsen spelar, för det första, relationen mellan undervisningens praktiska villkor och dess därpå följande utformning; för det andra de föreställningar om matematiken vilka utgör den bakgrund mot vilken undervisningen motiveras och värderas; och för det tredje undervisningens funktion som en del av samhället.

I avhandlingen spelar distinktionen mellan å ena sidan *skolmatematiken* – vilken här skall förstås som en social institution vars syfte är att förmedla kunskaper i matematik till (först och främst) barn och ungdomar – och å andra sidan den *matematik* som den skolmatematiska undervisningen kretsar kring och syftar till att förmedla. Min tes är att dessa två "fenomen", skolmatematiken och matematiken, är oupplösligt förenade med varandra. Med detta som utgångspunkt kommer jag i den här avhandlingen att knyta an till två olika forskningsområden – och i en vidare bemärkelse två olika problemkomplex – som mig veterligen inte tidigare ställts i förbindelse med varandra.

Jag tänker här för det första på de problem som förknippas med grundläggande matematikundervisning, och den forskning som kretsar kring dessa problem, det vill säga framför allt forskning inom matematikdidaktik. Det förtjänar att nämnas att det var mitt möte med det matematikdidaktiska forskningsfältet som fick mig att ställa de frågor som slutligen ledde fram till den här avhandlingen. Mer specifikt var det de stora – för att inte säga tämligen fantastiska – anspråk, vilka i rapporter som *Hög tid för Matematik*¹ (2001) och matematikdelegationens betänkande *Att lyfta matematiken* (2004) reses angående matematikens och den grundläggande matematikutbildningens potential att fungera som en samhällsförbättrande kraft, som fick mig att reagera. Här är två exempel. Följande kan man läsa i rapporten *Hög tid för Matematik*, publicerad 2001 av det av regeringen inrättade resurscentrat Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM):

Företrädare för utbildning, näringsliv och samhälle ger kraftfullt och enstämmigt uttryck för att matematikkunskaper är viktigt och att goda, meningsfulla kunskaper är en förutsättning för självförtroende, demokrati, tillväxt och livslångt lärande. Samlade insatser för en långsiktig, hållbar utveckling av matematikundervisningen i skolan både krävs och välkomnas i alla samhällsgrupper och på alla utbildningsnivåer.²

Nedanstående citat är hämtat från matematikdelegationens betänkande *Att lyfta matematiken*:

Matematik är ett mångfasetterat ämne; ett nödvändigt och nyttigt verktyg för utveckling inom naturvetenskap, teknik och ekonomi och ett oundgängligt redskap för ett aktivt medborgarskap.³

Citatet är i och för sig hämtade från statliga utredningar, snarare än forskningsrapporter producerade inom det matematikdidaktiska forskningsfältet. Gränsen mellan forskning och utredningsverksamhet är dock sällan skarp inom detta område, och det råder ingen tvekan om att även det matematikdidaktiska forskningsfältet vilar på en övertygelse om matematikens centralitet och potential. För övrigt kan sägas att detta även gäller den kritik mot matematikens behandling i skolan som kommer till uttryck inom detta forskningsfält.⁴ Lite tillspetsat kan man säga att den matematikdidaktiska forskningen syftar till att låta matematikens potential komma eleverna till del.

¹ Bengt; m. fl. Johansson, *Hög tid för matematik, NCM-rapport, 2001:1* (Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs univ., 2001).

² *Ibid.*, s. 25.

³ Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken: intresse, lärande, kompetens: betänkande, Statens offentliga utredningar, 2004:97* (Stockholm: Fritzes offentliga publikationer, 2004), s. 102.

⁴ Jag tänker här framför allt på arbeten av forskare som Ole Skovsmose, Stieg Mellin-Olsen och Paul Ernest. Vad de vänder sig mot är matematikens behandling i skolan. Lika mycket som andra forskare inom matematikdidaktik tar de matematikens centralitet

Detta faktum leder vidare till det andra problemkomplex som jag knyter an till i avhandlingen, vilket rör matematikens och den matematiska vetenskapens förhållande till framväxten av "det moderna samhället" i ett längre tidsperspektiv. Fram tills relativt nyligen betraktades matematikens och naturvetenskapernas utveckling som en process vilken fortskridit relativt oberoende av – eller möjligen i viss mån "trots" – mer allmänna samhällsliga omständigheter och förändringsprocesser. Den moderna vetenskapens ursprung knöts till första halvan av 1600-talet, och mer specifikt till sådana texter som Descartes *Avhandling om metoden*.¹ Den vetenskapliga metoden ansågs utgöra vetenskapens kännemärke, och man såg dess utveckling under 1600-talet som en "revolution" genom vilken mänskligheten trädde ut ur medeltidens religiösa mörker in i modernitetens ljus.² Genom en rad vetenskapshistoriska och vetenskapsteoretiska forskningsinsatser har emellertid denna bild sedan 1960-talet förändrats på ett genomgripande sätt.³ Man betonar nu att föreställningar om matematiken nästan alltid under historiens lopp utgjort en integrerad del av större, ofta religiösa, tankesystem. Föreställningar om matematikens värde och egenskaper måste därför, menar man, tolkas mot bakgrund av den "politiska" funktion de fyllde som delar av samhället. En viktig aspekt av denna sida av den matematiska vetenskapens utveckling från slutet av 1500-talet fram till våra dagar, är att den allt mer kommit att ersätta religionen som sammanlänkande "kitt" i de västerländska samhällena. Vid flera tidpunkter i historien är det tydligt hur matematiken och den matematiserade naturvetenskapen kommit att representera en enande *visshet* som man hoppas skall göra slut på religiösa stridigheter. Med utgångspunkt från denna historieskrivning måste bilden av den matematiserade naturvetenskapen som något forskare ägnat sig åt, kompletteras av insikten om att denna matematiserade naturvetenskap också är något man i dagens västerländska samhällen – som ett resultat av en långsam historiskt process – kommit att *tro på*.

Det övergripande syftet med den här avhandlingen är att ställa dessa två problemområden i förbindelse med varandra. Med ett undantag, nämligen Ken Alders bok *Engineering the Revolution*, har nämligen den vetenskapshistoriska forskning inte i någon större utsträckning beaktat den roll grundläggande utbildning i matematik spelat för att sprida – och i viss mån givetvis också förändra – de föreställningar om matematiken och vetenskapen som man sett breda ut sig i Europa från 1700-talet och framåt. På ett motsvarande sätt tycks det matematikdidaktiska forskningsfältet och mer allmänt den politiska diskussionen rörande grundläggande matematikutbildningens problem, inte ha tagit intryck av nyare vetenskapshistorisk och vetenskapsteoretisk forskning rörande matematikens band till sin "sociala historia".⁴ Detta leder fram till min frågeställning.

Frågeställning

Avhandlingen kretsar kring tre grupper av frågor. I den första gruppen av frågor står matematiken i centrum. En första utgångspunkt är de föreställningar om matematiken som kommer till uttryck inom matematikdidaktisk forskning, i offentliga utredningar och rapporter och i den offentliga diskussionen. I dessa sammanhang tas matematiken i allmänhet för givet som förknippad med en rik uppsättning positiva egen-

tet för givet. Se Stieg Mellin-Olsen, *The politics of mathematics education, Mathematics education library*, (Dordrecht: Reidel, 1987). Ole Skovsmose, *Towards a philosophy of critical mathematics education, Mathematics education library, 15* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994); Ole Skovsmose, *Travelling through education: uncertainty, mathematics, responsibility* (Rotterdam: Sense Publishers, 2005). Paul Ernest, *The philosophy of mathematics education, Studies in mathematics education series, 1* (London: Falmer, 1991).

¹ René Descartes, *Discourse de la méthode* (Paris: Flammarion, [1637] 2000). Angående denna syn på vetenskapens historia, se tex. Stephen Toulmin, Lars Göran Larsson, och Bo Holmqvist, *Kosmopolis: hur det humanistiska arvet förfuskades* (Stockholm: Ordfront, 1995), 24.

² En redogörelse för föreställningen om en vetenskaplig revolution, tillsammans med en mer nyanserad bild av det historiska förloppet finns i Steven Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen* (Stockholm: Brutus Östling, 2000).

