Sättning: Sverker Lundin och Johannes Westberg

Sverker Lundin

Skolans matematik

En kritisk analys av den svenska skolmatematikens
förhistoria, uppkomst och utveckling

Summary:

The Mathematics of Schooling

A critical analysis of the prehistory, birth and development
of Swedish mathematics education

UPPSALA
UNIVERSITET

Dissertation presented at Uppsala University to be publicly examined in X, Universitetshuset, Uppsala, Monday, December 15, 2008 at 13:15 for the degree of Doctor of Philosophy. The examination will be conducted in Swedish.

Abstract

Lundin, Sverker 2008. *Skolans matematik. En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling* (The Mathematics of Schooling: A critical analysis of the prehistory, birth and development of Swedish mathematics education). Acta Universitatis Upsaliensis. Studier i utbildnings- och kultursociologi 2. 398 p. Uppsala. ISBN 978-91-554-7348-8.

I argue that common beliefs regarding mathematics originate in the practices of elementary mathematics instruction rather than in science. While learning how to solve mathematical problems in school, we come to believe that mathematics has a set of properties in itself, for instance that it is useful in everyday life, even though this is not necessarily so. I call this object of belief the mathematics of schooling (skolans matematik), while the system of practices by which the belief is produced is called mathematics education (skolmatematik). I introduce a terminology inspired by psychoanalytic theory to describe the peculiar properties of the mathematics of schooling and suggest that it can be understood as a sublime object of an ideology propagated by the system of education. To substantiate this claim I give an overview of the history of Swedish mathematics education, based on curricula, textbooks, discussions in teacher magazines, and other published material – covering in general terms the eighteenth to the twenty-first century. The historical narrative moves between social factors determining the practices of mathematics education, the changing ideas about mathematics expressed in these contexts, and the interplay between external social factors and internal "ideological" meaning. My conclusion is that while elementary arithmetics is, and should be, a part of common knowledge, the mathematics of schooling is something quite different. This object is thoroughly ideological and plays a central part in society mainly by making the social effects of mathematics education – keeping children away from production while sorting them – to appear as something else, namely as most often failed attempts to give children a necessary knowledge of mathematics.

Keywords: Matematik, matematikdidaktik, utbildningssociologi, vetenskapsteori

Sverker Lundin, Department of Studies in Education, Culture and Media, Box 2136, Uppsala University, SE-750 02 Uppsala, Sweden

ISBN 978-91-554-7348-8
urn:nbn:se:uu:diva-9395 (http://urn.kb.se/resolve?urn=urn:nbn:se:uu:diva-9395)

Printed in Sweden by Universitetstryckeriet, Uppsala 2008
Distributor: Uppsala University Library, Box 510, SE- 751 20 Uppsala
www.uu.se, acta@ub.uu.se

Innehåll

Förord 9

I. SKOLANS MATEMATIK 11

1. Inledning 13

2. Problemställning 19
   - Problemområde a: Obligatoriet 21
   - Problemområde b: Skolmatematikens högre mål 24
   - Problemområde c: Det matematiska stoffet 27
   - Problemområde d: Kritiken 29
   - Problemområde e: Skolmatematikens behov av tid 34
   - Problemområde f: Matematiken och barnet 35
   - Problemområde g: Den skolmatematiska praktiken 37
   - Problemområde h: Den pedagogiska teorin 39

3. Teori 43
   - Utgångspunkter 43
   - Från matematik i skolan till skolans matematik 53

4. Metod 81
   - Utgångspunkter 81
   - Argumentets struktur 97

II. FÖRHISTORIA 107

5. Räknekonsten 109
   - Räkneläran som genre 110
   - Räknelärornas disposition och innehåll 113
   - Räknelärornas användning 131

6. Matematiken 137
   - Den matematiska diskursen 138
   - Mötet mellan räknekonsten och matematiken 158
   - Matematiken och tänkandet 174

7. Skolan ... 179
De matematiska studiernas nya form ... 180
Läroböcker i aritmetik och algebra ... 183
Matematikens nya gränser ... 197

8. Skolmatematikens utgångspunkter ... 205
Aritmetik ... 207
Algebra ... 222
Geometri ... 227
Sammanfattning ... 234

III. UPPKOMST OCH UTVECKLING ... 237

9. Matematiken och barnet ... 239
Nya tankar om uppfostran ... 241
Bildning och disciplin ... 243
Geometri för folkets barn ... 255
Aritmetik för folkets barn ... 257
Matematikens insida ... 269

10. Den skolmatematiska diskursen ... 271
Obligatoriet ... 272
Skolmatematikens högre mål ... 274
Det matematiska stoffet ... 285
Kritiken ... 287

11. Skolmatematikens tid ... 299
Skolmatematikens behov av tid ... 300
Offentlig diskussion av undervisningen i räkning ... 313
Ett nytt läroboksparadigm ... 342

12. Slutsatser ... 355
Skolmatematikens *symbolisk-mekaniska* nivå ... 355
Matematikens utsida ... 358
Matematikens insida ... 361

13. Epilog Skolmatematiken under 1900-talet ... 367

Summary The Mathematics of Schooling A critical analysis of the prehistory, birth and development of Swedish mathematics education ... 375

Referenser ... 381

Förord

Min tid som doktorand har präglats av stor frihet att ställa egna frågor och söka egna svar. Den person som allra mest bidragit till att skapa förutsättningar för denna frihet är min handledare professor Donald Broady. Jag vill här tacka honom, för detta och mycket annat.

Vid en tidpunkt då det uppstått obalans mellan antalet goda idéer och mängden producerad text av rimlig kvalitet som pekade fram mot någon typ av presentabelt resultat tog jag – vägledd av outgrundliga krafter – kontakt med docenten i teologi Ola Sigurdson. Informerad om läget kopplade han in doktorn i idéhistoria Thomas Karlsohn. Tillsammans kom de två att utgöra ett formidabelt team. Under deras överinseende tog den text form som jag nu lägger fram.

Bland vänner och kollegor som läst olika versioner av manuset vill jag först och främst tacka Marie Wenger. Stor hjälp har jag även haft av kommentarer från Johannes Westberg, Karolina Enqvist-Källgren, Adam Netzén, Johan Söderberg och Lars Mouwitz. Caroline Magnusson och Robert Käll har gett mig välbehövlig hjälp med korrekturläsning. Min sambo Sofia Larsson har lyssnat på oräkneliga halvfärdiga tankar och ofta hjälpt mig komma vidare. Slutligen vill jag tacka Bengt Johansson för att han generöst överlåtit åt mig att förvalta ett omfattande empiriskt material rörande den svenska skolmatematikens historia.

I. Skolans matematik

1. Inledning

Den här avhandlingen har tre delar. I den första presenterar jag ett nytt sätt att tänka relationen mellan skolan och matematiken. Detta tänkesätt är resultatet av ett arbete med den svenska skolmatematikens historia, vilket redovisas i avhandlingens andra och tredje del. Förutom att ge ett bidrag till forskningen är mitt övergripande syfte att skapa möjligheter för en offentlig kritisk diskussion av en rad frågor rörande grundläggande matematik-utbildning – frågor som idag ofta antas vara av en sådan natur att de endast kan besvaras av experter.[1]

I avhandlingen gör jag en distinktion mellan å ena sidan *skolmatematik* – vilken här skall förstås som en social institution med syfte att förmedla kunskaper i matematik till först och främst barn och ungdomar – och å andra sidan den *matematik* som den skolmatematiska undervisningen syftar till att förmedla. Min tes är att dessa två fenomen, skolmatematiken och matematiken, är oupplösligt förenade med varandra. Detta dock inte på det sätt man vanligen föreställer sig, det vill säga att matematik är något som skapas (eller om man så vill, upptäcks) utanför skolan och som skolan sedan syftar till att förmedla – i linje med politiskt formulerade mål, men i kamp med rader av hinder och begränsningar. Tesen går ut på att våra föreställningar om matematiken, det vill säga våra föreställningar om det som skolan syftar till att förmedla, faktiskt är något som tar form i skolan, samtidigt som vi får kunskaper om detta något. Som titeln anger handlar avhandlingen om skolans matematik, vilken skall skiljas både från matematik

---

[1] Här knyter jag an till de resonemang rörande relationen mellan experter och ”outsiders” som statistikhistorikern Theodore Porter för i *Trust in numbers: the pursuit of objectivity in science and public life*, Princeton, 1995, s. 311. Av den historiska redogörelse som följer nedan (särskilt kapitel 9–11 och 13) framgår att den offentliga diskussion av grundläggande matematik-utbildning vi har idag, med ett relativt snävt fokus på betyg och prestationer, i motsats till tidigare decenniers mer öppna ifrågasättande av matematiskt stoff och undervisningsmetoder, har sitt ursprung i den period kring mitten av 1900-talet då experter trädde in på scenen med anspråk på att med vetenskapens hjälp besvara de frågor som tidigare utgjort föremål för offentlig diskussion. Porters resonemang går ut på att (bland andra) de pedagogiska och didaktiska vetenskapernas anspråk på vetenskaplig objektivitet snarare måste förstås som ett sätt att skydda skolan och dess förvaltning från en ifrågasättande politisk opinion, än – vilket de givetvis vill göra gällande – som ett steg i riktning mot mer effektivt sanningssökande.

i en allmän bemärkelse och från termen ”skolmatematik”.[2] Min ambition är, kan man säga, att synliggöra i vilken utsträckning det man vardagligt uppfattar som matematik, faktiskt i själva verket bättre kan förstås just som skolans matematik.

Låt mig göra ett försök att redan här i någon mån klargöra vad jag menar med detta. När vi tänker på och talar om matematik, utgår vi (oftast omedvetet) från att våra tankar och vårt tal *syftar* på något. Alla har givetvis inte exakt samma tankar om vad matematiken är, men de är tillräckligt lika varandra för att vår kommunikation skall fungera. Ett antagande som jag tror de flesta gör, är att anledningen till att vi är relativt överens om vad matematik är för något och därför kan tala om den utan missförstånd, är att matematiken helt enkelt är på ett visst sätt, oberoende av vad vi säger och tänker om den. Givetvis har vi alla olika erfarenheter av matematik, vilket avspeglar sig i våra känslor inför den liksom i vår förmåga att till exempel göra olika typer av uträkningar. Likväl framstår dessa skillnader som orsakade av vårt *perspektiv* på matematiken, det vill säga om vi kommit den nära eller betraktar den på avstånd, om vi ser den från den vuxnes eller barnets synvinkel, lekmannens eller expertens, och så vidare (snarare än det till synes absurda alternativet: att vi skulle tala om olika ”matematiker”).

Den här avhandlingen kan ses som ett försök att visa att anledningen till att vi har gemensamma föreställningar om matematiken *inte* är att matematiken finns där ute med en viss uppsättning egenskaper vilka vi tar intryck av när vi möter den. Min idé är istället att våra föreställningar om matematiken formas i skolan, och att det som sker i skolan därför inte bör förstås som ett möte med en på förhand given matematik, utan som ett deltagande i mycket speciella institutionaliserade praktiker, vilkas utformning måste förklaras sociologiskt och historiskt snarare än med hänvisning till matematiken.

Min tanke är att skolan får oss att tro på matematiken, såtillvida att den får matematiken att framstå som den på förhand givna orsaken till det vi gör i skolan. Att vi är så överens i vår syn på matematiken beror därför, menar jag, inte på någon objektiv konstans hos matematiken, utan på att

[2] Termen skolmatematik kom i mer allmänt bruk efter sekelskiftet 1900, t.ex. i Henrik Petrini, ”Matematiken i skolan”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1905 och Olof Josephson, ”Till frågan om gymnasiets matematikkurser”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1905. Termen användes inledningsvis för att kontrastera skolans (som man menade felaktiga) behandling av matematiken med den matematiska vetenskapen. Under 1900-talets lopp kom dock ”skolmatematiken” – med sina särskiljande drag – att allt mer tas för given. Att innebörden på 1950-talet inte längre var nedsättande visas av att det då under några år (1955–1957) gavs ut en tidskrift med namnet *Tidskrift för skolmatematik*. Termen återfick dock, under tämligen tumultartade former, sin ursprungliga pejorativa klang under 1960-talet, för att sedan – så uppfattar jag det – ha behållit den i förhållande till vetenskapens särskiljande och samtidigt åtminstone vagt nedsättande, innebörd genom 1900-talets sista och 2000-talets första decennier. Som nämnt ovan har alltså termen här en särskild innebörd, vilken kommer att preciseras i det följande.

skolmatematiken i egenskap av institutionaliserad undervisningspraktik är så konstant över tid och rum.

Poängen är inte att matematiken ”inte finns”, utan att det de allra flesta tror sig veta om matematiken, har sitt ursprung i skolan. Om vi ser var och ens föreställningar om matematiken som en kompassnål, kan vi tänka oss skolan som ett magnetfält vilket ger alla dessa kompassnålar ungefär samma riktning. Magnetfältet gör att vi kan orientera oss i förhållande till matematiken, utan gå vilse. Detta är min bild, vilken skall kontrasteras mot den där matematiken utgör ett magnetiskt objekt som drar nålspetsarna till sig. Istället för att se våra tankar och föreställningar som orsakade av en universell punkt ”där borta”, ser jag dem som orsakade av det sociala ”här och nu” som skolmatematiken i egenskap av social institution utgör. Jag kommer i avhandlingen på flera olika sätt försöka förklara varför vi är så benägna att se i den riktning som skolan pekar ut för oss. På en förklaringsnivå handlar detta om själva undervisningspraktikens utformning, på en annan om den sociala funktion som hänvisningen till matematik fyller, på en tredje om hur både skolans hänvisning till matematiken och undervisningens praktiska utformning tagit form över tid.

Jag har i stort sett ingenting att säga om vad matematiker ägnar sig åt på dagarna. I denna bemärkelse handlar den här avhandlingen snarare om skolan än om den vetenskapliga matematiken. Faktum är emellertid att ytterst få vet särskilt mycket om vad vetenskaplig matematik på en praktisk nivå innebär. Forskande matematiker utgör givetvis ett undantag, men även deras kunskaper om de matematiska forskningspraktikernas detaljer är i allmänhet begränsade till den typ av forskning de själva och deras närmare kollegor ägnar sig åt. I själva verket är det först sedan slutet av 1970-talet som vetenskapens disparata uppsättning *praktiker* började göras till föremål för detaljerade undersökningar. Dessa har resulterat i ett generellt ifrågasättande av den gängse bilden av vetenskapen som en relativt homogen helhet.[3] Om denna typ av studier syftar till att kartlägga och förstå de vetenskapliga praktikernas mångfald, handlar den här avhandlingen om hur ordet ”matematik” bidrar till att få myllret av praktiker att framstå som om de hängde samman på ett sätt som är självklart och enkelt att förstå. I denna bemärkelse står alltså även den vetenskapliga matematiken i avhandlingens fokus – men inte som något man gör, utan som något man tror på.

På ett övergripande plan har avhandlingen följande upplägg. I detta inledande kapitel följer strax en problemställning, där min syn på dagens

[3] Standardreferensen i detta sammanhang är förstås Thomas S. Kuhn, *The structure of scientific revolutions*, Chicago, 1962, eller, om man menar att Kuhn fortfarande befinner sig för långt från den vetenskapliga praktiken: Bruno Latour & Steve Woolgar, *Laboratory life: the social construction of scientific facts*, Beverly Hills, 1979. För en mycket kortfattad översikt, se Andrew Pickerings förord till: Pickering (ed.), *Science as practice and culture*, Chicago, 1992, och för en nyare och något mer utförlig beskrivning av forskningsfältets framväxt och struktur: Sergio Sismondo, *Science and technology studies*, Malden, Mass., 2004.

skolmatematik och dess relation till matematiken preciseras. Detta avsnitt utgör vad man med vetenskapsteoretikern Bachelard kan kalla en brytning med en mer vardaglig förståelse av skolmatematiken.[4] Med utgångspunkt från ett antal centrala utredningar och rapporter rörande grundläggande matematikutbildning ringar jag in åtta problemområden som avhandlingen sedan kommer att belysa. Till stor del handlar dessa problemområden om sådant man ofta tar för givet, till exempel att *alla* behöver undervisning i matematik under sin uppväxt, att det tar tid att lära sig matematik, och att det kunnande som helst skall bli resultatet av grund- och gymnasieskolans matematikundervisning träffande kan beskrivas i termer av *matematiska begrepp*. I problemställningen argumenterar jag för att dessa ”fakta” kanske inte är så självklara som man gärna tror.

Om jag i denna problemställning genomför en sorts dekonstruktion av skolmatematiken, innehåller den efterföljande teorigenomgången en motsvarande rekonstruktion, där mitt forskningsobjekt konstitueras med hjälp av en särskilt avpassad terminologi. Jag börjar här med att redogöra för några tidigare försök att på ett teoretiskt plan gripa sig an den typ av frågor som problemställningen väcker. (Detta är den första av två genomgångar av tidigare forskning i den här avhandlingen. Den andra, vilken fokuserar forskning om den svenska skolmatematikens historia, inleder avsnittet om metod.) Denna forskningsöversikt leder fram till en mer precis formulering av det problem som mitt eget teoretiska ramverk måste lösa. Förenklat består problemet i att tidigare teorier om skolmatematiken tenderar att ta matematiken för given på ett sätt som gör att många aspekter av skolmatematiken tycks ha matematiken som sin ”orsak” – även sådana aspekter som det enligt problemställningen finns skäl att ifrågasätta. Genom att kunna härledas från matematikens egenskaper, tycks de falla utanför ramarna för en teori vars fokus är skolan, snarare än matematiken, vilket gör att en rad frågor därmed måste lämnas obesvarade. Teorins uppgift är därför att konstituera ett annat sätt att tänka relationen mellan skolan och matematiken, som inte tar matematiken för given, men samtidigt gör det sätt på vilket matematiken framträder för oss rättvisa – det vill säga just som något som tycks vara givet på förhand och genom sina inneboende egenskaper tycks sätta ramarna för hur en ändamålsenlig grundläggande matematikundervisning måste vara utformad. Jag vill här poängtera att detta teoriavsnitt spelar en mycket central roll i avhandlingen. Teorin utgör en väsentlig del av avhandlingens resultat.