³ Några viktiga namn i sammanhanget är Peter Dear, som skrivit om utvecklingen kring sekelskiftet 1600, Steven Shapin och Simon Shaffer som skrivit om slutet av 1600-talet, Ken Alder som skrivit om 1700-talet och Theodor Porter om 1800-talet och början av 1900-talet. Peter Dear, *Mersenne and the learning of the schools, Cornell history of science series*, (Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1988); Peter Robert Dear, *Discipline & experience: the mathematical way in the scientific revolution, Science and its conceptual foundations*, (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1995). Steven Shapin, *The scientific revolution* (Chicago, Ill.: Univ. of Chicago Press, 1996); Steven Shapin, Simon Schaffer, och Thomas Hobbes, *Leviathan and the air-pump: Hobbes, Boyle, and the experimental life: including a translation of Thomas Hobbes, Dialogus physicus de natura aeris by Simon Schaffer* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1985). Ken Alder, *Engineering the revolution: arms and enlightenment in France 1763-1815* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1997). Theodore M. Porter, *The rise of statistical thinking, 1820-1900* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1986); Theodore M. Porter, *Trust in numbers: the pursuit of objectivity in science and public life* (Princeton: Princeton Univ. Press, 1995).

⁴ Här kan för tydlighets skull nämnas att synen på matematikens som "socialt konstruerad", så som den till exempel kommer till uttryck i Paul Ernests *The philosophy of Mathematics education* inte har något med detta att göra.

skaper, liksom de jag exemplifierade i citaten ovan. En annan viktig utgångspunkt är den tämligen djupt rotade *tro* på matematiken som många bär på, för övrigt ofta utan att i samman mån tillmäta sitt eget matematiska kunnande något särskilt högt värde.¹ En första fråga är vad som ligger bakom dessa föreställningar och denna tro. Är den "välgrundad" – i samma bemärkelse som till exempel tron på att jorden är rund och en sten faller om man släpper den? Om föreställningarna inte så enkelt kan förklaras, vad har de för ursprung? Kan de förklaras historiskt? Här syftar jag mer specifikt på frågan: kan dessa föreställningar knytas till den vetenskapshistoriska forskningsens berättelse om de tanke-system som matematiken var den del av på 1600- och 1700- och 1800-talet? En fråga som leder vidare till min nästa frågegrupp är: kan föreställningar och tro på matematiken förklaras sociologiskt?

I den andra gruppen av frågor står skolan i centrum. Grundläggande matematikundervisning förknippas med rader av problem. Man talar om att elever upplever *ångest* inför matematiken.² Undersökningar visar att de matematikkunskaper eleverna om allt vill sig väl får sig till del i skolan kanske inte är fullt så användbara – till exempel i vardagslivet – som det ofta påstås, och att matematikens plats i kurs- och läroplaner kanske snarare är ett resultat av tradition än rationellt övervägande.³ Frågan som jag ställer är: Varför undervisar man på det sätt man gör? Det är uppenbart att undervisningsmetoderna på ett plan motiveras med hänvisning till matematiken, hur den är, och de ramar detta sätter för hur den kan och bör förmedlas. Men om bilden av matematiken måste ses som en del av en komplex social historisk tankeväv, vad säger detta om föreställningarna om hur man kan och bör undervisa? Hur kan föreställningar om sät-tet att undervisa på ett historiskt plan relateras till motsvarande föreställningar om matematiken?

Till denna andra grupp av frågor hör en idé som strax kommer att få tydligare konturer i teoriavsnittet, nämligen att skolan, i egenskap av social institution där ungdomar – idag *alla* ungdomar – ägnar stor möda åt att lära sig matematik, så att säga "producerar" föreställningar om matematiken. Frågan blir därmed, i vilken mån föreställningar om matematiken kan förstås med utgångspunkt från hur matematiken, både på ett praktiskt och diskursivt plan, behandlas i skolan. I och med detta kan de två första grupperna knytas samman i frågan rörande *samspelet* mellan de föreställningar om matematik mot vars bakgrund som skolans praktiska verklighet åtminstone i viss mån motiveras, och den sociala praktiska verklighet genom vilken dessa föreställningar åtminstone i viss mån "produceras".

I den tredje gruppen av frågor står samhället i fokus. Utgångspunkten för dessa frågor är att det faktiskt finns ett samspel mellan matematiken och skolan. En första fråga blir därmed: vilken betydelse har detta samspel för det så att säga "omgivande" samhället? Vilken roll spelar det? Kan det sägas fylla någon "funktion"? En motsvarande fråga rör vilken betydelse denna funktion i så fall har, och har haft, för både skolan och matematiken. Kan sättet att undervisa i matematik förklaras mot bakgrund av att undervisningen fyller sociala behov? Kan föreställningar om matematiken förklaras på detta sätt?

Detta är frågor som avhandlingen kretsar kring och syftar till att besvara. Avhandlingen är i ganska hög utsträckning argumenterande. Låt mig därför klargöra vad det är jag argumenterar för.

Tes och syfte

Avhandlingens syfte är att med hjälp av en redogörelse för den svenska skolmatematikens genes problematisera de grundläggande föreställningar rörande matematiken som idag i stor utsträckning sätter ramar för diskussionen rörande grundläggande matematikundervisning. Mer specifikt menar jag att matematiken i diskussionen framstår som objektivt given med en rik uppsättning egenskaper som definierar den matematiska utbildningens mål och utformning, men att dessa egenskaper måste förstås som ett resultat av hur matematiken behandlas i skolan. Denna behandling är i sin tur ett resultat av en komplex historisk process, där lager på lager av föreställningar knutna till matematiken samspelas med sociala "behov" som undervisning i matematik kommit att fylla i samhället.

Matematiken framstår idag, menar jag, som fylld av en inneboende potential att kunna bidra till att realisera samhällets högre mål, som till exempel högre tillväxt och förbättrad demokrati. Den fungerar därför

¹ Tex. Jan Unenge, *Från räkning till matematisk klokskap*. (Jönköping.: Institutionen för undervisning, kultur och information, 1991), 1.

² Ångest löper som en röd tråd genom den skolmatematiska diskussionen. Se till exempel Lars Gustafsson och Lars Mouwitz, *Vuxna och matematik: ett livsviktigt ämne, NCM-rapport, 2002:3* (Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs univ., 2002), sidorna 3, 5, 10, 25, 31, 55, 61, 75, 80, 81, 93 och 111. Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken: intresse, lärande, kompetens: betänkande*, s. 102. Lars Mouwitz, *Hur kan lärare lära? internationella erfarenheter med fokus på matematikutbildning, NCM-rapport, 2001:2* (Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs universitet, 2001), s. 46.

³ Gustafsson och Mouwitz, s. 62.

som ett sätt att konkretisera samhällets ambition att nå dessa mål. Den diffusa frågan: Hur skall vi förbättra tillväxten? får i matematiken ett konkret svar: Genom att förbättra elevernas matematikkunskaper! Min tes är att det emellertid inte finns någon sådan potential i matematiken, och föreställningarna och tron på matematiken snarast tjänar till att flytta den politiska diskussionens fokus från grundläggande samhällsproblem, till politiskt "ofarliga" frågor rörande matematikkunskaper.

Avhandlingen säger ingenting om de komplexa sambanden mellan till exempel forskning i matematik, naturvetenskap och teknik. Min poäng är att matematikens roll i skola och i samhället har mycket lite med den matematiska vetenskapen att göra – något som kommer att framgå av den historiska redogörelsen. Tesen är att skolan hänvisar till "matematiken", men att denna hänvisning är i grunden "tom", så till vida att den inte kan knytas till något specifikt socialt eller institutionellt sammanhang eller något specifikt innehåll relaterat till den funktion hänvisningen fyller på ett retoriskt diskursivt plan. När man i skolan talar om "matematik" syftar man inte på det matematiker, eller för den delen ingenjörer, ägnar sig åt.

På ett praktiskt plan pekar den historiska redogörelsen mot att grundläggande undervisning i matematik fyller tre sammanlänkande sociala funktioner. Den första funktionen är att hålla elever sysselsatta, en funktion som kan knytas till den tidpunkt då det svenska samhället "industrialiserades" kring sekelskiftet 1900. Den andra funktionen är att, genom prestationsmätningar, bidra till utbildningssystemets fördelning av elever mellan olika sociala positioner – en funktion den fick under 1900-talets första hälft. Den tredje funktionen är att hos eleverna inplantera en tro på matematikens värde vilken får det "sysselsättande" arbetet i matematik att framstå som nödvändig övning, och utbildningssystemets fördelning av individer som förankrade i relevanta skillnader i kunskaper i matematik.

1.1. Teori

I det här avsnittet skall jag visa hur jag förstår sambandet mellan skola, matematik och samhälle. Snarare än att presentera ett sammanhängande teoretiskt system, fokuserar jag på tre tankefigurer, vilka spelar en viktig roll för mitt sätt att tänka. Dessa tankefigurer har jag hämtat från den slovenske filosofen Slavoj Žižek och den tanketradition han tillhör.¹

Symbolisk och imaginär identifikation

Den första idé jag skall ta upp visar hur jag i den här avhandlingen förstår sambandet mellan skolan och matematiken. Žižek gör en distinktion mellan å ena sidan imaginär, och å andra sidan symbolisk identifikation. I *Ideologins sublimes objekt* förklarar han denna distinktion genom att säga att imaginär identifikation är identifikation med älskvärda "bilder av oss själva", medan symbolisk identifikation är identifikation med "den position varifrån vi observerar eller betraktar oss i syfte att kunna framstå som älskvärda".²

Poängen är här att vi på ett plan vill något specifikt – Žižek exemplifierar med en tonåring som vill bli (som) en popstjärna – medan den mer grundläggande frågan som är vad det är som får oss att vilja just detta. Detta är frågan om vår symboliska identifikation. Man kan tala om detta i termer av en "blick" som vi identifierar oss med – en blick som vi (omedvetet) upplever oss betraktade av och vars värdesystem vi utgår från.

Vår symboliska identifikation är resultatet av en praktisk inskolning i ett sätt att tänka, tala och vara. Den hör till språket och praktiken. Våra imaginära identifikationer är istället "bilder" som vi uppfattar som meningsfulla och eftersträvansvärda.

Med utgångspunkt från denna distinktion kan man säga att jag i den här avhandlingen betraktar skolan som ett föremål för symbolisk identifikation. Detta innebär att jag ser den som en institutionaliserad social praktik, som genom att reglera människors tillvaro formar deras sätt att uppfatta sin omvärld. Matematiken kommer här att tvärtom behandlas i egenskap av något imaginärt, det vill säga som en bild, vars egenskaper i stor utsträckning är en effekt av skolan i egenskap av socialt sammanhang. Man kan därmed

¹ De av hans många böcker som varit viktigast för mig är Slavoj Žižek, *The sublime object of ideology*, Phronesis (London), (London: Verso, 1989); Slavoj Žižek, *The ticklish subject: the absent centre of political ontology* (New York, N.Y.: Verso, 1999). samt hans inlägg i diskussionsboken Judith Butler, Slavoj Žižek, och Ernesto Laclau, *Contingency, hegemony, universality: contemporary dialogues on the left*, Phronesis (London), (London: Verso, 2000). Žižek utgår från Lacan. Relationen mellan Lacans teori och dess användning som redskap för att förstå samhället klargörs i Yannis Stavrakakis, *Lacan and the political*, Thinking the political, (London: Routledge, 1999).

² Slavoj Žižek, *Ideologins sublimes objekt* (Göteborg: Glänta, 2001), 122.

säga att det är "skolans matematik" som står i avhandlingens fokus, vilken jag här mer allmänt kommer att tala om i termer av "skolmatematik".

För att tydliggöra hur denna teoretiska ingång utgör en avgränsning, kan sägas att det också vore möjligt att betrakta matematiken med utgångspunkt från andra sociala sammanhang, till exempel den vetenskapliga matematikens. En sådan undersökning skulle ha varit med renodlat vetenskapssociologisk eller vetenskapshistorisk, och den skulle handlat om en helt annan "matematik" än den som står i den här avhandlingens fokus. Intressant nog tillhör många av skolmatematikens ihärdigaste kritiker den svenska matematikerkåren. Med utgångspunkt från *sin* praktiska verksamhet har de en annan bild av matematiken än den skolan genererar. De är ofta föga entusiastiska över det överflöd av betydelser som i skolan knyts till deras forskningsobjekt.¹

Det teoretiska värdet av att förstå det vi uppfattar som verkligt i termer av imaginär och symbolisk identifikation, är att detta synsätt gör det möjligt att betrakta både skolans och vetenskapens matematik som "lika verkliga". Det ligger annars nära till hands att betrakta skolans matematik som blott en förvrängd bild av den vetenskapliga matematiken. I den mån skolans och vetenskapens matematik skall jämföras med varandra, kommer jag här snarare att betrakta vetenskapens matematik som ett viktigt undantag.

Ett möjligt sätt att tydliggöra att det är matematikens "sociala" roll som jag syftar på när jag i den här avhandlingen talar om "matematikens roll", hade varit att förse ordet matematik med någon typ av prefix, så att jag istället för "matematiken" till exempel skrev "bilden av matematiken". Problemet med detta skrivsätt är att det implicerar en föreställning om att det skulle gå att tala om en "matematikens roll", vilket skulle vara mer "verkligt" än den roll "bilden av matematiken" skulle spela i samhället. Detta är, menar jag, inte möjligt. Givet idén om symbolisk och imaginär identifikation leder nämligen varje fråga om matematikens "instrumentella" användning oundvikligen vidare till frågan: "Vad är det som gör att du betraktar just denna praktik som matematisk?". Antag att någon säger: "Matematik behövs då man bygger broar". Är det då möjligt att precisera exakt när och exakt hur matematiken används i ett specifikt brobygge? Använder en kassör eller kassörska matematik när han eller hon drar varorna förbi streckkodsläsaren, och sedan läser upp den totala summan från kassaapparatens display? Använder en ingenjör matematik när han eller hon använder FEM-lab? Använder ett barn matematik när det säger tre? När det räknar till tre? Poängen är att varje påstående om matematikens användning utgår från en *identifikation* av matematiken som närvarande i ett visst sammanhang. Det är en identifikation av verkligheten som en bild där matematiken ingår, vilken i sin tur är en konsekvens av hur vi lärt oss att tala och tänka, det vill säga vår symboliska identifikation.

Matematiken som sublimt objekt

Min andra teoretiska idé handlar om tron på matematiken. Zizek använder termen "sublimt objekt" för att tala om delar av verkligheten som vi av någon anledning upplever som speciella. Det kan till exempel vara något vi är rädda för eller en person vi är förälskade i. Den teoretiska förståelsen av dessa objekt bygger på distinktionen mellan symbolisk och imaginär identifikation. Tanken är att objekten – på ett imaginärt plan – upplevs som speciella *i sig själva*, men att denna "speciellhet" måste förstås som orsakad av en speciell egenskap hos den symboliska ordningen. De sublima objekten måste, kan man säga, förstås som yttre "objektiva" representationer av egenskaper i språket och den sociala verkligheten.

Wittgenstein skriver i en av anteckningarna publicerade i *Om visshet* om filosofiska satser "till vilka man som förhäxad gång på gång kommer tillbaka".² Hans poäng rörande dessa satser är att *de inte döljer något*. Wittgenstein ville med sina reflektioner "bota" filosofin från sin upptagenhet av sina "förhäxande" problem. Han ville "gallra ut [dem] ur det filosofiska språket".³ Det han talar om är i min terminologi just filosofins subluma objekt.

Låt mig nu knyta idén att det finns subluma objekt till relationen mellan skolan och matematiken. I *The ticklish subject* skriver Zizek om hur just det vi upplever som "ogreppbart" – eller kanske helt enkelt "obegripligt" – i objektet, det vill säga den del av verkligheten som ligger längst bort inom vår upplevelsehorisont, är just den del av verkligheten där vi själva, som subjekt, är allra mest närvarande.⁴ Typiskt

¹ Se tex. Kenneth Erikson et al., "Inte så himla viktigt kunna matematik," *Dagens Nyheter*, 2004-10-31 2004.

² Ludwig Wittgenstein, *Om visshet* (Stockholm: Thales, 1992), 13.

³ Ibid.