---

[4] Bachelards kännemärke (i egenskap av vetenskapsteoretiker) är att han såg vetenskapligt arbete som en kamp mot det vardagliga tänkandets förutfattade mening. Han talade om nödvändigheten av att säga *nej* till detta tänkande som ett första steg mot vetenskaplig kunskap, något jag kan identifiera mig med. Se Gaston Bachelard, *La philosophie du non: essai d'une philosophie du nouvel esprit scientifique*, Paris, 1949 och för ett sammanhang och en analys: Donald Broady, *Sociologi och epistemologi: om Pierre Bourdieus författarskap och den historiska epistemologin*, Stockholm, 1991, s. 440–461.

Efter presentationen av min teori följer ett avsnitt med rubriken metod. Här berättar jag först kort om jag om hur jag i praktiken gått till väga. Sedan diskuterar jag tidigare forskning om den svenska skolmatematikens historia, för att slutligen redogöra för hur min egen historiska redogörelse är strukturerad.

Därefter följer den historiska redogörelse som sett till antalet sidor utgör avhandlingens huvuddel. Den sträcker sig över avhandlingens andra del, med titeln ”Förhistoria” och den avslutande tredje delen ”Uppkomst och utveckling”. Del två handlar om tiden från 1500-talets slut till omkring 1840. Jag visar här hur skolmatematiken har väsentligen två olika ursprung: Ett ursprung ligger i det dagliga livets praktiska räknande, där sådant som att räkna fort och rätt är viktigare än att lösningsmetoderna är eleganta. Ett andra ursprung ligger i Antikens matematiska teori, där fokus ligger på det rena tänkandet, snarare än praktisk handling. Jag beskriver hur dessa två ursprung möttes under 1700-talet, vilket innebar att de första stegen togs mot den skolmatematik vi har idag. En viktig poäng i denna del av avhandlingen är att skolan och den funktion undervisningen fyllde på en sociologisk nivå, tillsammans med undervisningens praktiska förutsättningar, satte betydande avtryck i synen på vad matematik är och hur man på bästa sätt lär sig matematik. Avhandlingens tredje del handlar huvudsakligen om perioden från mitten av 1800-talet fram till sekelskiftet 1900. Det var, menar jag, under denna period som skolmatematiken fick merparten av sina karaktäristiska drag. Detta visar jag genom att återknyta till problemställningen och visa hur skolmatematiken då har många likheter med skolmatematiken idag. En central roll i redogörelsen spelar här relationen mellan å ena sidan vad de som arbetade med skolmatematik *sade* – om matematiken och skolan – och å den andra vad de *gjorde*. Ett skäl till att den historiska empirin kan sprida ljus över dagens problematik är nämligen att man i vissa fall gjorde ungefär samma saker då som vi gör idag – till exempel lät man eleverna lösa övningsuppgifter – samtidigt som man sade något helt annat om varför det skulle vara lämpligt att göra på detta sätt. Under hela 1900-talet har man talat om vikten av att göra undervisningen konkret och att på så sätt skydda (i synnerhet de yngre) barnen från matematikens tecken och symboler. Det är då tankeväckande att just konkretion vid den tid jag fokuserar kunde betraktas som ett medel att förhindra att skolbarnen, i det här fallet från samhällets lägre skikt, fick smak för studier och abstraktion och istället fortfor att vara ”olärda”, sin skolgång till trots.[5] Ett annat exempel är att läroböckerna i räkning under 1880-talet utformades i det explicit uttalade syftet att hålla eleverna sysselsatta utan att ta lärarens uppmärksamhet i anspråk.[6] Detta sprider ljus över vår tids diskussion rörande läroboksstyrd undervisning, för det är ju inte konstigt att böcker som är *utformade* för att avlasta läraren och själva leda eleverna framåt, gör just detta.

Den historiska redogörelsen avslutas med en epilog, där jag översiktligt redogör för den svenska skolmatematikens utveckling under 1900-talet. Att

[5] Carl Olof Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*, Stockholm, 1830, s. viii.
[6] Se kapitel 11 nedan.

detta avsnitt har formen av en epilog innebär att fokus i avhandlingen snarare ligger på skolmatematikens förhistoria och uppkomst, än dess senare utveckling. Å andra sidan ägnas relativt stort utrymme åt dagens skolmatematik i problemställningen och teoriavsnittet. Den bild som i dessa avsnitt tecknas av vart skolmatematiken så att säga är på väg, gör det förhoppningsvis möjligt att, med hjälp av epilogen, översiktligt föreställa sig dess utveckling under 1900-talet.

I relation till avhandlingen som helhet, är redogörelsen för den svenska skolmatematikens historia huvudsakligen tänkt att fungera som stöd för – och en konkretisering av – det teoretiska perspektiv på dagens skolmatematik som presenteras i detta inledande kapitel, inte som en beskrivning av skolmatematikens historia. Jag vill poängtera detta, eftersom det stora utrymme de historieredovisande kapitlen tar förmodligen kan locka till jämförelser med specifikt utbildningshistoriska studier, vilka emellertid utgår från andra premisser än de som legat till grund för denna undersökning. Med detta sagt, vill jag å andra sidan inte förneka att jag *även* hoppas ge ett bidrag till skrivandet av den svenska skolmatematikens historia, ett forskningsområde som är tämligen eftersatt.[7] Den historiska redogörelsen utgör vad man kan kalla ett historiskt argument för min teori om skolans matematik. Detta argument skall, liksom själva teorin, förstås som en hypotes i Karl Poppers bemärkelse.[8] Teorin och mitt argument är ett förklaringsförsök. Som sådant har jag emellertid strävat efter att ge det en så fullständig och detaljerad form som möjligt.

[7] Skolmatematikens historia har inte blivit föremål för lika många undersökning som t.ex. läskunnighetens historia. Mot bakgrund av de resonemang som jag för här, kan man hypotetiskt se två orsaker till detta. Den första är att de föreställningar och känslomässiga band i förhållande till matematiken som förmedlas i den skolmatematiska undervisningen tenderar att ingjuta en respekt för matematiken som gör att man inte gärna tar den till forskningsobjekt om man inte anser sig ”kunna matematik”, något som – givet hur universitetsvärlden är strukturerad med avseende på olika ämnesområden – sällan sammanfaller med att man har humaniora som främsta intresse. Den andra anledningen är att skolmatematikens förflutna spelar en central roll inom den diskurs som skolmatematiken producerar om sig själv. Här är det emellertid inte fråga om någon egentlig historia, utan om en projektion av nutidens problem på vad man (utan empiriskt underlag) gärna kallar den skolmatematiska ”traditionen”, se t.ex. Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken: intresse, lärande, kompetens: betänkande*, SOU 2004:97, Stockholm, 2004, s. 58, 59 och 67. Man kan kalla detta för ett pseudovetande om skolmatematikens förflutna, vilket skapar ett sken av att skolmatematikens historia är välkänd, medan den i själva verket utgör en i stor utsträckning blind fläck på den utbildningshistoriska kartan.

[8] Karl Popper, *Conjectures and refutations: the growth of scientific knowledge*, London, 2002, s. xi: ”The way in which knowledge progresses, and especially our scientific knowledge, is by unjustified (and unjustifiable) anticipations, by guesses, by tentative solutions to our problems, by *conjectures*. These conjectures are controlled by criticism; that is, by attempted *refutations* [...]”.

2. Problemställning

Både skolan och matematiken är var och en på sitt sätt svåra att skriva om. Skolan på grund av att den är så välkänd och redan gjorts till föremål för en mängd vetenskapliga studier;[1] matematiken för att den på ett nästan magiskt sätt tycks sväva ovanför både skola och samhälle, omgärdad av kanske i och för sig informella, men inte desto mindre strikta förhållningsregler rörande när, var och hur den anses lämplig att studera, liksom även vem som anses lämpad att ta sig an sådana företag.[2] Att, som jag gör i den här avhandlingen, samtidigt ta mig an både skola och matematik, är därför dubbelt problematiskt.

Jag kommer här att ringa in åtta problemområden. Redogörelsen för varje sådant problemområde inleds med ett antal relativt öppna frågor, varav den första – som kursiverats – är den grundläggande. Sedan följer en diskussion, där jag knyter frågorna till den samtida skolmatematiska diskussionen med syfte att visa att denna diskussion inte besvarar dem på något tillfredställande sätt. För att ta ett exempel ställer jag i problemområde a frågan om alla människor verkligen behöver undervisning i matematik under sin uppväxt. Vad jag vill visa i diskussionen av denna fråga är att även om det vanligtvis tas för givet att svaret på denna fråga är ja, så är det ganska svårt att ge detta svar en rationell empirisk underbyggnad.

Även om problemställningen sönderfaller i en stor och till synes disparat mängd frågor, är dess syfte tvärtom att ringa in *ett* grundläggande problem. Den är ett försök att synliggöra en blind fläck, bestående av förgivettaganden rörande matematiken och skolan. Det går inte, menar jag, att ge en exakt beskrivning av det problem avhandlingen behandlar inom ramarna för den

---

[1] Denna typ av problem beskrivs i Pierre Bourdieu, *Homo academicus*, Stockholm/Stehag, 1996, s. 33–67. Även om jag instämmer i Bourdieus beskrivning av själva problemet, har jag valt en helt annan väg än han för att ta mig an det.

[2] Detta faktum har i och för sig (mig veterligen) inte varit föremål för några mer omfattande svenska diskussioner under de senaste decennierna. I USA har däremot debattens vågor gått höga, i vad som brukar kallas ”The science wars”. Orsaken till detta ”krig” är att samhällsvetare och humanister – utan högre utbildning inom matematik och naturvetenskap – sedan slutet av 1970-talet tagit sig för att genomföra en ny typ av relativt detaljerade undersökningar av den naturvetenskapliga forskningens praktiska verklighet (jmf. s. 15 ovan). Resultaten av dessa undersökningar kontrasterar ibland skarpt mot äldre vetenskapsfilosofi (från 1900-talets första hälft) liksom mot många naturvetares självförståelse, och har därför resulterat i kraftiga protester. En klargörande diskussion, där företrädare både för den nya typen av vetenskapsstudier och kritiska naturvetare får komma till tals, finns i Jay A. Labinger & H. M. Collins, *The one culture?: a conversation about science*, Chicago, 2001.

vardagsspråkliga terminologi vi här – innan avhandlingens teorigenomgång – är hänvisade till. Problemet kommer därför här framför allt att karaktäriseras indirekt, som en diffus frånvaro av svar, vilken vi kanske i och för sig redan visste fanns där, men som vi vanligtvis inte bemödar oss om att utforska. Den blinda fläck det är fråga om ligger, menar jag, i området mellan skolan och matematiken. Det är ett område som tycks ligga *off limits* oavsett från vilket håll man närmar sig det.

Ett till synes paradoxalt fenomen rörande detta svårfångade område är att det, snarare än att framstå som huvudsakligen okänt, tvärtom inom såväl det vardagliga som det vetenskapliga tänkandet framstår som *allt för välkänt* för att ytterligare studium skall vara påkallat.[3] Det finns därför risk att de åtta problemområden jag beskriver nedan delvis framstår som handlade de om självklarheter. De är emellertid inte valda på måfå, utan står i nära förbindelse både med den teori som jag strax skall presentera, och med den historiska redogörelse som ger stöd åt denna teori.

Min tanke med problemställningens disposition är följande. De tre första problemområdena (a, b och c) visar på problem som ligger i relativt öppen dag, åtminstone för dem som arbetar med skolmatematik. Först (i problemområde a) tar jag upp frågan om *obligatoriet*: att alla barn och ungdomar måste ta del av undervisning i matematik under sin uppväxt. Detta är något som tas för givet. Samtidigt är det välkänt att matematikens centralitet inom utbildningssystemet *de facto* är ett resultat av svåröverblickbara historiska processer, snarare än rationellt förankrade beslut. Argument för nödvändigheten av en obligatorisk skolmatematik är därför alltid i praktiken *ad hoc*, oavsett om vi tror på dem eller inte. Sedan (i problemområde b) tar jag upp frågan om de mål som skolmatematiken skall leda till, vilka givetvis är välkända för alla som tagit del av grundskolans kurs- och läroplaner. I diskussionen av dessa mål fokuserar jag på deras i allra högsta grad indirekta relation till sådant som att kunna räkna fort och rätt. Faktum är nämligen att matematikens plats som kärnämne i grund- och gymnasieskolan huvudsakligen motiveras med hänvisning till sådant som Sveriges ekonomiska tillväxt och att elever med matematikens hjälp skall bli bättre på att delta aktivt i samhällets demokratiska processer. Jag går sedan (i problemområde c) vidare till frågan om det matematiska stoff som i praktiken skall leda till dessa högre mål och visar hur man inom den

[3] Med detta konstaterande vill jag knyta an till de resonemang den slovenske filosofen Slavoj Žižeks för rörande ”cyniskt förnuft” i *Ideologins sublima objekt*, Göteborg, 2001, s. 37–38. Žižek ger här en förklaring till varför traditionell ideologikritik, som berättar hur det ”egentligen är” i kontrast mot en förment vardagsförståelse, idag tenderar att inte få avsedd politisk verkan, eftersom den kan bemötas med den cyniska kommentaren: ”det vet vi redan”. Problemet är, som Žižek formulerar det, inte längre att vi inte ”vet”, utan att vi ”inte vet vad det är vi vet”, såtillvida att vi inte inser det på det grundläggande sätt som med nödvändighet leder till förändrade handlingsmönster. Mer om detta nedan, s. 62–71.

skolmatematiska diskussionen sällan går in på detaljer varför just *detta* stoff är bäst lämpat att leda till de högre målen.

Problemområde d, ”Kritiken”, fungerar som en övergång mellan två olika sidor av det problem som skall belysas. Här visar jag nämligen att de obesvarade frågor och problem som påvisats i de tidigare problemområdena i själva verket är tämligen välkända inom den skolmatematiska diskussionen. Kort sagt tycks man *veta* att skolmatematiken i allra högsta grad är bristfällig. Detta faktum är centralt för hur det problem skolmatematiken som helhet utgör kan fångas teoretiskt. Genom att det i sig själv innefattar ett stort mått av kritik, måste det nämligen beskrivas som ett självrefererande eller ”splittrat” objekt.

Denna insikt nödvändiggör en förskjutning av fokus mot problemställningens fyra sista problemområden, vilka istället handlar om frågor som inte tycks lika fundamentala som de första, men vars karaktäristiska drag är att de ligger bortom skolmatematikens egen självkritiska blick. Det handlar här (i problemområde e) om skolmatematikens behov av *tid*, det vill säga att det vanligtvis tas för givet att det är svårt att lära sig matematik; (f) att det anses nödvändigt att låta *barn* ägna sig åt matematik; (g) att i möjligaste mån fri, upptäckande, kreativ, verksamhet anses vara bästa vägen mot matematiska kunskaper och slutligen (i problemområde h) att matematiska kunskaper anses ha formen av matematiska *begrepp*.

Problemställningen mynnar ut i konstaterandet att en rad förgivettaganden rörande matematiken fungerar som ett sammanlänkande kitt mellan skolmatematikens i många avseenden ganska speciella undervisningspraktiker och de högre samhälleliga mål som dessa praktiker skall leda till. Teorins uppgift i den här avhandlingen blir sedan att visa på ett *annat* sätt att tänka relationen mellan skolan och matematiken.

Problemområde a: Obligatoriet

> *Behöver alla människor undervisning i matematik under sin uppväxt?*
> Varför är de flesta så övertygade om att svaret på denna fråga är ja?
> Varför är det idag en plikt att ta del av undervisning i matematik?

Filosofen Ivan Illich definierar ”skola” som en åldersspecifik verksamhet, ledd av särskilt utbildade lärare, knuten till en för alla obligatorisk kursplan, som kräver heltidsnärvaro av sina deltagare (dvs. eleverna).[4] Detta är en träffande, om än inte fullständig, beskrivning av den svenska grundskolan. Vi har i Sverige skolplikt, vilket innebär att alla svenska ungdomar måste delta i

[4] Ivan Illich, *Deschooling society*, New York, 1972, s. 25–26.

grundskolans undervisning från det att de fyllt sju år tills dess att de fyllt 16 år;[5] grundskolan är indelad i nio klasser, mellan vilka eleverna flyttas allt eftersom de blir äldre; inom varje klass fördelas tiden mellan ett antal ”ämnen”, varav matematiken är ett och detta i enlighet med en centralt framtagen läroplan; undervisningen i grundskolan skall enligt skollagen i möjligaste mån skötas av särskilt utbildade lärare.[6]

Som en del av detta sociala arrangemang är undervisning i matematik obligatorisk. Alla barn och ungdomar måste gå i skolan. I skolan får de undervisning i matematik.

De ovan nämnda ramarna för skolan i egenskap av social institution tas idag med ytterst få undantag för givna, både i det offentliga samtalet om skolan och inom de pedagogiska och didaktiska forskningsfälten. De tillhör, kan man säga, samhällets *doxa*. Detta innebär inte nödvändigtvis att de tas för givna som i någon mening bevisade. Det betyder snarast att de helt enkelt avförts från listan av frågor som det tycks meningsfullt och intressant att diskutera. Ivan Illich, som jag refererade ovan, menade att skolan (så som han definierade den) borde avvecklas och ersättas av något han kallade *learning webs* inom vilka varken obligatorisk närvaro, hänsyn till elevernas ålder, kursplaner eller särskilt utbildade lärare hade någon plats.[7] Det var på 1970-talet.