⁴ Zizek, *The ticklish subject: the absent centre of political ontology*, 90.

för skolans sätt att tala och förhålla sig till matematiken är att den framställs just som något man i skolan aldrig till fullo kan behärska. Skolans kursplaner innehåller alltid mindre delar av matematiken. På en psykologisk nivå motsvaras detta faktum av en känsla – delad av lärare och elever – av att vara relativt okunnig i förhållande till matematiken "som helhet".

Med utgångspunkt från den vetenskapliga matematiken framstår givetvis denna känsla som helt befogad. Poängen är dock att skolan, i egenskap av socialt symboliskt sammanhang, *själv* upprättar den ideala punkt – matematikens plats – vilken man anser sig inte nå fram till. Den vetenskapliga matematiken företrädare ser sällan sin matematik som till exempel ett "oundgängligt redskap för ett aktivt medborgarskap".¹ Detta är skolans bild av matematiken.

Det är frånvaron av konkret praktisk erfarenhet av matematiken, eller mer exakt att matematiken inte betraktas som knuten till något konkret praktiskt sammanhang, utan som något mer, *som något man inte vet så mycket om*, som den kan fungera som sublimt objekt, som något man tillmäter fantastiska egenskaper, som man kan *tro* på och förknippa med en potential att realisera högre sociala mål.

De sublimes objektens karaktäristiska egenskap är att de får en frånvaro att framstå som något dolt. Det är just upplevelsen av att inte veta allt, upplevelsen av att det finns något i objektet som vi inte känner till, som fångar vårt intresse och gör oss fascinerade. Särskilt tydligt är detta i fråga om sammanställningar som "matematiskt tänkande", "matematisk problemlösning" och "matematisk kreativitet", vilka i den skolmatematiska diskussionen behandlas med stort intresse. De får, kan man med hjälp av de sublimes objektens teori säga, sin mening från den funktion de spelar som delar av skolmatematiken i egenskap av social institution, en funktion som mer specifikt består i att ge detta sammanhang en objektiv, för förhand given, "orsak".

Matematikens blick och matematiken som nodpunkt

Den tredje idén syftar till att klargöra vilken betydelse samspelet mellan matematiken och skolan har på en samhällsövergripande nivå. Poängen är här att sublimes objekt kan fungera som vad man kallar "nodpunkter" för hela tankesystem. Tanken är här att en mängd termer har en ganska diffus mening, till exempel "demokrati" och "kunskaper". Nodpunkter är ord som fixerar och konkretiserar denna mening.² De knyter de annars flytande termerna till ett specifikt socialt sammanhang, och gör dem därmed möjliga att använda – på ett specifikt sätt. När frågan: Hur skall vi få bättre demokrati? Besvaras: Genom att förbättra elevernas matematikkunskaper! fungerar matematiken som en nodpunkt.

Av central betydelse är emellertid vad det är som får en nodpunkt att framstå som *trovärdig*, det vill säga, i exemplet ovan, vad det är som gör att det framstår som rimligt att knyta demokrati till matematikkunskaper.

För att förklara detta använder jag termen "blick", vilken jag nämnde ovan i avsnittet om imaginär och symbolisk identifikation. Att på ett symboliskt plan identifiera sig med skolmatematiken, innebär att "se sig själv med matematikens ögon". Det innebär att, på ett omedvetet plan, ta matematiken för given, med en viss uppsättning egenskaper, mot bakgrund av vilka man värderar sig själv och sin omvärld. När vi känner oss osäkra för att vi tycker oss kunna för lite matematik, eller känner oss nöjda för att vi lyckats bra på ett matteprov, är det matematikens blick vi identifierar oss med.

Karaktäristiskt för den "skolans matematik" som står i fokus för den här avhandlingen, är att matematiken, när den tas för given, tas för given som en del av den sociala och fysiska verkligheten, det vill säga som något som finns "där ute". I termer av symbolisk och imaginär identifikation, kan man säga att ett av skolmatematikens karaktäristiska drag är att den genererar en bild av matematiken som ständigt närvarande, dels som den fysiska verklighetens mest grundläggande struktur (vilket gör matematiken till det mest exakta sättet att beskriva denna verklighet), dels som det mest effektiva sättet att hantera den sociala verkligheten.³ Den bild av matematiken som skolan genererar är en bild av verkligheten som i sig själv matematisk.

Slutligen kan sägas att det är mot bakgrund av denna matematiska verklighet som kunskaper i matematik framstår som en relevant utgångspunkt för utbildningssystemets sortering. Matematikens blick, vilken

¹ Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken: intresse, lärande, kompetens: betänkande*, s. 102.

² Zizek lånar denna term från Ernesto Laclau och Chantal Mouffe, *Hegemony & socialist strategy* (London: Verso, 1985).

³ För en analys se Paul Dowling, *The sociology of mathematics education: mathematical myths/pedagogic texts, Studies in mathematics education series*, 7 (London: Falmer, 1998). Se även Roland Barthes, *Mytologier*, 1. uppl., ny tr. utg., *Boc-serien*, (Staffanstorps; Solna: Cavefors; Seelig, 1969).

utgår från den fysiska och sociala verkligheten, bidrar till att få utbildningssystemet att framstå som naturligt och rättvist.

1.2. Metod

I det här avsnittet skall jag berätta om vad det har gjorts för tidigare forskning med anknytning till min frågeställning, och hur jag med utgångspunkt från denna forskning avgränsat min egen undersökning. Jag skall börja med att redogöra för två typer av forskning som av olika anledningar inte når fram till det mål jag eftersträvar – för det första undersökningar som syftar till förankra skolmatematiken i kunskap om samhällets "behov av matematik" och för det andra redogörelser för skolmatematikens historia. Därefter tar jag upp ett par studier av skolmatematiken vars utgångspunkter ligger nämare mina egna. Sedan beskriver jag min egen metodologiska idé.

"Matematikens betydelse i samhället"

[I det här avsnittet skall jag redogöra för de undersökningar som tidigare gjorts av samhällets behov av matematik, och varför skolmatematiken inte svarar mot detta behov.]

- Mogens Niss nämns ofta. En tidig uppsats är "Hvad er meningen med matematikundervisningen".¹ Senare text: "Mål för matematikundervisningen" i *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv*.² Han introducerar där vad han kallar matematikens "relevansparadox".³ Denna utvecklar Ole Skovsmose till ett helt program för matematisk "arkeologi" som går ut på att upptäcka matematiken i samhället och världen.⁴
- Dahllöfs undersökning.⁵ Kommenteras i.⁶ Även bok.⁷

Internationellt:

- 1980: Cockcroft committee.⁸ Analyserad av Dowling, där han säger att man får fram att det människor gör kan *beskrivas* med hjälp av matematik – medan man inte lika lätt kan konstatera om människor *använder* matematik.⁹
- I Amerika. Wilson, 1939.¹⁰ Sammanfattning av en rad undersökningar genomförda under 1900-talets första två decennier.¹¹

Skolmatematikens historia

[Här skall jag redogöra för tidigare undersökningar av den svenska skolmatematikens historia.]

- Generellt kan man säga att de insatser som gjorts för att förstå den svenskaskolmatematikens historia hittills huvudsakligen varit begränsade sig till tiden efter 1950-talet. Nyast av dessa är Gö-

¹ Mogens Niss, "Hvad er meningen med matematikundervisningen?" - *Fire artikler. IMFUFA tekst nr. 36* (1980).

² Mogens Niss, "Mål för matematikundervisningen," i *Matematikdidaktik: ett nordiskt perspektiv*, red. Barbro Grevholm (Lund: Studentlitteratur, 2001).

³ Mogens Niss, "Nogle perspektiver for matematikundervisningen i de gymnasiale uddannelser i 1990," i "Hvad er meningen med matematikundervisningen?" - *Fire artikler. IMFUFA tekst nr. 36* (1980), 10.

⁴ Skovsmose, *Towards a philosophy of critical mathematics education*.

⁵ 1957 års skolberedning och Urban Dahllöf, *1957 års skolberedning, Statens offentliga utredningar, 1960:15* (Stockholm: 1960).

⁶ Urban Dahllöf, "En empirisk kursplaneundersökning. Skolkurser och samhällskrav.," *Tidning för Sveriges Lärare* (1957).