Idag antar man att skolan behövs. Man talar om detta behov i termer av *kunskaper* eller *kompetenser*. Ibland används ordet *bildning*.[8] Mer specifikt talar man om behov av kunskaper *i matematik*, *matematisk* kompetens och *matematisk* bildning – vid sidan om motsvarande behov i de övriga av skolans ämnen. Det viktiga i det här sammanhanget är att man talar om skolans nödvändighet i termer av de ämnen skolan kretsar kring. Det är dessa ämnen som man menar att det finns ett behov av, antingen det är eleven som behöver kunskaper, kompetens och bildning, eller samhället som behöver utbildad arbetskraft. Kort sagt är det skolans ämnen som ger skolan dess mening.[9]

---

[5] Utbildningsdepartementet, *Skollag (1985:1100)*, kapitel 3. Regeln har en mängd undantag.
[6] Ibid, 2 kap. 3 §.
[7] Illich, *Deschooling society*, s. 72–116.
[8] Som i titeln till Läroplanskommittén, *Skola för bildning: huvudbetänkande*, SOU 1992:94, Stockholm, 1992.
[9] Detta kan tyckas självklart. Meningsskapandet med hänvisning till ämnen och kunskaper skall emellertid förstås i kontrast mot argument som hänvisar till sådant som bildning, fostran och karaktärsdaning. Dessa argument, klädda i andra ord (jmf. Jonas Qvarsebo & Linköpings Universitet. Tema Barn, *Skolbarnets fostran: enhetsskolan, agan och politiken om barnet 1946–1962*, Linköping, 2006, s. 179), har i och för sig inte försvunnit från det offentliga samtalet, men de har under 1900-talets lopp få stå tillbaka till förmån för de ämnesrelaterade kunskaperna. Signifikativt för det nyare sättet att argumentera är termen *baskunskaper*. Istället för att tala om en för alla gemensam grundläggande bildning och därtill hörande bildningsmedel – som man ofta gjorde under 1800-talet – talar man nu om för alla nödvändiga baskunskaper. Termen baskunskaper har, åtminstone då det gäller baskunskaper i matematik, sitt historiska ursprung i 1950-talets fokus på prestationsmätning, och de därmed avsöndrade

Matematiken är ett av dessa ämnen och den är dessutom ett så kallat kärnämne. Detta innebär att plikten att gå i skolan i stor utsträckning är en plikt att ägna sig åt matematik. Få är emellertid de som uppfattar detta som en betungande plikt. Att alla barn behöver undervisning i matematik tas idag för givet.

”Varför?” är min första fråga. Det har nämligen genomförts en rad undersökningar av individens och samhällets behov av matematikundervisning.[10] Något förenklat kan resultaten sammanfattas på följande sätt: När man frågat människor om de tycker att grundläggande matematikundervisning är viktigt, har man fått positiva svar.[11] Det har inte varit svårt att belägga undervisningsbehov grundade i krav från högre utbildningsinstitutioner.[12] Likaså har det visat sig fullt möjligt att beskriva det människor gör i matematiska termer.[13] Att belägga ett allmänt behov av skolmatematik, utan att ta vägen över vad människor tror och tycker, och utan att knyta an till skolans interna prestationskriterier, har dock visat sig svårt.[14] Och vad gäller

---

”svagpresterande” eleverna. En inte allt för långsökt hypotes med utgångspunkt från denna observation är att förskjutningen från tal om fostran och bildning i allmänhet, till ämnesrelaterade baskunskaper har att göra med att baskunskaper kan *mätas*. I Sverige är det framför allt pedagogen och läroboksförfattaren Wiggo Kilborn som argumenterat för vikten av baskunskaper i matematik, t.ex. i *Vad vet fröken om baskunskaper?: matematik för skolan och samhället*, Stockholm, 1981. Går man något längre tillbaka i tiden, finner man termerna *lågpresterande*, *svagpresterande* och *basfärdigheter* (till skillnad från bas*kunskaper*), se Skolöverstyrelsen, *Basfärdigheter i matematik*, Stockholm, 1973. Problematiken har som sagt sitt ursprung i det kring 1950-talet kraftigt växande intresset för elevernas prestationer, och den viktigaste personen i detta sammanhang var pedagogen Olof Magne, se t.ex. Olof Magne, *En redogörelse för experimentella undersökningar rörande matematikundervisningen för barn i åldern 6–12 år*, Stockholm, 1966. För en diskussion se även Inger M. Andersson, *Läsning och skrivning: en analys av texter för den allmänna läs- och skrivundervisningen 1842–1982*, Umeå, 1986, s. 179–183.

[10] Vad gäller svenska förhållanden tänker jag här framför allt på den undersökning som genomfördes av Urban Dahllöf under slutet av 1950-talet, se Torsten Husén & Urban Dahllöf, *Matematik och modersmålet i skola och yrkesliv: studier av kunskapskrav, kunskapsbehållning och undervisningens uppläggning*, Stockholm, 1960. På 1980-talet genomfördes en liknande undersökning i England som fick relativt stor uppmärksamhet, se W. H. Cockcroft, *Mathematics counts: report of the committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of W.H. Cockcroft*, London, 1982. I USA genomfördes liknande undersökningar under första halvan av 1900-talet. De centrala resultaten redovisas i Guy Mitchell Wilson, *Teaching the new arithmetic*, New York, 1951 [1939] och Guy Mitchell Wilson, *What arithmetic shall we teach?*, Boston, 1926.

[11] I samhället finns en grundmurad tro, inte minst bland elever, på de matematiska studiernas betydelse, se t.ex. Jan Unenge, *Från räkning till matematisk klokskap*, Jönköping, 1991, s. 1. Cockcroftkommitténs rapport inleds på följande sätt: ”There can be no doubt that there is general agreement that every child should study mathematics at school; indeed, the study of mathematics together with that of English, is regarded by most people as being essential [...]”, Cockcroft, *Mathematics counts*, s. 1.

[12] Denna aspekt behandlades utförligt i Dahllöfs undersökning. För en kommentar se Magne, *Experimentella undersökningar rörande matematikundervisningen*, s. 37.

[13] Se Paul Dowling, *The sociology of mathematics education: mathematical myths/pedagogic texts*, London, 1998, s. 5–6, där Cockcroftkommitténs rapport kommenteras.

[14] Detta gäller de undersökningar jag hänvisat till ovan. Det matematikdidaktiska fältet är sedan flera årtionden svårt att överblicka även för forskare inom fältet, och jag har därför tagit

den mer precisa frågan om skolmatematiken, sådan den vid undersökningstillfället *de facto* är, tycks vara människor till gagn i deras liv, har resultaten snarast varit negativa och pekat på behov av reformer – oavsett när undersökningen genomförts.[15]

Sammanfattningsvis kan man säga att det från skolmatematiskt håll, från sekelskiftet 1900 fram till 1970-talet, gjordes en rad försök att med hjälp av empiriska undersökningar omvandla skolmatematikens *doxa* till *episteme*, det vill säga försök att skapa en vetenskaplig motivering till skolmatematikens centrala plats i skolan – men att dessa försök inte kröntes med någon större framgång.[16] Man kunde tänka sig att detta skulle ha lett till en allmän öppenhet inför skolmatematikens utformning och dess plats i samhället. Så blev det emellertid inte.

Problemområde b: Skolmatematikens högre mål

> *Leder undervisning i matematik till sådant som att Sverige får bättre tillväxt, att demokratin stärks och att människor får bättre självförtroende?* Kan undervisning i matematik leda till dessa mål? Finns det belägg för att den leder till dessa mål? Vilken är relationen mellan dessa högre mål och skolans praktiska verksamhet? Varför påstås undervisning i matematik leda till dessa högre mål?

Avståndet är stort från skolmatematikens osäkra förankring, vilken jag redogjorde för ovan, till de anspråk som reses på vad den skolmatematiska undervisningen skall leda till. Två centrala texter i vilka den offentliga ståndpunkten rörande skolmatematiken kommer till uttryck är rapporten *Hög tid för Matematik* som publicerades 2001 av det av regeringen inrättade resurscentrat Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM), samt matematikdelegationens betänkande *Att lyfta matematiken* från 2004.[17] Båda

---

personlig kontakt med en svensk auktoritet på området (Barbro Grevholm), och frågat efter referenser till den typ av resultat det här är frågan om. Hon hänvisade mig till Ole Skovsmose och Mogens Niss. Skovsmoses arbeten kommer att tas upp i det följande (s. 71ff). Vad gäller Niss är det förvisso så att han diskuterar frågan om hur skolmatematiken motiverats genom åren, t.ex. i följande två artiklar: Mogens Niss, *'Hvad er meningen med matematikundervisningen?' Fire artikler. IMFUFA tekst nr 36*, Roskilde, 1980; Mogens Niss, "Mål för matematikundervisningen" i Barbro Grevholm (ed.), *Matematikdidaktik: ett nordiskt perspektiv*, Lund, 2001. Han tillför emellertid inga egna argument för ett behov av obligatorisk matematikundervisning. Till samma argumentredovisande genre hör för övrigt Maria Bjerneby Häll, *Varför undervisning i matematik?: argument för matematik i grundskolan – i läroplaner, läroplansdebatt och hos blivande lärare*, Linköping, 2002.

[15] Detta gäller i synnerhet de tidiga undersökningarna gjorda i USA som redovisas i Wilson, *What arithmetic shall we teach?*

[16] För en diskussion av relationen mellan *doxa* och *episteme*, se Mats Rosengren, *Doxologi: en essä om kunskap*, Åstorp, 2002.

[17] *Hög tid för matematik*, Göteborg, 2001; Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken.*

dessa texter är resultatet av statligt finansierat utredningsarbete och har involverat expertis på högsta nationell nivå. I *Hög tid för Matematik* kan man bland annat läsa följande:

> Företrädare för utbildning, näringsliv och samhälle ger kraftfullt och enstämmigt uttryck för att matematikkunnande är viktigt och att goda, meningsfulla kunskaper är en förutsättning för självförtroende, demokrati, tillväxt och livslångt lärande. Samlade insatser för en långsiktig, hållbar utveckling av matematikundervisningen i skolan både krävs och välkomnas i alla samhällsgrupper och på alla utbildningsnivåer.[18]

Nedanstående citat är ett motsvarande exempel från matematikdelegationens betänkande:

> Matematik är ett mångfasetterat ämne; ett nödvändigt och nyttigt verktyg för utveckling inom naturvetenskap, teknik och ekonomi och ett oundgängligt redskap för ett aktivt medborgarskap.[19]

Dessa två citat exemplifierar ett sätt att skriva om skolmatematikens mål som sedan 1960-talet blivit allt mer typiskt för offentliga utredningar och rapporter.[20] Det typiska består i att ”matematiken”, utan närmare precisering och motivering, kopplas samman med högre mål som kan sägas ha en tämligen indirekt relation till skolmatematiken. Kopplingen mellan matematiken och skolan är med andra ord i stor utsträckning underförstådd.[21]

I citaten ovan kopplas *matematiken* samman med en rad högre värden, men i sina sammanhang utgör dessa värden delar av en argumentation för olika typer av satsningar på *skolan* och skolmatematiken. Man kan därför betrakta matematiken som ett slags mellanled, mellan skolan och det den

---

[18] *Hög tid för matematik*, s. 25.

[19] Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken*, s. 102.

[20] Påståendet är baserat på jämförelser av å ena sidan ett drygt hundratal relativt nutida texter, publicerade av myndigheter som Skolverket, Myndigheten för skolutveckling och Högskoleverket, och å andra sidan tidigare rapporter och artiklar, som t.ex. de artiklar rörande matematikundervisningen i Sverige som publicerades i samband med den internationella matematikkongressen i Rom 1908, skolkommissionens betänkande från 1940-talet, rapporter publicerade i samband med den nya matematiken på 1960-talet, samt den ”översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet” som genomfördes i början av 1980-talet. Man kan, menar jag, observera en brytning i den generationsväxling som föregick den nya matematikens införande under 1960-talet. Några referenser är: Harald Dahlgren, ”Die Mathematik an den Volksschulen und volksschullehrerseminarien Schwedens”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1911; *1946 års skolkommissions betänkande med förslag till riktlinjer för det svenska skolväsendets utveckling*, Stockholm, 1948; Lennart Sandgren, ”Undervisningen i matematik moderniseras”, *PM. Pedagogiska meddelanden från skolöverstyrelsen*, nr 7, 1966; Utbildningsdepartementet, *Matematik i skolan. Översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet*. Ds U 1985:5, Stockholm, 1986.

[21] Angående retoriska underförståddheter, se Anders Sigrell, *Att övertyga mellan raderna: en retorisk studie om underförståddheter i modern politisk argumentation*, Åstorp, 2001.

skall leda till. Istället för att hävda att satsningar behövs för att skolans undervisning (i allmänhet) skall leda till att eleverna får bra självförtroende och kan fungera som aktiva medborgare i ett demokratiskt samhälle, säger man att satsningar behövs för att eleverna skall bibringas matematikkunnande. Detta sägs sedan i sin tur vara en förutsättning för att de högre målen skall kunna nås. Man kunde tänka sig att detta inskjutna mellanled skulle göra relationen mellan skolan och de högre mål som nämns mer problematisk, och väcka frågor rörande vilken matematik eleverna måste lära sig, vad det innebär att "kunna" matematik, på vilket sätt detta kunnande verkligen är en förutsättning för till exempel aktivt medborgarskap, och så vidare. Den retoriska effekten blir emellertid den motsatta.

Det sätt att argumentera som exemplifieras av citaten ovan förutsätter å ena sidan att den skolmatematiska undervisningen leder till kunskaper i matematik och å andra sidan att kunskaper i matematik är en förutsättning för de högre mål som nämns. Termen matematik fungerar därmed som en sorts "nodpunkt" med dubbel funktion.[22] Å ena sidan fungerar den som en sammanfattande beteckning för det mål som skolans mångfacetterade uppsättning undervisningspraktiker skall leda till (matematikkunnande). Å andra sidan fungerar den som en enskild "förutsättning" för en lika mångfacetterad uppsättning högre mål. Det är med andra ord så att säga *genom matematiken* som skolans högre mål skall realiseras. Följande citat från *Att lyfta matematiken* kompletterar de ovanstående som illustration av mitt resonemang:

> Att satsa på matematik är också en investering i medborgarskap och demokrati. Matematik är ett av skolans kärnämnen och att ha tilltro till och förmåga att tolka och påverka sin sociala omvärld är oundgängligt för ett aktivt medborgarskap. Många viktiga samhällsfunktioner utformas med hjälp av matematiska modeller och allt fler ekonomiskt komplexa valsituationer hänskjuts till individen. Ett grundläggande matematikkunnande är därför en förutsättning för en reell, och inte bara formell, demokrati.[23]

I citatets första mening sägs att en satsning på matematik "är" en satsning på "medborgarskap och demokrati". Underförstått är med andra ord att "matematik" leder till eller är en förutsättning för "medborgarskap och demokrati". I nästa mening ställs konstaterandet att matematik är ett av skolans kärnämnen vid sidan om konstaterandet att aktivt medborgarskap förutsätter en förmåga att "tolka och påverka sin sociala omvärld". Syftet med denna mening är (troligtvis) att etablera en orsakskedja, från matematik i egenskap av kärnämne, via förmågan att tolka och påverka sin sociala omvärld, till det aktiva medborgarskapet. Denna underförståddhet, eller

[22] Termen nodpunkt ingår i det begreppsliga ramverk jag presenterar nedan (s. 71ff).
[23] Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken*, s. 165.

entymem som det kallas inom retoriken, får stöd av citatets tredje mening, där det sägs att matematiken spelar en viktig roll för hur samhället ”utformas”, och att man som individ ofta ställs inför ”komplexa valsituationer” i detta samhälle.[24] Den slutsats som på så sätt underbyggs, är att ett ”grundläggande matematikkunnande” är en förutsättning för ”reell [...] demokrati”. Citatets retoriska struktur väcker en rad frågor, som jag dock inte skall gå in på här. Vad jag vill peka på är hur matematik även i detta citat förknippas med en disparat uppsättning fenomen – samhällets struktur (dess ”funktioner”), medborgarskap, förmåga att tolka sin omvärld – vilkas relation till matematiken är tämligen långsökt, och att det är via denna förknippning som den skolmatematiska undervisningen motiveras.[25]

Min fråga är hur kopplingen mellan skolmatematikens undervisningspraktiker och de högre mål som de skall leda till skulle framträda om man så att säga subtraherade det sammanfattande mellanled som matematiken utgör. Denna fråga leder vidare till problemområdena c och d nedan, där jag diskuterar det matematiska stoff skolmatematiken kretsar kring, respektive den kritik som genom åren riktats mot skolmatematiken, vilken, visar det sig, ofta tagit fasta just på den osäkra kopplingen mellan skolans undervisningspraktiker och den matematik de skall förmedla.

Problemområde c: Det matematiska stoffet

> *Kan det matematiska stoff eleverna ägnar sig åt i skolan motiveras med utgångspunkt från de högre mål skolmatematiken skall leda till?* Varför preciseras detta stoff så sällan i offentliga utredningar och rapporter? Varför ägnar sig eleverna idag åt just detta stoff och inte något annat?

I de texter jag citerat ovan, *Hög tid för matematik* och *Att lyfta matematiken*, lyser närmare preciseringar av vad som avses med termen ”matematik” med sin frånvaro. Jag syftar här på preciseringar som knyter an till den matematiska vetenskapens elementära kategorier, som aritmetik, algebra, analys och geometri. Frånvaron kan illustreras med ”algebra” som exempel. I *Hög tid för matematik* förekommer termen över huvud taget inte, i *Att lyfta matematiken* – en rapport där ordet matematik (i olika former) används drygt 1500 gånger – förekommer ”algebra” blott fyra gånger (i samband med sviktande prestationer och som exempel på ett område där det krävs särskilda satsningar).[26]

---

[24] Angående *entymem*, se Sigrell, *Att övertyga mellan raderna*, s. 260–295.
[25] Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken*, s. 165.
[26] Ibid, s. 42, 73 och 137. Termen förekommer även i följande uppräkning: ”tal och operationer, algebra, geometri, mätning samt dataanalys och sannolikhet”, på sidan 69, i ett referat av Läroplanskommittén, *Skola för bildning*.

Vad man kan konstatera när man läser utredningar och rapporter som de ovan nämnda, samt även då man läser grund- och gymnasieskolans kursplaner i matematik, är att ordet matematik används på ett helt annat sätt än ord som algebra. Matematiken utgör, kan man säga, skolmatematikens ansikte utåt. Algebran – för att hålla mig till detta exempel – framställs tvärtom som en intern angelägenhet för skolan. Fenomenet kan beskrivas med gymnasieskolans kursplan som exempel.

Gymnasieskolans kursplan i matematik inleds med en beskrivning av ”ämnets syfte”.[27] Här står att gymnasieskolans utbildning syftar till att eleverna skall bibringas ”kunskaper i matematik”, vilket preciseras som en förmåga att ”kommunicera med matematikens språk och symboler”, att ”kunna analysera, kritiskt bedöma och lösa problem för att självständigt kunna ta ställning i frågor, som är viktiga både för dem själva och samhället, som t.ex. etiska frågor och miljöfrågor” och att ”uppleva glädjen i att utveckla sin matematiska kreativitet och förmåga att lösa problem samt få erfara något av matematikens skönhet och logik”. Som synes används här uteslutande termen ”matematik” som sammanfattning av allt det som skolans undervisning innefattar.

Kursplanens nästa avsnitt har rubriken ”Mål att sträva mot”. Det består av tio meningar som beskriver förmågor som eleverna skall ”utveckla” eller ”fördjupa”. Avsnittet inleds:

> Skolan skall i sin undervisning i matematik sträva efter att eleverna
>
> utvecklar sin tilltro till den egna förmågan att lära sig mera matematik, att tänka matematiskt och att använda matematik i olika situationer,
>
> utvecklar sin förmåga att tolka, förklara och använda matematikens språk, symboler, metoder, begrepp och uttrycksformer [...][28]

Karaktäristiskt i citatet, liksom i resten av beskrivningen av mål att sträva mot, är att innebörden av termen matematik inte preciseras. Termen används tvärtom i sig som en närmare bestämning av ord som ”tänkande”, ”begrepp”, ”symboler”, ”resonemang”, ”kreativitet”, ”modell” i sammanställningar som ”matematiskt tänkande”.

Efter beskrivningen av mål att sträva mot följer ett avsnitt med rubriken ”Ämnets karaktär och uppbyggnad”. Här beskrivs emellertid inte uppbyggnaden av *skolämnet* matematik. Avsnittet handlar istället om matematiken i egenskap av mänsklig skapelse och vilken plats denna skapelse (enligt kursplanen) har i den mänskliga kulturen. Avsnittet inleds:

---

[27] Här och i det följande: Skolverket, *Kursplan i matematik för gymnasieskolan.*
[28] Ibid.

> Matematiken har genom en mångtusenårig utveckling bidragit till det kulturella arvet. Matematiken är en förutsättning för stora delar av samhällets utveckling och den genomsyrar hela samhället, ofta på ett sätt som är osynligt för den ovane betraktaren.[29]

Avsnittet innehåller inte någon precisering av vad matematik är i skolan. Det vänder sig utåt, från skolan, mot samhället. Inte förrän i avsnittets sista stycke används några av den vetenskapliga matematikens termer. Där sägs att matematikämnet är uppbyggt av "aritmetik, algebra, geometri, sannolikhetslära, statistik, funktionslära, trigonometri samt differential- och integralkalkyl med differentialekvationer". Denna uppräkning exemplifierar emellertid exakt det jag menar med att dessa ämnen presenteras som skolans interna angelägenhet. De matematiska termerna ställs nämligen sida vid sida, väl åtskilda från det övriga resonemanget. De hör till skolan och får utåt representeras av matematiken. Det sägs inte hur de enskilda delarna av det man ägnar sig åt i skolan hänger samman med någon särskild del av det som matematikundervisningen skall leda till.[30]

Det problematiska är att de högre mål som den skolmatematiska undervisningen, i rapporter och utredningar samt i kursplaner sägs leda till, på ett så diffust sätt knyts till vad eleverna i praktiken ägnar sig åt i skolan. Genom de exempel jag redovisat hittills i problemställningen, och det resonemang jag fört med utgångspunkt från dessa, hoppas jag ha visat att termen matematik spelar en nyckelroll i denna problematik. Kort sagt talas det väldigt mycket om matematikens egenskaper och betydelse för samhället, men väldigt lite om vad matematik betyder för eleverna i skolan.[31]

Problemområde d: Kritiken

> *Varför utsätts skolmatematiken för så skarp kritik, från dem som själva arbetar med att förändra den?* Varför är det obligatoriskt att ta del av undervisning i matematik, trots att generation efter generation av skolmatematiker under de senaste drygt 150 åren konstaterat att den i praktiken inte leder till de mål man hoppas och vill att den skall leda till?

[29] Ibid.
[30] Kursplanen avslutas med en kort beskrivning av de sju kurser i matematik som ges i gymnasieskolan. Även i dessa beskrivs det matematiska innehållet genom uppräkningar där det inte görs någon åtskillnad mellan de respektive momenten.
[31] Jmf. Nils Christie, *Om skolans inte fanns*, Stockholm, 1972, s. 68.

Skolans inre värld utgör inte någon blind fläck i den skolmatematiska diskursen.[32] Det sätt på vilket skolan och skolmatematiken beskrivs är emellertid närmast motsatt beskrivningarna av matematiken. Man kan läsa att grund- och gymnasieskolans matematikutbildning *de facto* inte leder till de mål som kurs- och läroplaner anger, att matematikundervisningen ofta är intressedödande snarare än intresseväckande, att matematikbetygen bidrar till att reproducera ett hierarkiskt och orättvist samhälle snarare än att ge elever en ökad kompetens att delta aktivt i den demokratiska beslutsprocessen – att många till och med upplever *ångest* inför matematiken.[33] Man konstaterar också, vilket kan tyckas oväntat, att undersökningar visat att de matematikkunskaper eleverna, om allt vill sig väl, får sig till del i skolan kanske inte är fullt så användbara – till exempel i vardagslivet – som det ofta påstås och att matematikens plats i kurs- och läroplaner kanske snarare är ett resultat av tradition än rationellt övervägande. Motiveringarna till varför matematikämnet ges så stort utrymme riskerar, skriver man, att få en ”ad hoc-karaktär”.[34]

[32] Med ”den skolmatematiska diskursen” avses här det som skolmatematikens representanter säger om matematiken och skolan i t.ex. utredningar, rapporter och kursplaner.

[33] Ångest löper som en röd tråd genom den skolmatematiska diskursen. Se t.ex. Lars Gustafsson & Lars Mouwitz, *Vuxna och matematik: ett livsviktigt ämne*, Göteborg, 2002, s. 3, 5, 10, 25, 31, 55, 61, 75, 80, 81, 93 och 111. Den som arbetar med skolmatematik är därför troligtvis van vid sambandet mellan ångest och matematik, inte minst genom den etablerade termen *matematikångest*. Jag tycker dock att det finns anledning att dröja något vid detta sätt att tala om matematiken. I rapporten *Baskunnande i matematik*, publicerad av Myndigheten för skolutveckling, kan man läsa att ”ett misslyckande [med matematiken i skolan] kan skapa en livslång matematikångest och en allmänt negativ självbild”. Längre fram utvecklar man resonemanget med den retoriska frågan: ”Är det så att många vuxnas matematikångest inte är orsakad av matematikämnet som sådant, utan av den traditionsbemängda skolmatematiken?” (Myndigheten För Skolutveckling, *Baskunnande i matematik*, Stockholm, 2003, s. 18, jmf. s. 274ff nedan). Man bör här fråga sig *hur* skolmatematik kan skapa *ångest* – ett synnerligen obehagligt sinnestillstånd som enligt Wikipedia hänger samman med ”en förväntan om en diffus och osäker fara” och ofta åtföljs av en somatisk reaktion bestående i att ”kroppen förbereder sig för att hantera hot, en så kallad krisreaktion” (Wikipedia Contributors, ”Ångest”, 2008). Det är svårt att se hur denna typ av reaktioner skulle kunna orsakas av blott det faktum att skolmatematiken är traditionsbemängd – något den ju tveklöst delar med många andra sociala praktiker vilka inte för den sakens skull ger upphov till ångest. I linje med teoriavsnittet nedan tror jag att man istället måste förklara orsaken till de starka reaktionerna med hänvisning till *objektet*, det vill säga den matematik som skolmatematiken utger sig för att handla om. Inte sällan reagerar elever som ställs inför denna matematik med att utbrista: ”*Jag fattar ingenting!*” Det skrämmande är, menar jag, inte själva bristen på förståelse för det specifika problem det just då är fråga om, eller ens upplevelsen att stå vid utkanten till ett ännu outforskat kunskapsområde. Ångesten hänger istället samman med upplevelsen av att inte kunna se det objekt som skänker mening åt hela den verklighet som skolmatematiken utgör. Utbristandet kunde översättas: ”*Är jag blind?*” inför detta något som du säger finns här framför mina ögon, men som uppenbarligen undgår mig fullständigt, med följdfrågorna ”*Kommer jag alltid att vara blind?*” och ”*Hur kommer det att drabba mig?*” att jag bär på denna defekt, denna frånvaro av inre blick. Tillspetsat kan ångesten sägas ha sitt upphov i elevens närhet till en oerhörd sanning som hotar att upplösa hela den skolmatematiska verkligheten och därför måste försvaras till varje pris (bland annat till priset av enskilda elevers sinnesro), nämligen att det inte finns något där att se. Vad jag menar med detta klargörs i teoriavsnittet nedan, s. 61ff samt även i avhandlingens slutsatser s. 358–367.

Mot den disparata uppsättningen högre mål som man vill och hoppas att skolmatematiken skall leda till, kan ställas en motsvarande uppsättning negativa effekter av skolmatematiken sådan den faktiskt är. I *Att lyfta matematiken* konstateras till exempel att ”Ämnets roll som sorteringsinstrument kan vara en förklaring till ungdomars blockeringar och ångest”.[35] I en annan text från det nationella resurscentrat NCM – rapporten *Hur kan lärare lära* – ställs den pregnanta frågan: ”Hur ska våra elever kunna undvika matematikångest om läraren själv har matematikångest?”[36]

Jag skrev inledningsvis att en distinktion mellan skolmatematik och matematik kommer att spela en viktig roll i den här avhandlingen. Med utgångspunkt från den kritik som riktas mot skolmatematiken kan denna distinktion nu ges en tydligare innebörd. Skolmatematiken, i egenskap av social institution, framträder nämligen i diskussionen huvudsakligen som något problematiskt i behov av förbättringar och reformer. Matematiken å andra sidan, representerar det ideal som skolmatematiken jämförs med. Man kan säga att matematiken, genom sina egenskaper och den roll den sägs spela i samhället, representerar en potential som skulle kunna realiseras i skolan, medan skolmatematiken får framträda först och främst som allt det som gör att potentialen inte realiseras.

Till problembilden hör att denna den skolmatematiska diskursens *retoriska struktur* varit relativt konstant under lång tid. Det är bland annat därför som jag i den här avhandlingen anlägger ett historiskt (snarare än, till exempel, sociologiskt) perspektiv på problematiken. Vad man måste notera är nämligen att det förflutna, den skolmatematiska traditionen, spelar en tämligen specifik roll som del av denna retoriska struktur – och att den gjort detta i nu snart 150 år! Det var, skall jag visa i den historiska redogörelsen, kring mitten av 1800-talet som man i Sverige började göra en åtskillnad mellan den goda matematiken och den bristfälliga skolan.[37] Som exempel kan tas vad läroverksläraren K. R. Kjellberg[38] skriver i *Svensk Läraretidning* 1886 angående tidens undervisning i räkning:

> Under de sista 30 åren hafva i vårt land tre väsentligt olika metoder för räkneundervisningen gjort sig gällande. Ännu i början af 1850-talet erhöll lärjungen för hvarje ny räkneoperation bestämda regler att följa och öfverlämnades så åt sig sjelf att inlära tillämpningen. Någon

---

[34] Gustafsson & Mouwitz, *Vuxna och matematik: ett livsviktigt ämne*, s. 62.

[35] Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken*, s. 102.

[36] Lars Mouwitz, *Hur kan lärare lära?: internationella erfarenheter med fokus på matematikutbildning*, Göteborg, 2001, s. 46.

[37] Se nedan kapitel 7, samt t.ex. Axel Theodor Bergius, ”Utkast till Lärobok i Aritmetiken för skolor i allmänhet och folkskolor i synnerhet, af J. Otterström”, *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare*, 1849.

[38] Att skiljas från en av den heuristiska metodens tidigaste förespråkare i Sverige, A. M. Kjelldal (1796–1831). Se s. 316 nedan. Allmänt kan sägas att biografiska uppgifter rörande personer som figurerar i avhandlingen i de allra flesta fall har hämtats från *Svenskt Biografiskt Lexikon, Nordisk Familjebok* och, då det gäller personer utanför Sverige, Wikipedia.

> förklaring huru reglerna tillkommit, eller hvarföre de blifvit just sådana de voro, gafs aldrig. Resultatet af denna undervisning var gifvet. Så länge lärjungen hågkom reglerna, räknade han både fermt och säkert; men så snart minnet svek honom, var han hjelplös. Någon reproduktion af en bortglömd regel var ju ej tänkbar.
>
> I senare hälften af samma årtionde inträdde en reaktion mot detta förfaringssätt, men såsom vanligt slog man öfver till en motsatt ytterlighet. Nu skulle all disponibel tid användas till förklaringar. Hvarje nytt exempel skulle af hela klassen gemensamt och från början till slut genomgås hevristiskt samt sönderplockas, ända till dess man stannade vid de rena axiomen. Förvärfvandet af färdighet i utförandet af de särskilda räkneoperationerna ansågs ovigtigt. En mellan dessa båda ytterligheter inslagen medelväg, som gifver förklaringen sin vederbörliga tid, men på samma gång tillmäter den tekniska räknefärdigheten tillbörlig vigt, är väl den enda rätta och omfattas nu af det största flertalet lärare. Dock eger den rena och oblandade hevristiken ännu varma förkämpar. Föreläsaren hade flere gånger och från olika läroverk fått mottaga läjungar, hvilka varit rätt drifna i hvad han ville kalla en aritmetisk fraseologi; men huruvida äfven den simplaste beräkning blefve rätt utförd, berodde på en ren slump.[39]

Citatet är hämtat från en tid som på många sätt skiljer sig från vår. För att förstå Kjellbergs poäng måste vi veta att skolmatematiken från 1860-talet till början av 1900-talet förlade sin historiska utgångspunkt till ett antal läroböcker publicerade omkring 1840 i vilka regler och övningsuppgifter spelade huvudrollen, och att företrädare för vad som kallades ”den heuristiska metoden” under 1850- och 1860-talen med viss framgång och i kraftig polemik mot det ”mekaniska” inlärandet av regler, argumenterade för en undervisningsmetod vars främsta kännetecken var att lärjungarna, istället för att lösa övningsuppgifter, i dialog med läraren fick redogöra för hur uppgifterna kunde lösas. Kjellberg menar att undervisningen i matematik (mer exakt talar han om undervisning i räkning) fram till hans egen tid varit föga framgångsrik. Detta tillskriver han de två ovan nämnda undervisningsmetoderna. Viktigt för mitt resonemang är att han även utsträcker förekomsten av dessa enligt honom välkänt felaktiga undervisningsmetoder in i sin egen tid, som förklaring till den samtida undervisningens misslyckande. I kontrast mot denna delvis förflutna verklighet presenterar han ”medelvägen”, vilken ”gifver förklaringen sin vederbörliga tid, men på samma gång tillmäter den tekniska räknefärdigheten tillbörlig vigt”, som det självklart rätta. Denna metod skall, menar han, i framtiden göra att skolmatematiken når resultat i paritet med vad man kan förvänta sig av den.[40] Kjellbergs resonemang kunde kompletteras med följande

---

[39] K. R. Kjellberg, ”Undervisningen i räkning med decimaler”, *Svensk Läraretidning*, 1886, s. 165.

[40] Ett i det närmaste identiskt resonemang rörande heuristik och praktisk färdighet förs för övrigt redan två år tidigare i J. P. Velander, ”Ämnet räkning i folkskolan”, *Svensk Läraretidning*, 1884.

samtida konstaterande: ”Räkneundervisningen har [...] i allmänhet icke burit sådan frukt, man kunde vänta. Orsaken härtill måste sökas i en felaktig metod”.[41] Med andra ord tycktes skolmatematiken vara stadd i förändring på 1880-talet, på ett sätt som har flera likheter med hur situationen framställs idag. Man menade att skolmatematiken inte motsvarade matematiken och behövde reformeras.

Den retoriska figuren av distansering i förhållande till ett ”traditionellt” förflutet är karaktäristisk för skolmatematiken, men den förekommer även i en rad andra sammanhang. Ett välkänt exempel är Foucaults beskrivning av fängelsesystemet i *Övervakning och straff*. Han säger sig förundras över ”att fängelsets misslyckande proklamerats under 150 år och att det ständigt har lett till att det bevarades”.[42] Det finns här flera paralleller till skolmatematiken. För det första i fråga om kritiken, vilken i båda fallen haft ungefär samma form genom åren, samt resulterat i en rad relativt verkningslösa försök till reformer. För det andra tycks fängelset och skolmatematiken ha tagit form ungefär samtidigt – kring 1800-talets mitt. För det tredje finns givetvis en likhet i de båda institutionernas utformning och funktion i samhället – en likhet som är betydligt lättare att uppfatta rörande 1850-talet, än om man jämför dagens skolmatematik med dagens fängelser. Dåtidens framväxande folkskola – om vi begränsar oss till denna del av skolmatematiken – angränsade nämligen till fattigvården, och fattigvården angränsade i sin tur till det framväxande fängelsesystem vilket Foucault beskriver.

Det finns också en klar parallell till psykiatrins historia. I avslutningen till sin avhandling *Myt och manipulation. Radikal psykiatrikritik i svensk offentlig idédebatt 1968-1973* citerar Anna Ohlssons arkitekturhistorikern Anders Åman, som skriver:

> I varje skede av sin historia under de senaste hundrafemtio åren tycks mentalsjukvården just ha lämnat ett barbariskt förflutet bakom sig och blivit på en gång mänskligare och vetenskapligare. En sådan överskattning av samtiden finns på många håll i den offentliga vårdens historia, men här är den mera slående än någon annanstans. Det är som om man ständigt måste intala sig att man tagit avstånd från traditionen och att något alldeles nytt just tagit sin början. Så låter det hos Weigl på 1810-talet, hos Sondén och Huss vid århundradets mitt, hos Schuldheis, Frey Svensson och Gadelius vid sekelskiftet, hos generaldirektör Bror Rexed på 1970-talet.[43]

[41] A.A., ”Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar af K. P. Nordlund”, *Svensk Läraretidning*, 1890.
[42] Michel Foucault, *Övervakning och straff: fängelsets födelse*, Lund, 1987, s. 314–316.
[43] Anders Åman, *Om den offentliga vården: Byggnader och verksamheter vid svenska vårdinstitutioner: En arkitekturhistorisk undersökning*, Stockholm 1976, s. 419, citerad i Anna Ohlsson, *Myt och manipulation. Radikal psykiatrikritik i svensk offentlig idédebatt 1968–1973*, Stockholm, 2008, s. 253.

Även här sägs det vara just 150 år sedan det karaktäristiska avståndstagandet från det förflutna tog sin början och precis som i fråga om skolmatematiken är det en mer mänsklig och mer vetenskaplig framtid man vid varje given tidpunkt tycks närma sig.