⁷ Urban Dahllöf, "Nya enkäter från lärarhögskolan," *Tidning för Sveriges Lärare* (1958).

⁸ Torsten Husén och Urban Dahllöf, *Matematik och modersmålet i skola och yrkesliv: studier av kunskapskrav, kunskapsbehållning och undervisningens uppläggning* (Stockholm: Studieförb. Näringsliv o. samhälle, 1960).

⁹ Great Britain. Committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools och W. H. Cockcroft, *Mathematics counts: report of the Committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of W.H. Cockcroft* (London: HMSO, 1982).

¹⁰ Dowling, *The sociology of mathematics education: mathematical myths/pedagogic texts*, 5.

¹¹ Guy Mitchell Wilson, *Teaching the new arithmetic*, 2nd utg., *McGraw-Hill series in education* (New York: McGraw-Hill, 1951 [1939]).

¹¹ Guy Mitchell Wilson, *What Arithmetic Shall We Teach?* (Boston: Houghton Mifflin Company, 1926).

ran Emanuelssons redogörelse för "kompetensutvecklingsinsatser för lärare i matematik 1965-2000" i rapporten *Svårt att lära – lätt att undervisa?* (2001) och Wiggo Kilborns kapitel "Synen på baskunskaper i ett tidsperspektiv" i rapporten *Baskunnande i matematik* (2001).¹ Både Emanuelsson och Kilborn har varit verksamma inom svensk skolmatematik sedan andra halvan av 1970-talet. De beskriver vilka ansträngningar som gjorts för att förbättra den svenska skolmatematiken och vad dessa ansträngningar fått, eller inte fått, för resultat.

- Till samma genre hör en grupp avhandlingar och böcker författade av personer i den generation som dominerade den svenska skolmatematiken innan Kilborn, Emanuelsson med flera tog plats på scenen. Jag tänker här på Matts Håstads avhandling *Matematikutbildningen från grundskola till teknisk högskola igår – idag – imorgon* (1978), Margareta Kristianssons avhandling *Matematikkunskaper i Lgr 62, Lgr69* (1979) och Jan Unenges *Skolmatematiken i går, i dag och imorgon: med mina ögon sett* (1999).² Även dessa böcker har ett tydligt inifrånperspektiv. De utgör i princip initierade utvärderingar, med syfte är att sätta skolmatematiken på rätt kurs.
- Två aktuella studier som sträcker sig bortom 1950-talet är Johan Prytz *Speaking of Geometry: a study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates* (2007) och Reza Hatamis *Reguladetri: en retorisk räknemetod speglad i svenska läromedel från 1600-talet till början av 1900-talet* (2007).³ Prytz redogör för diskussionen av geometriundervisning under två perioder under första halvan av 1900-talet då denna var särskilt intensiv. Hatami beskriver hur regula de tri behandlats i räkneundervisningen utifrån ett matematiskt perspektiv.
- Relevant för den svenska skolmatematikens historia är även Esbjörn Larssons avhandling *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning: Kungl. krigsakademien mellan åren 1792 och 1866* (2005).⁴ Larssons fokus ligger på den sociala betydelsen av krigsakademin på Carlbergs. En relativt viktig roll för denna betydelse spelade emellertid undervisningen i matematik.
- En typ av litteratur som det är svårt att överblicka är den som handlar om den svenska folkskolan. Jag tror inte jag missat någon längre redogörelse för matematikundervisningens historiska utveckling. Däremot finns säkert en mängd bilder av hur matematikundervisning bedrevs i folkskolan på olika platser och vid olika tidpunkter som jag inte känner till. Ur denna litteratur kan nämnas Gustaf Kaleens *Sveriges första folkskolläraryörening* (1966) vilken innehåller ett avsnitt om matematikundervisningen i folkskolan kring mitten av 1800-talet.⁵
- Något äldre är Edward Göranssons *Bidrag till kännedom om undervisningen i Sverige under 1800-talet* från 1905, i vilken matematikundervisning ges stort utrymme, liksom den historiska redogörelsen i inledningen av Harald Dahlgrens artikel *Die Mathematik an den Volksschulen und Volksschullehrerseminarien Schwedens* (1911), vilken ingår i den samling rapporter som författades i samband med den "Internationella kommissionen för matematiska undervisningen" i Rom 1911.⁶

¹ Göran Emanuelsson, *Svårt att lära - lätt att undervisa? om kompetensutvecklingsinsatser för lärare i matematik 1965-2000, NCM-rapport, 2001:3* (Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs universitet, 2001). Sverige. Myndigheten för skolutveckling, *Baskunnande i matematik, Stödmaterial [2003:2]* (Stockholm: Myndigheten för skolutveckling: Fritzes kundservice distributör, 2003), 28-59.

² Matts Håstad, *Matematikutbildningen från grundskola till teknisk högskola i går - idag - i morgon: Training in mathematics from grade school to technical university yesterday - today - tomorrow, Trita-EDU, 016* (Stockholm: 1978). Margareta Kristiansson, *Matematikkunskaper Lgr 62, Lgr 69: Knowledge of mathematics curriculum 62, curriculum 69, Göteborg studies in educational sciences, 29* (Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis, 1979). Jan Unenge, *Skolmatematiken i går, i dag och i morgon: -med mina ögon sett*, 1. uppl. utg., *Lärare lär*, (Stockholm: Natur och kultur, 1999).

³ Reza Hatami, *Reguladetri: en retorisk räknemetod speglad i svenska läromedel från 1600-talet till början av 1900-talet, Reports from MSI, 07005* (Växjö: Växjö universitet, 2007); Johan Prytz och Uppsala universitet. Matematiska institutionen, *Speaking of Geometry: a study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates, Uppsala Dissertations in Mathematics, 49* (Uppsala: Department of Mathematics Uppsala university, 2007).

⁴ Esbjörn Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning: Kungl. krigsakademien mellan åren 1792 och 1866, Studia historica Upsaliensia, 220* (Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis: Uppsala University Library distributör, 2005).

⁵ Gustaf Kaleen och Föreningen för svensk undervisningshistoria, *Sveriges första folkskolläraryörening: ett bidrag till den pedagogiska och didaktiska diskussionen vid mitten av 1800-talet, Årsböcker i svensk undervisningshistoria, 46(1966); 116* (Stockholm: Föreningen för svensk undervisningshistoria, 1966), 296-313. Som bilaga finns även en rad biografier över folkskollärare, av vilka Carl Axel Kindwall och Jonas Bäckman författat läroböcker i matematik.

⁶ Harald Dahlgren, "Die Mathematik an den Volksschulen und Volksschullehrerseminarien Schwedens," *Pedagogisk Tidskrift* (1911): 10-13; Edvard Göransson, "Bidrag till kännedom om undervisningen i Sverige under 1800-talet," i *Redogörelse för Stockholms samgymnasium*, red. O. G. A.; Lindqvist Hahr, J. M. (Stockholm: 1905). Citatet är hämtat från en presentation i *Pedagogisk Tidskrift*, 1911, s 126, författad av Göransson.

- Slutligen kan nämnas Franz Hultmans artiklar om *Svenska aritmetikens historia* i Tidskrift för matematik och fysik 1868-1874 (vilka dock tyvärr inte behandlar utvecklingen under 1800-talet).¹

Internationell forskning

Min ingång till den internationella forskningen om skolmatematikens historia har varit två forskningsöversikter av Gert Schubring, publicerade i tidskriften *Pedagogica Historica* 2006, tillsammans med en bibliografi sammanställd av samme Schubring.² Bibliografin pekar på att det finns en hel del forskning. En betydande del av forskningsresultaten har dock visat sig svåra att få tag på, eftersom de ofta inte är publicerade, och om de är publicerade, är publicerade i forskningsrapporter knutna till enskilda institutioner. Även då resultaten är publicerade i böcker, har dessa i de flesta fall inte funnits tillgängliga i Norden, vilket innebär att enda sättet att få tillgång till dem varit att köpa dem lokalt, något jag inte haft ekonomiska möjligheter till. I den mån resultat publicerats i tidskrifter, har dessa tidskrifter i stor utsträckning inte funnits tillgängliga i Norden. Svårigheten att ta del av andras forskningsresultat är också en av flera aspekter av forskningsläget som Schubring beklagar sig över i sina artiklar från 2006.