Dessa paralleller, mellan skolmatematiken, fängelset och psykiatrin, visar på en viktig aspekt av det som jag i den här avhandlingen vill göra begripligt: Skolmatematiken utgör ett ständigt föremål för kritik – och det på ett liknande sätt som fängelser och psykiatri! Samtidigt får skolmatematiken axla bördan att stärka vårt lands tillväxt, ge eleverna självförtroende och att hjälpa dem att hantera sin vardag. Hur går detta ihop?

Problemområde e: Skolmatematikens behov av tid

> *Varför är matematik ett av de ämnen i skolan som tar mest tid i anspråk?* Är det svårt att lära sig matematik? Vad är det eleverna lär sig under skolans matematiklektioner? Varför tas det för givet att det tar lång tid att lära sig matematik?

Skolmatematiken är utformad med utgångspunkt från antagandet att matematikämnet är svårt och detta antagande bekräftas kontinuerligt, då många elever trots all den tid som ägnas åt matematiken inte lyckas lära sig det som förväntas av dem. Frågan är emellertid vad det är som tar så lång tid att lära sig. Här måste man, liksom i det föregående, observera skillnaden mellan matematikens två ansikten: det som är vänt inåt, mot skolan, respektive det som är vänt mot offentligheten utanför skolan. Utifrån sett är det som tar tid att eleverna skall lära känna matematikens ”stora idéer”, för att, som det heter i gymnasieskolans kursplan, ”självständigt kunna ta ställning i frågor, som är viktiga både för dem själva och samhället”.[44] Bland annat den kritik jag refererat ovan, som riktats mot skolmatematikens praktiska verklighet, talar emellertid för att eleverna ofta har en helt annan bild av vad det är som krävs av dem och detta på goda grunder. I skolan handlar matematikkunskaper nämligen nästan uteslutande om förmågan att lösa (större eller mindre) matematiska problem, vilkas relation till matematikens ”stora idéer” och de viktiga frågor man måste ta ställning till i samhällslivet, är allt annat än självklar.[45] Detta är vad man övar på under lektionerna och det är denna förmåga som genom prov översätts till betyg och examina.

[44] Skolverket, *Kursplan i matematik för gymnasieskolan.*

[45] Se framför allt Gustafsson & Mouwitz, *Vuxna och matematik: ett livsviktigt ämne*, s. 78. Två klassiska problematiserande studier är Jean Lave, *Cognition in practice: mind, mathematics and culture in everyday life*, Cambridge, 1997 [1988] och Valerie Walkerdine, *The mastery of reason: cognitive development and the production of rationality*, London, 1988. Att undervisningen bör fokusera på matematikens stora idéer nämns t.ex. i *Hög tid för matematik*,

Att tid som sägs vara avsedd för till exempel matematikens stora idéer, i praktiken ägnas åt lösande av övningsuppgifter, är emellertid inte det problem jag vill fokusera på här. Min fråga rör istället snarast hur detta faktum kritiseras. Låt mig förklara.

Matematikämnet ägnas relativt mycket tid i skolan. Detta är ett faktum. Lika klart är att denna tid i stor utsträckning ägnas åt sådant som skolmatematikens företrädare menar inte leder till ”rätt” sorts matematikkunnande. Båda dessa aspekter av skolmatematiken är begripliga mot bakgrund av den stora betydelse som prestationsmätningar i matematik har i skolan och samhället. Med tanke på den stora betydelse provresultat har för eleverna och att dessa resultat även utgör det mått med utgångspunkt från vilket lärarnas undervisningsresultat värderas, är det inte förvånande att såväl lärare som elever understöder en undervisning fokuserad på att eleverna skall klara proven så bra som möjligt.

Men förklaringen som anförs till varför matematiken *borde* ta upp mycket tid i skolan är en helt annan. Tidstilldelningen motiveras med hänvisning till att de kunskaper som skolmatematiken *borde* leda till *också* skulle kräva mycket tid. Häri ligger problemet. Argumentationen för skolmatematikens tidstilldelning i skolan är bara giltig under förutsättning att tiden ägnas åt något annat än den i praktiken gör. Min fråga rör relationen mellan dessa två i viss mån helt motsatta motiveringar till skolmatematikens anspråk på elevernas tid, något förenklat: tid för provräkningsövning, respektive tid att förstå matematikens stora idéer.

Problemområde f: Matematiken och barnet

> *Är matematik något för barn?* Har man som vuxen glädje av att som barn ha uppmuntrats att tolka sin omvärld i matematiska termer? Har barn glädje av att vuxna uppmuntrar dem att tolka sin omvärld i matematiska termer? Varför är så många övertygande om att svaret på dessa två frågor är ja? Vilket är sambandet mellan innebörden av ordet matematik då det rör sig om tvååringars matematikanvändning och innebörden av ordet matematik i fråga om vetenskap och teknik?

Frågan om den tid matematiken kräver i skolan hänger samman med frågan om elevernas ålder. Undervisningen i matematik inleds idag i grundskolans första klass, det vill säga när eleverna är ungefär sju år gamla. Även förskolan skall emellertid ”sträva efter att varje barn [...] utvecklar sin förmåga att

---

s. 45; Gustafsson & Mouwitz, *Vuxna och matematik: ett livsviktigt ämne*, s. 7,58, 79 och 80; Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken*, s. 72–73, 86 och 157; Myndigheten För Skolutveckling, *Baskunnande i matematik*, s. 17–18.

upptäcka och använda matematik i meningsfulla sammanhang".[46] Utgångspunkten för denna ambition är en föreställning om att matematikämnet är sådant, att man i unga år kan och bör lägga en *grund* för senare års matematikstudier. I rapporten *Hög tid för matematik* får denna ståndpunkt följande uttryck:

> Intresset för matematik grundläggs mycket tidigt. Små barns positiva attityd till matematiken måste bibehållas och utvecklas under hela studietiden. Barns nyfikna frågor utgår ofta från frågeställningar som kan utvecklas till matematiskt tänkande. Förskolans läroplan syftar till att öka intresset för matematik för de yngsta, då grunderna läggs vad gäller innehåll, inriktning, förhållningssätt, förståelse och attityder.[47]

Det matematikkunnande skolans undervisning skall leda fram till presenteras här som ett resultat av en utveckling, från barnens nyfikna frågor, till matematiskt tänkande. Här finns det emellertid åter anledning att fråga vad som åsyftas med termen "matematik". I *Matematik från början – ett studiematerial* (utarbetat av PRIM-gruppen vid före detta Lärarhögskolan i Stockholm på uppdrag av Myndigheten för skolutveckling) ges bland annat följande exempel på vad det kan innebära att små barn använder matematik:

> Barn i två och ett halvt årsåldern får ta tre russin var. De tar sina russin på olika sätt. Några tar russinen ett efter ett tills de har tagit tre russin. Några andra tar först ett russin och sedan två, alternativt två och sedan ett, utan att räkna. Några tar tre russin direkt.[48]

I och med att detta betraktas som tillämpad matematik, får termen matematik en mycket vid innebörd. Denna utvidgning, som hänger samman med föreställningen att även små barn använder matematik, motsvarar, menar jag, det utsträckande av matematikens betydelse som jag gav exempel på angående skolmatematikens högre mål i problemområde b ovan. En första konsekvens av detta dubbla utsträckande av matematikens räckvidd blir att matematikkunnande framstår som en väsentlig aspekt av människans förmåga att hantera sin omvärld. En andra konsekvens, minst lika viktig i detta sammanhang, är att skolan och skolmatematiken därmed framstår som något som behövs för att bibringa människor denna förmåga. Det är som om man menade att den mänskliga naturen och kulturen vore ofullständiga utan matematiken; som om matematiken fanns där implicit, utan att synas, och att människor – barn som vuxna – skulle ha en ofullständig förståelse av sin omvärld och därmed inte kunna hantera den på ett adekvat sätt, om de inte

[46] Skolverket, *Läroplan för förskolan, Lpfö 98*, s. 9.
[47] *Hög tid för matematik*, s. 3.
[48] Nämnaren TEMA 2000, s. 101, citerad i Astrid Pettersson, *Matematik från början – ett studiematerial*, s. 6.

genom skolmatematikens försorg gjordes uppmärksamma på matematikens ständiga närvaro.[49]

Det råder dock delade meningar, både bland experter och lekmän, rörande matematikens plats i den mänskliga (västerländska) kulturen.[50] Mycket talar dessutom för att barn och vuxna är fullt kapabla att hantera sin vardag utan professionell hjälp med att uppmärksamma matematikens närvaro.[51] En av många frågor är därmed hur det kommer sig att det finns en så utbredd övertygelse om vikten av att även små barn får undervisning i matematik.

Problemområde g: Den skolmatematiska praktiken

> *Varför är skolmatematik i så stor utsträckning synonymt med lösande av övningsuppgifter?* Vad är det man lär sig genom att lösa övningsuppgifter? Varför är denna aspekt av skolmatematiken så konstant över tid?

De allra flesta elever ägnar en stor del av den tid som i skolan är avsatt för matematiska studier till att lösa övningsuppgifter. De läromedel som används understödjer i allmänhet detta övande genom att innehålla stora mängder uppgifter som eleverna kan arbeta med och det är inte svårt att se hur denna undervisningspraktik samspelar med det sätt på vilket man i skolan mäter matematikkunnande: de prov som undervisningen leder fram till innehåller uppgifter som är snarlika de som eleverna ägnat sig åt under lektionerna.

---

[49] Det mest fullständiga uttrycket för detta resonemang finns i Ole Skovsmose, *Towards a philosophy of critical mathematics education*, Dordrecht, 1994. Den hittills mest fullständiga kritiken av samma resonemang finns i Dowling, *The sociology of mathematics education*.

[50] Vetenskapshistorikern Ian Hacking talar i essän ”What mathematics has done to some and only some philosophers” i Timothy Smiley (ed.), *Mathematics and necessity: essays in the history of philosophy*, Oxford, 2000 om ”the enormity of the conclusions [some] philosophers would foist on us on the basis of a relatively minor part of human culture”. Artikeln handlar om hur matematiken, som han kallar det, ”infekterat” en rad filosofer, och fått dem att komma till helt galna resultat. Det är lockande att föra över resonemanget till skolans värld och tala om infekterade pedagoger. Det vore inte svårt att hitta kandidater: Herbart, Pestalozzi och Fröbel, för att inte tala om Piaget, tillskrev alla matematiken en minst lika fantastisk betydelse som Hackings filosofer (Platon, Leibniz och Wittgenstein). Mot bakgrund av Hackings analys framstår det som minst sagt tveksamt huruvida barn har någon glädje av att lära sig ”upptäcka” matematiken i sin omvärld.

[51] Här måste Valerie Walkerdines undersökning från slutet av 1980-talet åter nämnas, där hon visar att de ”matematiska” termer som välmenande föräldrar och lärare försöker få barnen att använda på ”rätt sätt”, i själva verket har en annan mening än den matematiska i de sammanhang som barnen är en del av utanför skolan, och att medvetandegörandet av den ”riktiga” innebörden därför snarast trasslar till det för barnen (Walkerdine, *The mastery of reason).* Se även Dowling, *The sociology of mathematics education*, s. 7–11, som visar hur skolmatematiken, som han kallar det, ”objektifierar” eleverna genom att göra gällande att de, i den mån de inte lyckas med matematiken i skolan, inte heller klarar av att hantera sin vardag.

Denna aspekt av skolmatematiken är, liksom många andra, föremål för kritik. I *Att lyfta matematiken* kan man läsa att ”den växande trenden av 'tyst räkning' i svensk skola är skadlig”.[52] Matematikdelegationen konstaterar även att det myckna övningsräknandet hänger samman med det faktum att matematikkunskaper regelmässigt mäts med ”traditionella prov”.[53] Liknande kritik löper som en röd tråd genom andra rapporter och utredningar.[54]

Det är emellertid sällan fråga om något fullständigt avståndstagande. Som jag skall visa i problemområde h nedan anses tvärtom elevernas praktiska arbete med matematiska problem utgöra en förutsättning för att de skall nå fram till det eftersträvade matematikkunnandet. I *Hög tid för matematik* presenteras en vision om en framtida ideal matematikutbildning. Den består bland annat i att eleverna engagerar sig ”i komplicerade matematikuppgifter som noga utvalts av lärarna”. Skillnaden jämfört med den kritiserade tysta räkningen består huvudsakligen i att lösandet av uppgifter i visionen kombineras med att eleverna också talar, med varandra och med läraren, om hur de resonerar och att de är intresserade och engagerade i det de gör.[55]

Det problematiska här utgör egentligen bara en annan sida av den problematik rörande tid som jag beskrev i punkt e ovan. Det är ett faktum att eleverna i stor utsträckning ägnar sig åt övningsräkning. Detta är begripligt mot bakgrund av den stora betydelse som tillmäts prestationsmätningar, eftersom övningsräkning förmodligen är det mest effektiva sättet att förbereda sig för dessa mätningar. Skolmatematikens företrädare är överens om att denna praktik inte leder till de ”rätta” kunskaperna. Samtidigt involverar emellertid även den praktik som anses vara ”rätt” ett övande som på många punkter *liknar* förberedelser inför prov. De läroböcker, fyllda av övningsuppgifter, som lånar sig till det oönskade tysta räknandet, är ofta uppställda med utgångspunkt från didaktikens senaste landvinningar. Det som kritiseras är med andra ord inte övandet i sig, utan att det sker på fel sätt. Kritiken riktas inte så mycket mot läroböckernas utformning, som mot det sätt på vilket läroböckerna används. På ett liknande sätt som anspråket på tid i problemområde e ovan framstår därmed de läroböcker som används (och som den felaktiga praktiken förutsätter) som motiverade, men bara i kombination med erkännandet av att det sätt på vilket de används måste förändras.

[52] Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken*, s. 15.
[53] Ibid, s. 143.
[54] Se t.ex. Göran Emanuelsson, *Svårt att lära – lätt att undervisa?: om kompetensutvecklingsinsatser för lärare i matematik 1965–2000*, Göteborg, 2001, s. 140; Görel Sterner & Ingvar Lundberg, *Läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik*, Göteborg, 2002, s. 22; Skolverket, *Lusten att lära – med fokus på matematik: nationella kvalitetsgranskningar 2001–2002*, Stockholm, 2003, s. 44; Irene Rönnberg & Lennart Rönnberg, *Minoritetselever och matematikutbildning: en litteraturöversikt*, Stockholm, 2001, s. 43.
[55] *Hög tid för matematik*, s. 46.

Problemområde h: Den pedagogiska teorin

> *Är matematikkunnande begreppsligt?* Vad är matematisk begreppsbildning? Vad är ett matematiskt begrepp? Vad är ett talbegrepp? Vad är begreppslig förståelse? Varför talar man om matematikundervisning i termer av begrepp? Vad får detta sätt att tänka kring skolan och matematiken för konsekvenser?

Ett grundläggande antagande inom skolmatematiken är att kunskaper i matematik har formen av *begrepp*.[56] Man talar om *begreppsbildning* och formandet av *talbegrepp*. Den mer eller mindre explicit uttryckta idén är att eleverna, som ett resultat av den skolmatematiska undervisningen, skall bilda sig en inre representation av (en del av) den begreppsliga struktur som den vetenskapliga matematiken utgör. Elevernas praktiska verksamhet, reglerad enligt skolmatematikens principer, skall leda till att något immateriellt bildas, som i någon mening speglar den universella matematiken. Jag kommer här att kalla denna idé för *bildningstänkandet* och ibland mer exakt det *skolmatematiska bildningstänkandet*.[57]

Bildningstänkandets betydelse för skolmatematiken kan inte överskattas. Här måste emellertid poängteras att det jag syftar på med termen ”bildningstänkandet” måste skiljas från den tolkning som idag vanligen görs av termen ”bildning”. Den pedagogiska idén om bildning var ursprungligen nära förbunden med idéer om oförutsägbarhet, frihet och fritt skapande. Den

[56] För en aktuell allmän problematisering se Roger Säljö, ”Begreppsbildning som pedagogisk drog”, *Utbildning och demokrati*, vol. 4, 1995.

[57] Jmf. Richard Rorty, *Philosophy and the mirror of nature*, Princeton, N.J., 1980, s. 22ff. I viss utsträckning kan det problem som jag försöker lösa i avhandlingen förstås som en effekt av mötet mellan skolmatematikens förgivettaganden rörande matematikens natur, och den förståelse av matematiken som under 1900-talets lopp vuxit fram inom en rad vetenskapliga fält som skolan och dess vetenskaper uppenbarligen inte har någon kontakt med. Något förenklat syftar jag på de idéer vars ursprung kan spåras till bland andra Peirce, James och Deweys pragmatism kring sekelskiftet 1900 och som Rorty leder vidare i *Philosophy and the mirror of Nature*. Med utgångspunkt från dessa filosofer måste man dra slutsatsen att det inte är särskilt fruktbart att förstå lärande i matematik i termer av begreppsbildning. Denna slutsats har på senare år, sedan 1980-talet, fått stöd av en rad vetenskapssociologiska och vetenskapshistoriska undersökningar vilka (mer eller mindre direkt) nyanserat den gängse bilden av matematiken som en neutral och objektiv begreppslig struktur vilken ”används” inom vetenskap och teknik. En generell slutsats som ofta dras inom dessa studier, är att teorier – t.ex. matematiska teorier – alltid måste förstås i relation till de praktiska sammanhang inom vilka de ”fungerar”, se t.ex. Ian Hacking, *Representing and intervening: introductory topics in the philosophy of natural science*, Cambridge, 1983 och Ian Hacking, ”The self-vindication of the laboratory sciences” i Andrew Pickering (ed.), *Science as practice and culture*, Chicago, 1992. Bildningstänkandets matematiska begrepp är tvärtom något eleverna har i huvudet, och, tänker man sig, bär med sig från skolan, ut i livet. För övrigt är det här viktigt att observera skillnaden mellan bildningstänkandet och det välkända och ofta kritiserade tänkandet kring kunskap som innebär att kunskaper, eller ännu tydligare kunskaps*bitar*, skulle föras över från läraren och så att säga in i elevens huvud. Att detta tänkande givetvis också träffas av kritiken saknar i sammanhanget betydelse, eftersom det knappast torde ha några försvarare och inte heller spelat någon roll i skolmatematikens historia annat än just som tacksamt föremål för kritik.

framträdde i sin nyhumanistiska version som en reaktion mot det slags skolning som förutsätter att målet för människors utveckling är på förhand givet.[58] Så förstås bildningsidén i stor utsträckning även idag och den tycks därför väsensskild från matematisk begreppsbildning. Faktum är emellertid att det i fråga om det specifika fall som skolmatematiken och dess historia utgör, inte är möjligt att dra någon skarp gräns mellan bildning i allmänhet och bildning i egenskap av begreppsbildning. Låt mig, för att undvika missförstånd rörande denna centrala aspekt av skolmatematiken, i någon mån föregripa den historiska redogörelsen genom att redan här säga något om hur jag förstår bildningstänkandets roll i skolmatematikens historia. Redan långt innan nyhumanismen bredde ut sig mot slutet av 1700-talet, hade matematiska studier, och i synnerhet arbete med euklidisk geometri, kommit att betraktas som ett sätt att "träna tänkandet". När Humboldt och andra utvecklade sina resonemang kring bildning – som bekant huvudsakligen med hänvisning till de klassiska språken – är det därför lätt att förstå varför även matematiken kom att betraktas som ett (i och för sig underordnat) bildningsmedel. I praktiken kom detta, enligt min mening ganska märkliga, likställande av matematiken och de klassiska språken i egenskap av bildningsmedel att spela en viktig roll i det tidiga 1800-talets argumentation för värdet av matematiska studier.[59] Synen på matematik som bildningsmedel kom också, menar jag, att spela en avgörande roll i formandet av de för skolmatematiken så karaktäristiska undervisningspraktikerna, med fokus på kreativt skapande och en förhoppning om att eleverna skall "upptäcka" matematikens sanningar på egen hand. Under merparten av 1800-talet förstod man dessa undervisningspraktiker som bildande i det nyhumanistiska bildningstänkandets bemärkelse. Kring sekelskiftet 1900 förlorade emellertid detta bildningstänkande mark.[60] Min tes är att detta resulterade i en *omtolkning* av de skolmatematiska undervisningspraktikerna. Från att i dem ha sett matematiken som en verkande kraft (utan specifik riktning) – på samma sätt som till exempel Humboldt förstod de klassiska språken – kom man se dem som ledandes till matematiska begrepp. Vad man idag kanske har svårt att förstå och som gör att man vill dra en skarp gräns mellan begreppsbildning och bildning i allmänhet, är att man, då matematiken sågs som ett bildningsmedel på samma sätt som de klassiska språken, uppfattade matematiken som en så central aspekt av en allmän högre sanning att det mål de matematiska studierna ansågs leda mot (men givetvis aldrig ända fram till)

[58] Donald Broady, "Bildningstraditioner och läroplaner" i Läroplanskommittén (ed.), *Skola för bildning: huvudbetänkande*, SOU 1992:94, Stockholm, 1992. En central text inom denna tradition är Wilhelm Von Humboldts "Ueber die innere und äußere Organisation der höheren wissenschaftlichen Anstalten in Berlin" [1810] som hittas i Andreas Flitner & Klaus Giel (eds.), *Werke in fünf Bänden. 4, Schriften zur Politik und zum Bildungswesen*, Darmstadt, 1982, s. 255-266.
[59] Se Lars Niléhn, *Nyhumanism och medborgarfostran: åsikter om läroverkets målsättning 1820–1880*, Lund, 1975 samt kapitel 10 nedan.
[60] Här och rörande det fortsatte resonemanget, jmf. s. 370f nedan.

framstod som bildning i allmänhet. Man talade om detta mål i termer av begrepp – med vars hjälp sanningen i allmänhet kunde begripas – och det fanns ingen anledning att se dem som specifikt matematiska begrepp. Det var först när idén om en allmän högre sanning gick förlorad kring sekelskiftet 1900 som de matematiska studiernas mål började framträda som ett partikulärt *matematiskt* mål. Då blev det också nödvändigt att tala om bildandet av specifikt *matematiska* begrepp.

Låt mig nu mot bakgrund av denna historiska exkurs återgå till dagens skolmatematik. Det är i termer av matematiska begrepp och begreppsbildning som skolmatematiken kritiseras och problematiseras, och det är riktig matematisk begreppsbildning som utgör målet för de satsningar på matematiken som föreslås i offentliga utredningar och rapporter.[61] Bildningstänkandet hänger samman med antagandet att matematiska kunskaper är något som växer fram successivt under lång tid, men bara under de rätta förutsättningarna. De kan, menar man, inte bildas genom att man läser i en bok eller genom att någon säger ”hur man gör”. Istället antas de vara något som växer fram under det att man arbetar aktivt, gärna på ett sätt som involverar både kroppen och tänkandet, med något man är intresserad av, under det att man reflekterar över och talar med andra människor om det man gör. Begreppsbildning antas kort sagt vara en kreativ, skapande, verksamhet, som först och främst utgår från eleven själv.[62]

Det är, kan man säga, detta sätt att tänka kring lärande i matematik som får skolmatematiken framstå som en så komplex verksamhet. Det är på grund av den matematiska begreppsbildningens komplicerade natur som skolmatematiken måste ta så stor tid i anspråk, det är därför det behövs särskilt utbildade lärare och det är även denna komplexitet som tycks fordra klargörande matematikdidaktisk forskning.[63] Det är begreppsbildningens komplikationer som konstituerar den hårfina skillnaden mellan det eleverna i praktiken ägnar sig åt i skolan och det de borde ägna sig åt. Det är med utgångspunkt från den matematiska begreppsbildningens natur som det framstår som självklart att även små barn behöver lära känna matematiken.

Bildningstänkandet utgör en länk mellan skolmatematiken och matematiken. Matematiken framställs som en strukturerad uppsättning begrepp; skolmatematiken som den strukturerade verksamhet genom vilken eleverna skall fås att bilda dessa begrepp. De matematiska begreppen motsvarar på ett teoretiskt plan matematikens plats i den skolmatematiska retoriken, som inskjutet mellanled. Istället för att skolans praktiker skall

---

[61] Till exempel Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken*, s. 18.

[62] Stycket är ett försök till syntes av den nutida skolmatematiska diskussionen rörande begreppsbildning.

[63] Slutsatsen att lärande i matematik är något mycket komplicerat rubriceras för övrigt i Mogens Niss, ”Den matematikdidaktiska forskningens karaktär och status” i Barbro Grevholm (ed.), *Matematikdidaktik: ett nordiskt perspektiv*, Lund, 2001, s. 34, som ett av den matematikdidaktiska forskningens viktigaste resultat. Jmf. Illich, *Deschooling society*, s. 4–5.

direkt likna de andra praktiker den utgör en förberedelse för, kan praktikerna genom bildningstänkandet ses som utformade för att leda till matematiska begrepp, vilka sedan skall användas utanför skolan. Bildningstänkandet genererar därmed en förskjutning av den enkla idén att övning ger färdighet. Det etablerar en länk mellan två väsensskilda praktiker: sådana där man lär sig, vilka är speciellt utformade för begreppsbildning, och andra, där begreppen kommer till användning. Den fundamentala fråga som måste besvaras är: ”Varför har detta tänkesätt en så central ställning inom skolmatematiken?”

3. Teori

Teorins uppgift i den här avhandlingen är att visa ett nytt sätt att tänka relationen mellan skolan och matematiken. I problemställningen ovan har jag försökt påvisa att det finns ett behov av ett sådant nytt tänkesätt. Här skall jag börja med att ett utveckla och precisera detta behov, genom att redogöra för en del tidigare forskning med ambitioner liknande min egen. Jag knyter i denna redogörelse framför allt an till problemställningens diskussion av det faktum att skolmatematiken under lång tid varit föremål för skarp självkritik. Vad jag kommer fram till är kort sagt att det inte finns så mycket att tillföra vad gäller kritik av skolan och skolmatematiken: alla vet redan hur illa ställt det är. Vägen framåt hittar jag istället i ett antal filosofer och samhällsvetare som gjort detta tillstånd av kritisk medvetenhet till föremål för teoretisk reflektion. Från dessa hämtar jag några tankefigurer och en terminologi. I avsnittet ”Från matematik i skolan till skolans matematik” utvecklar jag sedan ett delvis eget sätt att använda denna terminologi som passar det specifika problem som relationen mellan skolan och matematiken utgör.

Utgångspunkter

Utgångspunkt skall här förstås som den punkt varifrån mitt eget teoretiska arbete utgår. Detta i motsats till själva teorin, det vill säga den punkt varifrån det empiriska materialet betraktas. Utgångspunkten är den punkt dit tidigare teorier leder. Om jag i den ovanstående problemställningen ringade in ett problem, så visar jag här hur tidigare sätt att gripa sig an detta problem medför en förskjutning som måste tas i beaktande om en ny teori skall träffa problemet där det verkligen befinner sig.

Vad det framför allt handlar om är, som jag redan nämnt flera gånger, att det finns en rad problem rörande skolmatematiken som är välkända. Väsentligt är emellertid att detta inte innebär att det går att bortse från dem. Teorin måste ta med både själva problemen, och att de är kända, i beräkningarna. Här skall jag därför ge några exempel på tidigare formuleringar av skolmatematikens problem. Avsnittet är med andra ord en redovisning av en del av den tidigare forskning som lett fram till min teoretiska position.[1]

[1] Denna redovisning kompletteras nedan (s. 81ff).

Ambitionen är emellertid inte att gå igenom allt och med denna överblick som utgångspunkt urskilja en lucka som måste fyllas. Syftet är snarast att förklara varför en teori om skolan och matematiken inte kan ta sig an skolmatematikens problem på ett så direkt sätt som man kanske hade hoppats.

Skolan och samhället

Genom sin läroplan presenterar den svenska skolan sig som en förmedlare av de värden samhället håller högst och som den plats där det uppväxande släktet får de kunskaper de behöver för att fungera i samhället som vuxna. Sedan åtminstone 30 år vet vi att denna bild är på ett avgörande sätt ofullständig. Jag skall här fatta mig kort, genom att fokusera på tre aspekter av vad den samhällsvetenskapliga forskningen visat att skolan är utöver det som sägs i läroplanen.

För det första måste skolan förstås som en förvaringsplats för ungdomar. Skolan blev obligatorisk, och utsträcktes i tiden, i samma takt som samhället omvandlades på ett sådant sätt att allt färre behövde delta i produktionen av varor och tjänster och ett växande behov av konsumtion istället gjorde sig gällande.[2] För det andra står det klart att utbildningssystemet fyller en viktig funktion i reproduktionen av samhällets hierarkiska struktur. Inte bara så att skolan fördelar individer över utbildningsbanor på ett sätt som överensstämmer med deras sociala härkomst – det står också klart att den bidrar till att få denna fördelningsmekanism att framstå som legitim.[3] För det tredje är det knappast någon som längre tvivlar på att skolan också fyller en viktig funktion för att disciplinera det uppväxande släktet, det vill säga att den pådyvlar dem en uppsättning värderingar och handlingsmönster som inte alltid tjänar deras egna intressen.[4] Dessa egenskaper hos skolan är välkända och det är därför få som överraskas av att även skolmatematiken bidrar till att hålla eleverna sysselsatta, att sortera dem, och att disciplinera dem.

Det sätt på vilket den skolmatematiska diskursen, inklusive den matematikdidaktiska forskningen, så att säga absorberat detta vetande, väcker

[2] Till exempel Christie, *Om skolans inte fanns* och Lars Petterson, *Frihet, jämlikhet, egendom och Bentham*, Uppsala, 1992: "Grundskolan fungerar troligen ännu i dag i första hand som en inrättning för förvaring och utfordring av barn och ungdomar, som man varken vill ha på gatan eller arbetsmarknaden [...]"

[3] Här är den självklara referensen den franske sociologen Pierre Bourdieu, t.ex. *The state nobility: elite schools in the field of power*, Cambridge, 1996.

[4] Även här torde Bourdieu kunna anföras som referens utan större risk för missförstånd. Mitt syfte är inte på något sätt att reducera Bourdieu till reproduktion och disciplinering eller att på ett motsvarande sätt reducera *skolan* till reproduktion och disciplinering. Jag vill redovisa min teoretiska utgångspunkter såtillvida att detta är vad jag tar för givet som vetenskapligt förankrade självklarheter i fråga om skolan. Givetvis finns det många som menar att Bourdieu är allt för deterministisk och att skolan inte alls kan förstås på det sätt han föreslår. Jag hör helt enkelt inte till dem. Däremot menar jag att Bourdieus teoretiska ramverk inte räcker till för att förstå det specifika problem som skolmatematiken utgör.

emellertid nya frågor. I denna absorption ligger den förskjutning man måste beakta för att komma vidare. Enligt mitt synsätt vore det alltså meningslöst att ägna forskning åt att ytterligare belägga blott skolmatematikens funktion som till exempel reproduktionsinstrument. Det är dags att gå vidare, men samtidigt – och detta är högst väsentligt – inte förlora de tidigare resultaten ur sikte.

Mogens Niss, en av den nordiska matematikdidaktikens auktoriteter, konstaterar att den matematikdidaktiska forskningens fokus under 1980- och 1990-talet förskjutits bort från frågor rörande skolmatematikens rättfärdigande och mål, mot ”lärande” och ”de enskilda elevernas situation”.[5] Exakt denna forskningens förskjutning, mot undervisningspraktikens och lärandets detaljer, bekräftas av den franske sociologen Franck Poupeau. Han visar hur just de frågor jag nämnt ovan förs till det förflutna genom en beskrivning av den pedagogiska[6] vetenskapens förändringar i termer av en utveckling genom olika stadier. I detta stadietänkande likställs det senaste med det i en vetenskaplig bemärkelse bästa, utan att man för den sakens skull menar att de tidigare resultaten var ”fel”.[7] Istället har man tagit dem till sig, men med övertygelsen om att fortsatta vetenskapliga ansträngningar måste ha ett annat fokus. Rapporter som *Hög tid för matematik* och *Att lyfta matematiken* är, som jag visade ovan, fyllda av kritik mot skolmatematiken.[8] Men vad som föreslås är alltså inte fortsatt kritisk forskning. Sakernas miserabla tillstånd har ju redan uppenbarats. Forskningen skall istället, med den kritiska insikten som utgångspunkt, verka för att förbättra.

Detta innebär emellertid, menar jag, just att förlora de tidigare resultaten ur sikte. Man har ”gått vidare” och lämnat dem bakom sig, men inte på rätt sätt. Det hela har gått för fort – man tror att man vet, men likväl fortsätter man som om man inte visste. För att konkretisera, kan man fråga sig vari meningen ligger med att försöka hjälpa de sämst lottade eleverna till bättre betyg, om själva betygen som sådana blir socialt verksamma endast genom att gallra bort en viss andel av eleverna? Varje insats fokuserad på den enskilde eleven och hans eller hennes situation är ju dömd att misslyckas, så länge insatsernas mål (till exempel betyg) definieras med utgångspunkt från det

[5] Niss, ”Mål för matematikundervisningen”, s. 86–87.

[6] Mer specifikt talar Poupeau om utbildningssociologi, snarare än pedagogik eller för den delen matematikdidaktik, men den förskjutning han beskriver är så allmän att resonemanget är relevant även i fråga om den svenska matematikdidaktiken.

[7] Franck Poupeau, *Une sociologie d'état: l'école et ses experts en France*, Paris, 2003, s. 25–30. Liknande resonemang känns igen i matematikdidaktisk forskning, jmf. Paul Ernest, *The philosophy of mathematics education*, London, 1991, s. 250: ”[Bourdieu and Passeron] are too deterministic in shackling education to the conditions of production. In this, they do not allow for the exploitation of contradictory forces at work in the system, nor for human agency or resistance from within”, och Stieg Mellin-Olsen, *The politics of mathematics education*, Dordrecht, 1987, s. 193: ”Today we can see how Althusser, Bourdieu and the rest of the social 'reproductionists' of the 1965–1975 period failed to develop theories for Action.”

[8] Se ovan, s. 29.

utbildningssystem vars sociala funktion bland andra Bourdieu beskriver. Denna typ av pedagogisk forskning har inte förstått implikationerna av de resultat den tror sig överskrida.

I de följande tre punkterna skall jag redogöra för kritisk forskning mer specifikt knuten till skolmatematiken. Precis som i fråga om samhällsvetenskaplig forskning i allmänhet rör det sig här om resultat som måste *tas in*, på ett grundligt sätt, för att teoretiska framsteg skall vara möjliga. Det skall visa sig att det är en hel del som måste tas in.

Skolans matematikkunnande

Jag skall börja med den amerikanska socialantropologen Jean Lave och hennes *Cognition in practice* från 1988.[9] I denna bok gör hon rent hus med skolans förhoppningar om så kallad *transfer*, det vill säga idén att lärande i skolan kan resultera i kunskaper som sedan kan användas utanför skolan. Hon använder matematikkunnande som exempel.

Laves argument har två komponenter. Den första handlar om vad som är fel, den andra om vad som är rätt. Fel är, menar hon, de antaganden rörande kunskaper som, fram till 1980-talet, i allmänhet låg till grund för forskning om skolan och dess relation till samhället. Vad man antog var att det praktiska arbetet i skolan, genom en sorts abstraktionsprocess, resulterar i kunskaper, som sedan, genom transfer, kan vara eleverna till nytta utanför skolan.[10] Genom att gå igenom de resultat man kommit fram till inom den forskning som studerat transfer, visar hon att någon sådan i mycket liten utsträckning kunnat påvisas.[11] I synnerhet gäller detta då man, snarare än att jämföra ett experiment med ett annat, försökt belägga transfer från skolliknande omständigheter till människors tillvaro utanför skolan. Det har alltså varit svårt att påvisa en korrelation mellan prestationer som kan mätas exakt, till exempel resultat på skriftliga prov i matematik, och människors förmåga att lösa vardagslivets ofta oprecist avgränsade problem.