Den bild av forskningens "state of the art" som Schubring ger pekar emellertid mot att merparten av den forskning jag inte kunnat ta del av, ändå knappast skulle varit mig till någon större nytta. Denna bild stärks av den internationella forskning jag trots allt tagit del av.³ Vad som gör resultaten mindre användbara är, på samma sätt som när det gäller den svenska forskningen, att ambitionen att *förbättra* matematikundervisningen i så stor utsträckning genomsyrar det historiska perspektivet. Låt mig exemplifiera vad jag menar med detta.

Gert Schubrings artikel *Researching into the History of Teaching and Learning Mathematics: the State of the Art* från 2006, inleds med en motivering till varför man över huvud taget bör studera skolmatematikens historia.⁴ Hans argument för historisk forskning lyder som följer:

Since the present situation is the product of a historical process, the evolution informs the mathematics education regarding political, social and cultural constraints to improving mathematics instruction. Practically all the research questions in mathematics education have a historical dimension that too often, however, remains implicit, or is treated too superficially. Research can be improved by explicit consciousness for the history of teaching and learning mathematics. And, what is probably even more important, the history of mathematics instruction should constitute one of the dimensions of the professional knowledge of mathematics teachers. In order to be able to handle the problems they encounter in their professional life, mathematics teachers should know how their profession emerged historically, how it developed and which types of problems were encountered during this development, and what obstacles had to be overcome for the effective establishment of mathematics teaching.⁵

Karaktäristiskt är här för det första att fokus ligger faktorer som *begränsar* möjligheterna att *förbättra* matematikundervisningen, för det andra att denna kunskap har sitt värde för att den kan förbättra den nutidsorienterade matematikdidaktiska forskningen och för att den kan förbättra matematiklärares undervisning; för det tredje att den nutida matematikundervisningen beskrivs som "effektiv", och som ett resultat av en historisk "evolution".⁶

En central plats i Schubrings fortsatta framställning intar en dikotomi mellan religion och kunskap, där matematik betraktas som synonym med kunskap. En viktig uppgift för historikern är, menar Schubring, att visa hur staten, som, skriver han, ofta varit tätt sammanvävd med religiösa intressen, på olika sätt förhindrat att kunskapen, dvs matematiken, tagit plats i skolans läroplaner. Han tar för givet att skolmatematikens historia är en process av succesiv modernisering genom vilken matematiken fått sin rättmätigt cen-

¹ F.W. Hultman, "Svenska aritmetikens historia," *Tidskrift för matematik och fysik, 1868-1870, 1874*.

² Gert Schubring, "Introduction. History of Teaching and Learning Mathematics," *Pedagogica Historica* 42, no. 4&5 (2006); Gert Schubring, "Researching into the History of Teaching and Learning Mathematics: the State of the Art," *Pedagogica Historica* 42, no. 4&5 (2006). Bibliografin fanns våren 2008 tillgänglig online på hemsidan för tidskriften *The International Journal for the History of Mathematics Education*.

³ Hit hör Jeremy Kilpatrick och George M. A. Stanic, *A history of school mathematics* (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003).

⁴ Eftersom, skriver han, man "uppenbarligen" inte ägnar sig åt forskning rörande skolmatematikens historia av "ren nyfikenhet" (Schubring, "Researching into the History of Teaching and Learning Mathematics: the State of the Art," 665).

⁵ Ibid.

⁶ Schubring befinner sig så nära frågor kring lärarprofession och lärarutbildning att han efter denna inledning påpekar att han "vet att det är svårt att introducera nya moment i lärarutbildningen" Ibid.: 666.

trala plats i utbildningssystemet (med "demokratisering" som följd), och ser därmed snarast historikerns uppgift som att klarlägga vad som gjorts att detta tagit så lång tid.

Typisk för den internationella forskning rörande skolmatematikens historia som tagit del av är Karen D. Michalowicz och Arthur C. Howards kapitel "Pedagogy in Text: An Analysis of Mathematics Texts from the Nineteenth Century" i boken *A History of School Mathematics* (2003).¹ Beskrivningarna av läromedel är informativa och sprider ljus över svenska förhållanden, så till vida att de visar att mycket av det som hände i Sverige under 1800-talet vad gäller skolmatematik, hände ungefär samtidigt i USA. Där emot framstår de slutsatser som författarna drar av det förlopp de beskriver, som väldigt färgade av deras uttalat normativa perspektiv.

Uppenbart är att den svenska, liksom den internationella, forskningen om skolmatematikens historia utgår från premisser som ligger tämligen långt från de jag beskrivit ovan.

Metodidé

Problemet med den forskning jag redogjort för ovan är att den tenderar att ta två saker för givna: dels matematiken, dels undervisningen. Matematiken tas för given som just det eviga och i förhållande till det sociala oberoende objekt som vetenskapshistorisk forskning under de senaste decennierna kommit att ifrågasätta. Lika problematiskt är att undervisningen, och mer specifikt matematikundervisning i egenkap av svårlostligt problem, betraktas som något i det närmast lika "evigt". Föreställningen om att matematiken finns där ute, och att den så att säga kräver obligatorisk undervisning, har satt ramarna även för "kritisk" forskning om skolmatematiken.² Syftet att problematisera dessa ramar har väglett mitt metodval.

Avhandlingen handlar å ena sidan om föreställningar om matematik, och å andra sidan om hur dessa föreställningar kommer till uttryck och får konsekvenser inom lika typer av utbildningsinstitutioner.

Vad gäller föreställningar om matematiken har min ambition varit att så långt möjligt spåra dem till sitt historiska ursprung. Här har jag dock avgränsat mig till modern tid, och utelämnat matematikens antika historia, även om den säkert är nog så intressant. Mitt fokus har legat på att förstå hur föreställningar om matematik vävts samman med övergripande tanke-system, och hur denna sammanvävning kan förstås sociologiskt.

Vad gäller matematikens behandling i skolan har min ambition varit att visa hur dessa tagit form så att säga "från början". Min tanke är att undervisningspraktiker kan förstås som ett resultat av tre faktorer: för det första idéer, till exempel om matematiken, som finns till hands och kan ge vissa praktiker en viss mening som ändamålsenliga; för det andra sociala "behov", till exempel av att hålla barn och ungdomar sysselsatta eller att förhindra att de begår brott eller orsakar andra typer av problem; och för det tredje olika typer av praktiska villkor, som till exempel materiella och ekonomiska förutsättningar. Med detta som utgångspunkt kan man tala om ett *samspel* mellan å ena sidan skolan, som social institution, och å andra sidan matematiken, vilket jag försöker följa genom historien. Viktigt är dock att skolan inte bara använder idéer om matematiken för att få sin praktiska verksamhet att framstå som meningfull, den bidrar även till att transformera föreställningar om matematiken, vilka den även för ut till andra delar av samhället.

Avgränsning

- Undersökningen handlar om svenska förhållanden. Bortsett från sekundärlitteratur rörande matematikens historia, har texter författade utanför Sverige och texter som handlar om förhållanden utanför Sverige, bara använts undantagsvis för att belysa någon viss aspekt av det svenska förloppet.
- Vad gäller empiri består denna huvudsakligen av texter producerade inom olika typer av utbildningsinstitutioner, från början av 1700-talet fram till idag, med tonvikt på 1800-talets andra hälft, vilken visade sig vara särskilt betydelsefull för skolmatematikens utveckling. För perioden före 1830 är framställningen – förutom att jag givetvis använt sekundärlitteratur – huvudsakligen ba-

¹ Karen D. Michalowicz och Arthur C. Howard, "Pedagogy in Text: An Analysis of Mathematics Texts from the Nineteenth Century," i *A history of school mathematics*, red. Jeremy Kilpatrick och George M. A. Stanic (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003).

² Det finns ett par undantag från denna regel. Hit hör Dowling, *The sociology of mathematics education: mathematical myths/pedagogic texts.*, en bok i vilken Dowling visar att läroböcker i matematik "(re)producerar" vad han kallar *myter* om matematiken. Dessa myter stämmer mycket väl överens med det jag kallar matematikens "blick". Till undantagen hör även Jean Lave, *Cognition in practice: mind, mathematics and culture in everyday life* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988). och Valerie Walkerdine, *The mastery of reason: cognitive development and the production of rationality* (London: Routledge, 1988).

serad på läroböcker och deras förord. Från 1850-talets och framåt blir istället artiklar i lärartidningar den huvudsakliga empirin. Jag tror att jag tagit del av det mesta som skrivits om matematik i svenska skoltidningar fram till mitten av 1970-talet. Från 1870-talet tillkommer statliga utredningar samt olika typer av planeringsdokument som en viktig typ av källmaterial. Från 1900-talets första decennier tillkommer texter om skolmatematik med vetenskapliga ambitioner. Mitt historiska källmaterial sträcker sig fram till slutet av 1970-talet, men av olika anledningar har jag valt att huvudsakligen begränsa min framställning till tiden före 1960.

- Jag har inte haft ambitionen att skriva den svenska skolmatematiken historia. Istället har jag fokuserat på vissa skeden som visat sig betydelsefulla i förhållande till min frågeställning. Jag har inte på förhand avgränsat någon viss del av matematiken, eller någon viss ålderkategori, som mitt huvudsakliga fokus.

Disposition

Den historiska redogörelsen består av två delar. Den första handlar om den långa period under vilken undervisning i matematik på ett samhällsligt plan var ett relativt perifert fenomen. Den sträcker sig fram till 1850-talet, då skolmatematiken av en rad anledningar började få större betydelse. Den historiska redogörelsens andra del handlar om hur skolmatematiken kom att inta en central och betydelsefull plats i det svenska samhället. Den sträcker sig från 1850-talet till omkring 1950. Den historiska redogörelsen har 9 kapitel (kapitel 2-10). Varje kapitel inleds med en beskrivning av vad det handlar om och avslutas med en "Analys" där den empiriska redogörelsen relateras till avhandlingens övergripande syfte. Avhandlingen avslutas i kapitel 11 med några sammanfattande slutsatser. Med detta sagt, låt mig nu ge en kortfattad presentation av avhandlingens innehåll.

Kapitel 2: Räknekonsten

Avhandlingen tar avstamp i en beskrivning av matematiken så att säga "innan den blev matematik", nämligen i en typ av böcker som kallades "räkneläror", vilka handlar om "den borgerliga räknekonsten". Denna konst presenteras i räkneläror som ett system av tekniker för att besvara frågor som uppstår i det "borgerliga livet". Den första svenska räkneläran publicerades 1614, och den sista – så som jag avgränsar genren – 1843.¹ Karaktäristiskt för räkneläror är att deras disposition antyder att de var tänkta att användas som handböcker i praktisk räkning. De var inte knutna till någon specifik undervisningspraktik, och de gav inte uttryck för några specifikt vetenskapliga ambitioner. Det var räknekonstens tekniker som kom att utgöra skolmatematikens huvudsakliga "stoff".

Kapitel 3: Matematiken

Det var under 1600-talet som den process ägde rum genom vilken matematiken kom att få det allmänt erkända värde som vetenskap vilket den fortfarande förknippas med. Detta hände utanför Sverige. Den "uppvärderade" matematiken – vilken var sammanvävd med en mängd olika, ibland religiösa, tankesystem – kom till Sverige under 1700-talets första hälft. Kapitel 3 handlar om det möte, mellan den "vetenskapliga" matematiken och räknekonsten, som då ägde rum.

I den "vetenskapliga" matematikens centrum stod den matematiska metoden, exemplifierad av en bok författad under antiken: Euklides *Elementa*.² Denna matematik var i motsats till räknekonsten något det talades mycket om, och det är från denna tid som man kan tala om en svensk "matematisk diskurs". Man tillmätte matematiska studier en gynnsam effekt så väl på förmågan att tänka rationellt som förmågan att fatta moraliskt riktiga beslut. Det praktiska räknandet fick i detta sammanhang en mer underordnad roll.

Mötet mellan den vetenskapliga matematiken och räknekonsten resulterade i en ny typ av läroböcker, i vilka räknekonsten – med delvis märkliga resultat – omformats för att passa det ideal som förknippades med Euklides *Elementa*.³

¹ Aegidius Matthiae Aurelius, "Arithmetica Eller Een Kort och Eenfaldigh Räknebook uthi helle och brutne Taal," i *Minnen och dokument*, red. Bengt Johansson, *Årsböcker i svensk undervisningshistoria* (Uppsala: Fören. för svensk undervisningshistoria, [1614] 1995). Roloff Andersson, *Genväg till borgerliga räknekonsten*, 8. uppl. utg. (Örebro: 1843).

² Mårten Strömer, *De Sex Första Böckerna Af Euklidis Elementa, eller grundeliga inledning til geometrien* (1748 [1744]).

³ Jag syftar här först och främst på Anders Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-konst, Til En Grundelig Inledning För Swea-Rikes Ungdom Utgifwen af And. Celsius Mathes. Prof. wid Kongl. Acad. och Secret. wid Kongl. Wetensk.Societ. i Upsala* (Stockholm: Hos Gottfried Keisewetter, Kongl. Academ. Bokhandlare i Upsala, 1741 [1727]).

Kapitel 4: Meritokrati

Från slutet av 1600-talet var matematiken relativt ohotad som det begreppsliga ramverk från vilket undersökningar om naturen måste utgå. Matematikens samhälleliga betydelse var dock fortfarande under 1700-talet relativt marginell. Ett första steg mot en förändring av detta togs i och med att matematik i Frankrike och i England gjordes till centrala delar av vad jag kallar lokala meritokratiska system.¹ Det höga värde, och den mängd positiva egenskaper som kring mitten av 1700-talet hade kommit att förknippas med matematiken, kom i dessa sammanhang att utnyttjas för att skänka legitimitet åt sociala institutioner vilka hade relativt lite att göra både med matematik i egenskap av vetenskap och matematikens koppling till teknik och naturvetenskap. I Sverige skedde något motsvarande i och med att matematik gjordes till en central del av studierna vid kungliga krigsakademien på Karlberg utanför Stockholm, vilken bildades 1792.²

Inom dessa institutionaliserade sammanhang började ett specifikt skolmatematiskt stoff att avskiljas från den vetenskapliga matematiken, uppdelat i väl avgränsade kurser definierade av avslutande examinationer. Det var i dessa sammanhang som elevers prestationer i matematik för första gången (i modern tid) kom att tillmätas stor betydelse. Matematik blev ett pluggämne. Jag argumenterar för att det sätt på vilket matematiken framställdes i läroböckerna resulterade i en identifikation med en viss matematikens "blick" genom vilken matematiken fyllde sin funktion att legitimera den sociala institutionens sätt att fungera.

Kapitel 5: Matematik för medborgerlig bildning

Under 1800-talets första hälft expanderade de matematiska studierna från den specifikt militära sfären till ny institutionella sammanhang. Samtidigt tog delvis nya idéer plats rörande de matematiska studiernas mål. Det pågick en strid rörande läroverket, där de klassiska språken – vilka dominerade undervisningen – utsattes för hård kritik och kontrasterades mot "realbildande" ämnen, bland vilka matematiken intog en särställning.

I den process under vilken matematiken flyttade in i nya institutionella sammanhang, författades en ny typ av läroböcker i aritmetik, vars särskiljande drag var att de huvudsakligen bestod av å ena sidan regler och å andra sidan övningsuppgifter. Dessa kom att utgöra den gemensamma referenspunkten för den skolmatematiska diskussion som tog form i Sverige kring mitten av 1800-talet.

Kapitel 6: Matematik för folket

Om skolmatematikens två första ursprung är räknekonsten och den "vetenskapliga" matematik som föddes under 1600-talet, kan ett tredje ursprung sägas vara de betydelser matematiken kring sekelskiftet 1800 kom att tillskrivas som instrument för uppfostran av barn. Det namn som förknippas med denna syn på matematiken är Heinrich Pestalozzi. Han utformade vad som närmast framstår som en uppfostringskonstens metafysik, inom vilken matematiken spelade en central roll.