Detta har emellertid inte lett till något allvarligt ifrågasättande av själva idén om transfer. Istället har man, visar Lave, till exempel ursäktat sig genom att påpeka hur komplicerat det fenomen man studerar uppenbarligen är.[12]

Rätt är, menar hon, att kunskaper alltid är knutna till specifika sammanhang. Detta visar Lave med hänvisning till en egen undersökning av hur människor i sin vardag hanterar de situationer som skolan och vetenskapen antar kräver den typ av kunskaper i matematik som skolan förmedlar. Det entydiga resultatet av hennes undersökning är att människor

---

[9] Lave, *Cognition in practice.*
[10] Ibid, s. 6 och 89.
[11] Ibid, s. 39.
[12] Jmf. Illich, *Deschooling society,* s. 8.

klarar av att hantera sin vardag, oberoende av huruvida de lyckats med matematiken i skolan eller inte.[13]

Laves bok innehåller emellertid mycket mer än detta resultat. En av hennes grundläggande frågor är hur det kommer sig att transfertänkandet kunnat få och behålla en så stark ställning, trots att det inte fått något stöd av de vetenskapliga undersökningar som genomförts. Hennes förklaring ligger i linje med de resonemang jag strax skall utveckla. För det första hänvisar hon till hur idén om transfer är förbunden med en föreställning om vetenskapligt tänkande.[14] Detta tänkande skulle vara knutet till vetenskapens olika kunskapsområden, och tillämpbart i människors vardag, på ungefär samma sätt som vetenskapliga teorier tillämpas på den fysiska verkligheten. Med hänvisning till vetenskapssociologi menar hon att denna bild av vetenskaplig verksamhet är lika felaktig som den motsvarande bilden av människors vardag.[15]

För det andra, och här ligger Lave synnerligen nära min egen ståndpunkt, visar Lave hur skolan och vetenskapen tillsammans, genom att vara strukturerade med utgångspunkt från *kunskapsområden* (skolans ”ämnen”), bidrar till att få verkligheten att framstå som om denna indelning i domäner hörde till verkligheten själv.[16] Detta alltså snarare än att se skolans och vetenskapens indelningar som ett socialt konstituerat tolkningsraster. Verkligheten tycks *bestå* av till exempel matematik, fysik, biologi och kemi, och därmed med nödvändighet bemästras just genom kunskaper inom dessa olika områden. Denna verklighetsuppfattning sätter ramarna för såväl det vetenskapliga som det vardagliga tänkandet kring skolans relation till världen utanför skolan. Det är bara, menar Lave, genom att dela in verkligheten på ett annat sätt, och då inte göra någon kvalitativ skillnad mellan skolans, vetenskapens och vardagens praktiker, som vi kan förstå relationen mellan skolan och människors vardag.

I en bok publicerad några år senare, drar Lave konsekvenserna av resonemangen i *Cognition in practice* och lämnar därmed helt det problematiska ordet *cognition*. I *Situated learning, Legitimate peripheral participation* skriver hon:

> The notion of situated learning now appears to be a transitory concept, a bridge, between a view according to which cognitive processes (and thus learning) are primary and a view according to which social practice is the primary, generative phenomenon, and learning is one of its characteristics.[17]

[13] Lave, *Cognition in practice*, s. 56–58.
[14] Ibid, s. 76–87.
[15] Ibid, s. 82.
[16] Jag redogör för min egen ståndpunkt i denna fråga på s. 76ff nedan.
[17] Jean Lave & Etienne Wenger, *Situated learning: legitimate peripheral participation*, Cambridge, 1991, s. 34.

Det är alltså bandet mellan lärande och kunskaper som måste överges, och mer specifikt idén om kunskaper i ämnen som matematik, vilka skär tvärs igenom livets många praktiker. I den senare boken ser hon istället lärande som alltid knutet till ett visst socialt sammanhang: I början kan man inte delta. Allt eftersom tiden går lär man sig, om allt vill sig väl, ”spelets regler”, och man kan då delta i allt större utsträckning och göra saker som tidigare inte var möjliga. Uppenbarligen har man då lärt sig något och det är knappast en lätt sak att förstå hur detta gick till. Laves utgångspunkt i denna senare bok, är dock att termen ”kunskaper” snarare är till hinder än nytta för att förstå detta lärande.[18]

Skolans barn

Faktum är att kritiken mot kunskaper som något abstrakt som tar form i elevernas huvuden var föremål för skarp kritik redan under andra halvan av 1800-talet och i synnerhet under 1900-talets första decennier. En mängd kritisk forskning från denna tid, med samma entydigt negativa resultat som Laves, refereras i G. M. Wilsons *Teaching the new arithmetic* från 1939.[19] I kritikens fokus stod vad man i Sverige ofta kallar *benämnda tal*, det vill säga små exempel på tillämpad matematik.[20] I avsnittet ”Suggestion for the improvement of written problem work” kan man i Wilsons bok läsa: ”The isolated text problem as such should be entirely eliminated from the schoolroom.” Man trodde tidigare att övning i att lösa dessa problem ledde till kunskaper användbara utanför skolan men numera, skriver Wilson, vet man att detta antagande var felaktigt.[21]

Kanske delvis som en reaktion på denna kritik tog en ny typ av skolmatematiska undervisningspraktiker form kring sekelskiftet 1900, vilkas kännemärke var att de i möjligaste mån försökte efterlikna de praktiska sammanhang inom vilka matematiska kunskaper antogs komma till användning. Detta snarare än att låta eleverna arbeta med formuleringar i text av verkligheten utanför skolan. Man kunde till exempel låta barnen ”leka affär”.[22] Tanken med dessa övningar var att undvika det mellanled som kunskaperna utgjorde och helt enkelt låta barnen träna på att göra det man ville att de skulle lära sig. En något annan ambition som växte sig stark vid denna tid var att ta *barnet* och de sammanhang det rör sig inom som

[18] Ibid, s. 35.

[19] Wilson, *Teaching the new arithmetic*, s. 10. Att Wilson och Lave drar liknande slutsatser rörande transfer innebär inte att de i sina övriga ståndpunkter står varandra särskilt nära. Likaså finns det uppenbara skillnader mellan den forskning från 1900-talets början som Wilson hänvisar till, och den något senare forskning vilken Lave tar som utgångspunkt för sina resonemang.

[20] Wilson kallar dem ”written problems”, och han går igenom forskningsresultaten i ibid, s. 388–395.

[21] Wilson, *Teaching the new arithmetic*, s. 412.

[22] Ibid, s. 76.

utgångspunkt för skolans verksamhet.[23] Men vill skapa förutsättningar för barnet att växa och utvecklas i skolan genom att anlägga ett helhetsperspektiv, istället för att som tidigare (menade man) fokusera uteslutande på kunskapsförmedling.

Kritiken mot vad man uppfattade som ett äldre tänkande kring kunskaper, och ett växande intresse för barnet, flöt samman i ett system av föreställningar kring barnets utveckling som kom att förknippas med den schweiziske filosofen och psykologen Jean Piaget. Redan under 1800-talet hade man månat om att låta undervisningen i matematik utgå från ”barnets ståndpunkt”, men under 1900-talet fick denna hänvisning en tydligare avgränsad innebörd, förknippad med lek, kreativitet, upptäckande och glädje.[24]

Detta skolans barn står i fokus för den engelske pedagogen Valerie Walkerdines *The mastery of reason* från 1988.[25] Walkerdine är inspirerad av Foucault och sätter med utgångspunkt från hans tänkande fokus på hur de termer som används för att tala om barnet och matematiken får sin mening av hur de används i det specifika institutionaliserade sammanhang som skolmatematiken utgör.

Liksom Lave har Walkerdine gjort en empirisk undersökning. Hon studerade hur barn använder vissa ord (till exempel *mer* och *mindre*), i skolan respektive utanför skolan. Från skolmatematikens håll ansågs dessa ord ha en viss matematiskt riktig innebörd, vilken den såg som sin uppgift att förmedla. I sin undersökning visar Walkerdine att denna innebörd ofta stod i konflikt med hur orden faktiskt användes (av barn såväl som vuxna) utanför skolan.[26] Skolans insatser var därför missriktade och kontraproduktiva vad gäller utvecklandet av barnens språkliga kompetens.[27] Walkerdines resultat kan ses som en bekräftelse av Laves tes rörande frånvaron av transfer mellan skolan och verkligheten utanför skolan.

Walkerdines huvudsakliga intresse ligger emellertid inte i att, som Lave, undersöka vad barn kan eller inte kan, i skolan och utanför skolan, utan att visa hur själva de objekt som skolan kretsar kring – i synnerhet barnet – bara

---

[23] Detta till skillnad från att försöka få skolan att likna det vuxna vardagslivet.

[24] Se nedan, kapitel 6–9, samt t.ex. Christofer Ludvig Anjou, et al., *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Häftet V. Metodik: Räknekonsten i Folkskolan.*, Stockholm, 1876, s. 5, som kan jämföras med Elsa Ericsson, ”Nya vägar i matematikundervisningen. Rön och experiment ur min praktik”, *Svensk Läraretidning*, 1925. Här har Piaget ännu inte tagit plats i den svenska skolmatematiken.

[25] Walkerdine, *The mastery of reason.*

[26] I skolans värld relaterades ”mer” och ”mindre” till varandra som motsatser. I världen utanför skolan visade sig dessa två ord ha ganska lite med varandra att göra. Istället stod mer, i egenskap av *önskemål* – ”kan jag får lite *mer*” – mot det motsatta önskemålet ”nu räcker det” eller ”inte så mycket”. Skolans hopknytande av de två termerna skapade därför förvirring hos barnen, något man från skolans håll givetvis tolkade som en frånvaro av riktiga begrepp.

[27] Walkerdine, *The mastery of reason*, s. 103, 115 och 148.

existerar som ett resultat av skolans institutionaliserade praktiska verklighet. Hon vill visa hur:

> social practices may be discursively regulated by the production of ”truths”, ”knowledges” about children, for example, which claim to tell the truth about child development. These produce the possibility of certain behaviors and then read them back as ”true”, creating a normalizing vision of the ”natural child”. Here, the sense of materiality is vital, but it is never comprehensible outside bodies of knowledge, which claim to tell a truth.[28]

Hennes tes är med andra ord att skolan utgör ett sorts självrefererande system, inom vilket det produceras ett *sken* av sanning, och mer specifikt en sanning rörande objekt som inte alls tycks vara knutna till det sociala sammanhang inom vilket sanningarna uttalas. Det objekt som hon framför allt syftar på är det naturliga barn som utgör den skolmatematiska undervisningens utgångspunkt. Snarare än att vara något naturligt och givet, är det, menar Walkerdine, något som blir till just inom de praktiker som säger sig ta det som utgångspunkt. Hon skriver:

> My claim is that ”the child” is an object of pedagogic and psychological discourses. It does not exist and yet is proved to be real every day in classrooms and laboratories the world over.[29]

Det som Walkerdine menar ”inte existerar” är det *naturliga* barnet, barnet i allmänhet, vilket kan fungera som en utgångspunkt för skolans praktiska verklighet. Det barn som bevisas existera är tvärtom ett skolans barn, format av skolan och tolkat med utgångspunkt från skolans referensramar. Sanningen om detta barn, vilken av skolan framställs som sanningen om det naturliga barnet, måste därmed, menar Walkerdine, istället förstås som skolans sanning om skolans barn.

Även om Lave och Walkerdine knyter an till olika teoretiska traditioner, är deras slutsatser snarlika. ”Lärande”, den term Lave använder, måste förstås som bunden till ett visst socialt sammanhang. Orden, Walkerdine använder termen ”signifiers”, svävar inte ovanför dessa sammanhang, utan får mening genom det sätt på vilket de används – och orden används inte på samma sätt i skolan som utanför skolan. Till och med försöken att härma verkligheten, till exempel, som jag nämnde ovan, genom att låta barnen ”leka affär”, visade sig i Walkerdines undersökning vara fruktlösa.[30]

I vissa avseenden går Walkerdine längre än Lave. Lave visar att termen ”kunskaper” (”cognition”) är tyngd av problematiska antaganden. Walkerdine visar att alla ord som används i skolan, såväl ”kunskaper” som ”barnet” och

[28] Ibid, s. 5.
[29] Ibid, s. 202.
[30] Ibid, s. 144–146.

dess "utveckling", dessutom är knutna till det specifika sammanhang som skolan utgör och därmed inte handlar om verkligheten utanför på det sätt som de måste antas göra för att skolans verksamhet skall framstå som förankrad i universella sanningar (om till exempel barnet).

Intressant både i relation till Lave och i relation till den teori jag skall utveckla är att Walkerdine, angående ordet matematik, skriver att "although the same signifiers may be used [in school, as well as outside school,] we are not justified in inferring, as is common in early education, that 'mathematics is everywhere'."[31] Precis som Lave vill hon dra andra gränser i verkligheten än de som skolan och vetenskapen, genom sina ämnen, framställer som naturliga och självklara. Att ordet matematik används i många olika sammanhang, innebär inte att detta ord betyder samma sak i alla dessa sammanhang, och än mindre att man för att fungera i dessa sammanhang skulle ha nytta av det som i skolan sägs utgöra kunskaper i matematik.

En viktig skillnad mellan Laves och Walkerdines respektive analyser är att Walkerdine ser skolans meningsskapande diskursiva praktiker som uttryck för makt. Lave visar att en viss sorts pedagogisk och psykologisk forskning är missriktad och att skolans matematikundervisning inte är eleverna till någon större nytta. Walkerdine visar hur den dessutom, i namn av att säga sanningen om eleverna, formar dem, klassificerar dem och sorterar dem, med utgångspunkt från hur väl de stämmer överens med ett specifikt skolmatematiskt ideal.[32]

Skolmatematikens värld

Den hittills mest detaljerade analysen av skolmatematiken i egenskap av institutionaliserad diskursiv praktik finns i den engelske sociologen Paul Dowlings *The sociology of mathematics education* från 1998.[33] För att visa hur Dowlings analys kompletterar Laves och Walkerdines har detta avsnitt fått överskriften "Skolmatematikens värld". Dowling visar nämligen hur skolmatematiken förmedlar ett antal myter om världen utanför skolan. I sin bok tar han upp fem sådana myter. Jag skall här nöja med mig att säga något om de två myter som spelar huvudrollen i hans framställning: *myten om referens* och *myten om delaktighet.*

Myten om referens säger att matematik handlar om verkligheten.[34] Det kanske låter självklart, men det är ett påstående rörande verklighetens natur som utgjort föremål för många filosofiska diskussioner.[35] Det får viktiga implikationer för skolmatematiken. För om matematik handlar om verkligheten, så innebär det att kunskaper i matematik (också) är kunskaper om

[31] Ibid, s. 94.
[32] Ibid, s. 204 och 214.
[33] Dowling, *The sociology of mathematics education.*
[34] Ibid, s. 4–7.
[35] Se Yves Gringas, "What did mathematics do to physics?", *History of Science*, vol. 39, 2001.

verkligheten. Dowling menar att skolmatematiken inte bara utgår från att detta påstående är sant, utan också, genom det sätt på vilket matematiken presenteras, bibringar eleverna en tro på att det är sant. Mer specifikt får matematiken i skolan representera ett slags idealt vetande om verkligheten, vilket gör att ett bemästrande av matematiken blir synonymt med ett särskilt slags bemästrande av verkligheten.

Myten om delaktighet säger att matematik är en del av alla människors vardags- och yrkesliv.[36] Denna myt liknar, men skiljer sig på ett subtilt sätt från, myten om referens. Myten om referens säger att ett teoretiskt bemästrande av matematiken innebär ett särskilt *värdefullt vetande* om verkligheten. Myten om delaktighet säger att ett praktiskt bemästrande av matematiken är nödvändigt för ett *praktiskt bemästrande* av verkligheten. I den svenska grundskolans femte år, står det i kursplanen, skall eleven ”ha förvärvat sådana grundläggande kunskaper i matematik som behövs för att kunna beskriva och hantera situationer och lösa konkreta problem i elevens närmiljö”.[37] Det första ledet i denna mening, som handlar om ett behov av matematik för att kunna beskriva situationer och problem faller under myten om referens. Meningens andra led, som handlar om ett behov av matematik för att kunna hantera dessa situationer och problem, faller under myten om delaktighet.

Dowling visar att de två myterna fördelas ojämnt mellan eleverna. Kort sagt sprids myten om referens i första hand till de duktigare eleverna, medan myten om delaktighet istället bibringas dem som lyckas sämre med matematiken i skolan. Denna uppdelning speglar, menar Dowling, samhällets uppdelning mellan intellektuellt och fysiskt arbete. De duktigare eleverna kommer i allmänhet från hem präglade av intellektuellt snarare än kroppsligt arbete, och de är hur som helst, eftersom de lyckas med matematiken i skolan, på väg mot ett sådant intellektuellt arbete. Till dessa elever förmedlar skolmatematiken myten om referens, vilken uppvärderar det teoretiska bemästrande av matematiken som de visat prov på i skolan, genom att utsträcka dess relevans till alla möjliga delar av den sociala och fysiska verkligheten. Eleverna som misslyckas är tvärtom oftare på väg mot olika typer av kroppsarbete. Till dessa elever förmedlas myten om delaktighet, vilken säger att deras praktiska misslyckande med matematiken i skolan innebär att de rimligtvis också måste misslyckas med att hantera den praktiska verklighet de är på väg att bli en del av. Med hög teoretisk precision, och med hänvisning till ett stort antal exempel, beskriver Dowling hur detta går till.

Intressant nog ansluter sig Dowling till en syn på lärande som ligger nära Laves. I pedagogiska situationer, det vill säga situationer där någon försöker lära någon något, ger han nämligen, precis som Lave, vad som på svenska får

---

[36] Ibid, s. 7–11.
[37] Skolverket, *Kursplan i matematik för grundskolan.*

kallas ”lärlingssituationen” en särställning. Dess karaktäristiska drag är att den som ”lär ut”, lär ut det som den själv är expert på, och att de kriterier som används för att bedöma den som lär sig, väsentligen är samma kriterier med utgångspunkt från vilka läraren, det vill säga experten, bedöms. Det är ingen huvudpoäng i Dowlings bok, men det är uppenbart att han menar att denna typ av pedagogiska arrangemang hör till de mer lyckade. Han talar till exempel om sin egen bok som ett försök att skola in läsaren (som om hon vore en lärling) till den expertposition vilken han som författare själv intar.

Dowling menar att skolmatematiken inte motsvarar detta undervisningsideal och hans analys består till stor del i en klassificering av alla de *andra* relationer mellan lärare och elev vilka förekommer i den skolmatematiska undervisningspraktiken. Matematiklärare är ju till exempel inte experter på matematik, vilket är vad deras undervisning enligt Dowling handlar om. Lärarens verksamhet bedöms inte med utgångspunkt från samma kriterier som elevens; målet är inte att göra eleven till expert på matematik, och inte heller till lärare. Dowling och Lave förenas i övertygelsen att kunskaper är oskiljaktiga både från de sammanhang inom vilka de tar form och från de där de används – kunskap, tänkande och handling, utgör för dem en sammanhängande helhet. Vad de därmed inte kan tro på, är skolmatematikens ambition att utforma en specifik praktik med syfte att generera kunskaper, vilka sedan skall komma till nytta under helt andra praktiska omständigheter. De tror inte på det mellanled vilket i det skolmatematiska tänkandet förbinder kunskapernas formande med deras användning.