I detta skede av skolmatematikens historia är det väldigt tydligt hur sociala och praktiska omständigheter bidrar till att omforma bilden av matematiken. Pestalozzi förespråkade en mycket speciell undervisningsmetodik, vars kännetecknande drag bland annat var att en ytterst liten del av matematiken (eller för den delen räknekonsten) behandlades, men att denna däremot behandlades oerhört "grundligt" genom att eleverna fick utföra samma elementära räkneoperationer om och om igen. Pestalozzis undervisning var praktisk, och bestod i att barnen fick aktigt förhålla sig till och tala om sin fysiska omvärld i matematiska termer – men dock inom strikta ramar.

Med Pestalozzi, förskjöts undervisningens mål, på ett mer definitivt sätt än tidigare, från bibringande av kunskaper i matematik, till användning av matematik som redskap för att göra barn sedliga och harmoniska. Pestalozzi gjorde matematiken till en del av en "metafysik" genom vilken den förbands med Gud, människan och verklighetens essens. Denna "metafysik" satte ramarna för hans tänkande kring undervisningspraktiken. Det är dock lätt att se att det snarare var undervisningspraktiken, och dess praktiska villkor, som satte ramarna för hans "metafysik" än tvärtom.

Under detta skede i matematikens historia tog en rad idéer form, rörande matematikens relation till barnet, vilka i stor utsträckning kom att sätta agendan för den skolmatematiska diskussionen.

¹ Se Alder, *Engineering the revolution*; Ken Alder, "French Engineers Become Professionals; or, How Meritocracy Made Knowledge Objective," i *The Sciences in Enlightened Europe*, red. William; Golinski Clark, Jan; Schaffer, Simon (Chicago & London: The University of Chicago Press, 1999). samt vad gäller England John Gascoigne, "From Bentley to the Victorians: The Rise and Fall of British Newtonian Natural Theology," *Science in Context* 2, no. 2 (1988); John Gascoigne, "Mathematics and Meritocracy: The Emergence of the Cambridge Mathematical Tripos," *Social Studies of Science* 14 (1984).

² Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*.

Kapitel 7: Matematiken tar plats i folkskola och läroverk

I kapitel 7, som är det första i den historiska redogörelsens andra del, löper de trådar som beskrivits i de tidigare kapitlen samman. Det handlar om decennierna efter 1800-talets mitt, då matematiken tagit plats i läroverket och samtidigt blivit ett av ämnena i den då snabbt växande folkskolan. Som ett resultat av att allt fler skulle undervisas i matematik, publicerades vid denna tid en mängd nya läroböcker, genom vilka ståndpunkter rörande hur undervisningen borde vara utformad kom till uttryck. Det uppstod en skolmatematisk diskussion. I denna diskussion formulerades ett antal grundläggande frågor och svar rörande grundläggande matematikundervisning som sedan kom att stötas och blötas av varje ny generation skolmatematiker, utan att egentligen förändras särskilt mycket.

Vid denna tid bredde en konsensus ut sig som sade att skolmatematiken i allmänhet inte levde upp till vad man med utgångspunkt från matematikens mångafaldiga positiva egenskaper kunde förvänta sig av den. Därmed sattes fokus först på de bristfälliga metoder som, menade man, måste vara orsaken till skolmatematikens misslyckande, och sedan på de nya metoder med vars hjälp man hoppades att skolmatematiken kunde nå större framgång.

Kapitel 8: Skolmatematik för tyst övning

Den enskilt viktigaste förändring som skolmatematiken genomgick från mitten av 1700-talet till mitten av 1900-talet var att mängden övningsuppgifter i läroböckerna ökade, från några tiotal i 1600-talets räkneläror, till att kunna räknas i hundra tusental (!) mot slutet av 1950-talet.¹ Denna process accelererade efter 1870-talet, och i kapitel 8 visar jag hur detta kan förklaras med hänvisning till en viss praktisk funktion som läroböcker i matematik vid denna tid författades för att fylla, nämligen att hålla eleverna tysta och sysselsatta.

Kapitel 9: Matematiken, barnet och vetenskapen

I den skolmatematiska diskursen hade matematiken under hela 1800-talet huvudsakligen betraktats som ett *bildningsmedel*, något den var i kraft av sin "evigt exemplariska" vetenskaplighet. Huvudsaken var inte att lära barnen räkna (eller att lära dem använda algebra eller geometri på något praktiskt sätt), utan att de skulle arbeta med matematiken, för att därmed *ta intryck* av matematikens specifikt bildande egenskaper.

Decennierna kring sekelskiftet 1900 förändrades på ett övergripande idémässigt plan relationen mellan matematiken, vetenskapen och skolan. Framför allt skedde en utveckling inom den vetenskapliga matematiken, som avlägsnade den från folkskolans och läroverkets undervisningspraktiker. Universitetsmatematiker riktade kritik mot skolmatematiken, vilken de betraktade som irrelevant, ovetenskaplig och opraktisk. Det var vid denna tid som termen skolmatematik började användas mer allmänt, just för att tala om vad som då framstod som folkskolans och läroverkets *säreigna* matematiska stoff.

Min poäng i kapitlet 9 är emellertid att skolmatematiken, kritiken till trots, under denna tid intog en allt mer central position i samhället. Det sätt att tänka kring matematiken och undervisningen som var gängse under 1800-talet levde kvar, om än i något eufemiserad form.

Vid denna tid kom folkskolan och småskolan att nå ut till en allt större del av befolkningen. Småskollärarinnor tog plats på den skolmatematiska scenen, och i deras skolmatematiska diskussion stod "barnet" i centrum.

Kapitel 10: Utbildningssystemet, skolmatematiken, och vetenskapen

I den historiska redogörelsens sista kapitel visar jag hur skolmatematiken under första halvan av 1900-talet blir en central del av det då framväxande utbildningssystemet. Det svenska samhället blir en meritokrati, inom vilken prestationer i matematik används för att fördela individer mellan sociala positioner, samtidigt som matematiken, genom sina egenskaper, får denna sortering att framstå som relevant och rättvis.

Examinationernas växande betydelse leder till en fixering av det matematiska stoffet, och ett ytterligare intensifierat fokus på övande.

På grund av sin nu stora samhällseliga betydelse hamnar skolmatematiken i centrum för en politisk diskussion. Matematiken får talesmän som försvarar den mot kritik och man kan tala om en kamp om matematikens plats i skolan.

¹ Jag syftar här på antalet uppgifter som en elev räknade under hela sin skolgång.

Det sista steget i min berättelse utgörs av att skolan, under 1950- och 1960-talet får så att säga "egna" vetenskaper, bland vilka matematikdidaktiken kom att vara närmast knuten till skolmatematiken. En av matematikdidaktikens viktigaste funktioner blev att fungera som en sorts institutionaliserad kritiker av skolmatematiken. På så sätt kom skolmatematiken att framstå som ett "vetenskapens föremål", allt för komplicerat för att kunna tas upp i ett demokratiskt offentligt samtal.

Kapitel 11: Slutsatser

I avhandlingens sista kapitel drar jag några sammanfattande slutsatser i anknytning till mina inledande frågeställning och min tes.

Jag konstaterar att våra nuvarande föreställningar om matematiken måste ses som ett resultat av en långsam historisk process som pågått sedan slutet av 1500-talet – en process genom vilken matematiken successivt kommit att spela en allt viktigare roll för att konstituera västerlandets enhetliga världsbild.

Mot bakgrund av den historiska redogörelsen står det klart att den offentliga skolan spelat en avgörande roll för att understödja denna matematikens världsbild. Skolmatematikens praktiker är delvis formade med utgångspunkt från räknekonstens och den vetenskapliga matematikens särskilda egenskaper. Dessa har dock omformats i skolan, för att passa skiftande praktiska omständigheter och samhälleliga behov. Som en effekt av detta har skolan bidragit till att förskjuta och förändra bilden av matematiken, samtidigt som den utsträckt erkännandet av dess värde till allt större delar av samhället.

Det står klart att skolmatematiken fyller en rad praktiska funktioner, som att sysselsätta och sortera Sveriges barn och ungdomar. Den skolmatematiska praktiken är sådan att den genererar tro på en matematik som finns "där ute" i den sociala och fysiska verkligheten. Denna utgör sedan utgångspunkten för bedömning av såväl skolan som det samhälle den är en del av. Den matematik skolan konstituerar får både dess egna hierarkiserande praktiker och det hierarkiska samhälle den därmed bidrar till att reproducera att framstå som förankrade i en objektivt existerande matematiska verklighet.