Från matematik i skolan till skolans matematik

I de fyra ovanstående punkterna har jag gett exempel på empiriskt förankrad, teoretiskt formulerad, kritik. Först kritik mot skolan i allmänhet och dess relation till samhället. Sedan kritik riktad mot skolmatematikens idéer om kunskaper, dess föreställningar om barnet, samt dess föreställningar om verkligheten utanför skolan.

Den kritiska operationen består i att avslöja anspråk på universalitet som falska. Skolan påstår sig leda till allmänna högre mål som till exempel rättvisa, men den visar sig i själva verket bidra till att reproducera orättvisa hierarkiska strukturer. Skolmatematiken skall leda till allmänt användbara kunskaper, men visar sig leda till en högst partikulär förmåga, som bara kan registreras med skolans egna mätinstrument. Skolmatematiken påstår sig utgå från barnets egenskaper, men detta barn visar sig vara ett objekt som skapas i just de praktiker som utger sig för att ta det som utgångspunkt. Skolmatematiken säger sig förbereda eleverna för en tillvaro som till sin natur är matematisk och inom vilken kunskaper i matematik ständigt kommer till användning, men detta visar sig vara en myt.

Kritiken tycks underminera den skolmatematiska verksamheten. I praktiken har kritiken emellertid inte fått denna effekt. En del av de undersökningar jag hänvisat till ovan (Laves och Walkerdines) har tagits upp i den svenska skolmatematiska diskursen. Det har även den mer allmänna kritik jag talade om först (till exempel Bourdieus). Som jag visade i problemställningen är ju nämligen redan den skolmatematiska diskursen huvudsakligen kritiskt inställd till skolan. När sådana som Lave och Walkerdine skär av banden mellan skolan och det universella, är det därför relativt oproblematiskt för skolmatematikens talesmän att instämma. Den vetenskapliga kritiken kan tas upp som ett slipat vapen i kampen om satsningar på mer forskning och kompetensutveckling – för vad den visar är ju att skolan måste förändras. Skolmatematiken har en förmåga att vända all kritik till sin egen fördel. Hur går detta till?

Förklaringen ligger i att den skolmatematiska diskursen utgår, eller snarare tycks utgå och säger sig utgå, från en position som ligger utanför skolan. Detta innebär att den, när banden mellan skolan och det universella kapas, så att säga hamnar på från kritikens synvinkel fel, men från sin egen synpunkt givetvis *rätt* sida, nämligen på det universellas sida. Det är kort sagt som om skolmatematiken vore två saker samtidigt – nämligen å ena sidan skola och å andra sidan matematik. Genom att tala i matematikens namn gör den sig immun mot all kritik som väsentligen handlar om skolan. Det är matematiken som tycks kräva skolmatematik, genom att vara allestädes närvarande och överallt användbar, genom att utgöra kärnan i teknik, naturvetenskap och ekonomi, genom att vara ett uråldrigt kulturarv, en modell för effektivt och kreativt tänkande och så vidare. Detta faktum kvarstår, oberoende av hur misslyckad den skola tidigare generationer skapat, i kamp mot alla möjliga hinder, råkar vara.

Låt mig illustrera detta med hjälp av Ole Skovsmoses *Towards a philosophy of a critical mathematics education* från 1994.[38] Skovsmose har inom det (nordiska) matematikdidaktiska fältet en framträdande position som ”intern” kritiker. Som vi sett ovan innehåller den skolmatematiska diskursen ett stort mått av kritik mot hur skolmatematiken i praktiken ofta gestaltar sig. I dessa sammanhang är det inte ovanligt att Skovsmose nämns.[39] Hans explicit uttryckta mål är att bidra till att möjliggöra en skolmatematik som motverkar alla former av orättvisa och förtryck och som utgör en positiv

[38] Skovsmose, *Towards a philosophy of critical mathematics education.* I den senare boken, Ole Skovsmose, *Travelling through education: uncertainty, mathematics, responsibility*, Rotterdam, 2005, intar Skovsmose en mer avvaktande position i förhållande till skolmatematiken, till synes något missmodig med den utveckling han har fått uppleva.

[39] Andra forskare som nämns i dessa sammanhang är Stieg Mellin-Olsen och Paul Ernest, se Mellin-Olsen, *The politics of mathematics education* respektive Ernest, *The philosophy of mathematics education.*

förändringskraft i samhället.[40] Jag skall ta upp tre aspekter av hans teori, som gör den karaktäristiskt skolmatematisk.

För det första introducerar Skovsmose i sina resonemang vad han kallar "matematikens formaterande kraft" ("the formatting power of mathematics"). Med detta vill han givetvis inte veckla in sig i metafysiska resonemang, men det är likväl svårt att inte se denna idé som ett ganska skruvat påstående om verklighetens struktur. Skovsmose talar nämligen också om verkligheten som "frusen matematik".[41] Även om han menar att matematiken mycket väl kan betraktas som en "social konstruktion", tillmäter han genom denna typ av påståenden matematiken en speciell ontologisk status, som något som å ena sidan skiljer sig från den materiella verkligheten, men å andra sidan verkar (som en kraft) på denna materiella verklighet. Följande stycke är karaktäristiskt för hans ståndpunkt:

> Mathematics and related subjects provide conditions for the development of information technology, and it is distinctive that the nature of the computer and the possible limitations of algorithmic procedures were discussed before the construction of the first computer. In fact, every application of a computer can be seen as an application of a simple or complex mathematical model, and because information technology appears to be omnivorous, mathematic moves into a new social position.[42]

Här upprättar Skovsmose en relation mellan matematik och teknik, där matematiken utgör teknikens förutsättning och i någon mening också finns förborgad i den teknik den möjliggjort. Skovsmose kallar detta realiserad abstraktion. Han menar alltså att den abstraktion som matematiken utgör, i tekniken så att säga antagit materiell form. "The point is", skriver han, "that mathematics is integrated in the technological structures".[43] Nyckelordet integrerad implicerar en skillnad, mellan å ena sidan matematiken och å andra sidan den materiella verkligheten. Det kan kanske tyckas som att jag fokuserar på detaljer, men den ontologiska status Skovsmose här tillmäter matematiken har en avgörande betydelse för hans övriga resonemang.

För det andra menar Skovsmose nämligen att kunskaper om matematik är en förutsättning för att man skall kunna förstå och bemästra verkligheten (såväl den sociala som den fysiska).[44] Detta är en naturlig följd av hans ståndpunkt att matematiken finns förborgad i verkligheten. Skovsmose beskriver matematiken som det som ligger bakom verklighetens struktur, det som orsakat den, och därmed som nyckeln till att förstå den. Skovsmose talar därför om matematisk kunskap i termer av frigörelse. Matematiken utgör

---

[40] Skovsmose, *Towards a philosophy of critical mathematics education*, s. 22.
[41] Ibid, s. 43.
[42] Ibid, s. 49.
[43] Ibid, s. 55.
[44] Ibid, s. 26.

verktyget framför andra med vars hjälp människor kan se ”systems and regularities in a chaotic daily life situation”.[45]

För det tredje skriver Skovsmose att matematiken vanligtvis är *dold* i den materiella verkligheten. Givet att verkligheten är matematisk och kunskaper i matematik utgör en nödvändig förutsättning att bemästra verkligheten, blir därmed en av skolmatematikens viktigaste uppgifter att *lära människor upptäcka den matematik som finns förborgad i den sociala och fysiska verkligheten*. Han kallar detta för ”matematisk arkeologi”.[46] För att se vad matematiken faktiskt gör, skriver han, så måste man först se att det som händer faktiskt är matematik. I den mån matematiken förblir osynlig, så blir också verkligheten omöjligt att hantera.[47] Det är, menar Skovsmose, *svårt* att upptäcka matematiken i verkligheten, och för att skolmatematiken skall kunna fylla sin kritiska funktion – han talar här om ”myndighet” vilket ligger nära det aktiva medborgarskap jag nämnde i problemställningen – räcker det därför inte att lära eleverna matematik, man måste också lära dem upptäcka matematiken i verkligheten genom att ägna sig åt matematisk arkeologi.[48]

Med Dowlings språkbruk kan man säga att Skovsmose på ett mycket direkt sätt uttrycker både myten om referens och myten om delaktighet. Han konstituerar verkligheten som något som kräver skolmatematik. Och det behöver väl knappast sägas att han är kritisk till skolmatematiken sådan den faktiskt är.[49] Hans ståndpunkt exemplifierar hur resonemang som handlar om *matematiken* utgör den ram inom vilken kritik mot skolmatematiken alltid resulterar i ett krav på en annan, bättre, *skolmatematik*.

En teori om skolmatematiken måste därför se skolan och matematiken som förbundna med varandra och innefatta dem båda, inklusive den matematik som tycks föregå och inte ha något med skolan att göra. Det handlar om att se hur skolmatematiken konstituerar matematiken som ett objekt med en mycket speciell uppsättning egenskaper. Jag kommer här att kalla detta objekt för skolans matematik. Innebörden av denna term kommer att klargöras i teoriavsnittet, men låt mig redan nu ge en kortfattad karaktäristik.

Skolans matematik har två sidor. En sida vänder sig utåt, från skolan mot samhället. Som sådan fungerar den som en sorts spegel, i vilken samhällets högre värden reflekteras och förknippas med varandra. Skolans matematik utgör i denna bemärkelse skolmatematikens representant, det sätt på vilket den presenterar sig själv. Denna rena yta, i vilken samhället kan se en ideal

[45] Ibid, s. 63.
[46] Ibid, s. 94.
[47] Ibid, s. 95.
[48] Ibid. Jmf. Skolverket, *Kursplan i matematik för gymnasieskolan*: ”Matematiken är en förutsättning för stora delar av samhällets utveckling och den genomsyrar hela samhället, ofta på ett sätt som är osynligt för den ovane betraktaren.”
[49] Se Skovsmose, *Towards a philosophy of critical mathematics education*, s. 81–82.

spegelbild av sig själv, är vad skolmatematiken vill vara och säger sig kunna vara.

Skolans matematik har emellertid även en andra sida, vänd mot skolan. Denna skolsida är en samling begrepp som måste formas i eleverna, genom kreativt, upptäckande arbete, genom rader av riktigt utformade uppgifter, genom vägledning förankrad i didaktiskt vetande, anpassad till barnets utvecklingsnivå. Matematikens insida kräver en viss sorts skolmatematik och den upprättar en skarp dikotomi mellan den fruktbara skolmatematiken och allt det i skolan som inte motsvarar dess höga ideal: det regelmässiga, mekaniska, torra, traditionella och tråkiga.

Utsidan av skolans matematik är en blank spegel, dess insida en hård domare – båda i kraft av att verkligheten till sin natur antas vara matematisk och matematikkunnande antas vara användbart nästan överallt. Genom sina två sidor utgör skolans matematik det band som förenar skolan med verkligheten. Skolan säger sig organisera lärande i matematik i enlighet med matematikens skolsida. Verkligheten framstår, efter att ha reflekterats i matematikens utsida, som något bara de kan förstå vilka gjort skolans matematik till sin.

I de följande avsnitten skall jag introducera en terminologi med vars hjälp det objekt som skolans matematik utgör preciseras och knyts till samhällsvetenskaplig och filosofisk teoribildning. Jag kommer i stora drag följa den modell för ideologikritik som den slovenske filosofen Slavoj Žižek presenterar i en av sina första böcker: *Ideologins sublima objekt.*[50] På många sätt har jag dock omformat hans idéer för att få dem att passa det specifika problem som skolan och matematiken utgör. Jag har valt att presentera dem i en delvis annan ordning än Žižek gör i sin bok och på sina ställen knyter jag även an till andra filosofer och samhällsvetare, med vilkas hjälp Žižeks ibland lite dunkla resonemang kan ges en klarare innebörd. Jag skall ta upp tre grundläggande idéer: distinktionen mellan *imaginär* och *symbolisk identifikation*, de *sublima objektens* betydelse, samt slutligen idén att vissa objekt, bland annat matematiken, fungerar som *nodpunkter* i vårt sätt att uppfatta och förstå verkligheten vi är en del av.

Symbolisk och imaginär identifikation

Žižek skriver att imaginär identifikation är identifikation med älskvärda ”bilder av oss själva”, medan symbolisk identifikation är identifikation med ”den position varifrån vi observerar eller betraktar oss i syfte att kunna framstå som älskvärda”.[51] Poängen är här att vi på ett plan vill något specifikt – Žižek exemplifierar med en tonåring som vill bli (som) en popstjärna – medan den mer grundläggande frågan är vad det är som får oss att vilja just

[50] Žižek, *Ideologins sublima objekt.*
[51] Ibid, s. 122.

detta. Denna senare fråga rör den symboliska identifikationen. Man kan tala om den i termer av en *blick* som vi (omedvetet) upplever oss betraktade av och vars värdesystem vi utgår från. Då det gäller tonåringen rör det sig alltså om frågan: ”För vem vill du framstå som en popstjärna?”

Vår symboliska identifikation är resultatet av en praktisk inskolning i ett sätt att tänka, tala och vara. Den hör till språket och praktiken. Våra imaginära identifikationer är istället bilder vilka vi uppfattar som meningsfulla och eftersträvansvärda.

Skolmatematikens mål

Hur kan distinktionen mellan imaginär och symbolisk identifikation användas för att förstå relationen mellan skolan och matematiken? Låt oss börja med en enkel observation: skolan avslutas med att elever får betyg och för de allra flesta är det av central betydelse att få bra betyg. Betygen baseras på en serie prov, varav vissa är framtagna på nationell nivå. Oavsett vad man tänker och tror om de kunskaper skolan syftar till att förmedla, är det svårt att undgå det faktum det som i praktiken betyder allra mest, är i vilken mån man lyckas med dessa prestationsmätningar. Detta är det första steget i mitt resonemang: något som ligger bortom vad vi tänker och tror, prestationsmätningar, spelar huvudrollen i skolan.

Nästa steg ligger i konstaterandet att elever vill att det skall gå bra för dem. De vill prestera. Och de får givetvis stöd av lärarna. Skolan präglas av en gemensam strävan efter prestationer. Givet distinktionen mellan imaginär och symbolisk identifikation kan man säga att eleverna i skolan, när de vill prestera, står under inflytande av skolans blick. Med andra ord har de då, på ett symboliskt plan, identifierat sig med skolan. Att sträva efter ett bra betyg motsvarar i Žižeks terminologi att ”erbjuda sig själv till den Andre som objekt för dess begär”, där den Andre – en teknisk term som jag skall säga mer om nedan – är skolan.[52] Genom prestationsmätningarna konstituerar skolan en hierarki av sätt att tänka och handla. Det är inom denna hierarki som såväl lärare som elever *vill* något.

Som ett tredje steg måste vi konstatera att det eleverna strävar efter, och i synnerhet lärarna vill att eleverna skall uppnå i skolan, absolut inte kan reduceras till provresultat. Tvärtom betraktas dessa snarast som sekundära. Vad lärarna vill är istället att bibringa eleverna kunskaper, och då det gäller skolmatematik, kunskaper i matematik. Med utgångspunkt från hur skolan framställer sig själv vore det därför riktigare att säga att eleverna, snarare än att eftersträva att vara duktiga i en rent instrumentell bemärkelse, strävar efter att få ett stort mått av kunnande.

Här måste man därför notera ett samspel mellan två nivåer; å ena sidan vad man kan kalla en *symbolisk-mekanisk* nivå av systematiskt ordnade mätningar och å den andra en *imaginär* nivå av betydelser och bilder. Att

[52] Ibid, s. 123.

identifiera sig med skolmatematiken innebär, kan man säga, att inte dra någon skarp gräns mellan dessa två nivåer, utan helt enkelt likställa ett stort mått av matematikkunnande med en förmåga att lyckas i skolans prestationsmätningar. Riktigt så enkelt är det inte, så påståendet skall ses som en preliminär bestämning. Poängen är att en föreställning om matematikkunnande som något gott och eftersträvansvärt, liksom en föreställning om höga betyg som eftersträvansvärda, båda är förbundna med skolmatematikens system för hierarkisering.

Bilden av matematiken, bilden av skolan

Vi har tagit ett steg bort från skolans prestationsmätningar, till det kunnande de mäter. Nu skall vi ta ytterligare ett steg, till kunskapernas föremål, matematiken. Till idén om kunskaper hör nämligen att de per definition måste knytas till något som de är kunskaper *i*. Detta i motsats till sådant som bildning och fostran, vilka utan vidare kan vara bildning och fostran i största allmänhet. Frågan som står i centrum här är i vilken mån även detta föremål konstitueras av skolmatematikens blick.

Jag skall här nöja mig med att göra en observation rörande en viss överensstämmelse mellan å ena sidan matematiken och å andra sidan skolan. Sedan skall jag föreslå en tolkning, som kan tyckas svårsmält. Denna får emellertid sedan stöd i det fortsatta teoretiska resonemanget och framför allt i den historiska redogörelsen. Vad jag syftar på är följande.

Matematiken är vad man inom filosofin ofta kallar en universalitet, det vill säga något som existerar oberoende av tid och rum. Detta är också något som påpekas i den skolmatematiska diskursen. Att man idag ofta tillägger att den matematiska vetenskapen är en mänsklig skapelse som ”ständigt utvecklas”, förändrar ingenting, eftersom matematiken likväl konstitueras som det konstanta något som denna utveckling hela tiden är.[53] I egenskap av sådan universalitet förknippas matematiken i den skolmatematiska diskursen, ofta via idén om kunskaper, med en tämligen konstant uppsättning attribut, som till exempel problemlösning, kreativitet, demokrati och ekonomisk tillväxt. Genom dessa attribut framställs matematiken som något universellt och enastående positivt.

Något helt annat är det med skolan. Jag har nämnt det ovan, men det förtjänar att upprepas: i den skolmatematiska diskursen talar man om skolan i termer av stoff ärvt från gångna tider, repetitiva undervisningsmetoder, inrutning av tiden, upprepade och exakta prestationsmätningar, tvång att delta och så vidare. Det görs knappast någon hemlighet av att mätandet är objektivt och mekaniskt och att de betyg dessa mätningar resulterar i är orättvisa men likväl obönhörliga domare vilka avgör hur elevernas framtid kommer att gestalta sig. Skolan är med andra ord allt annat än något universellt och positivt. Den utgör snarare en sorts motpol till matematiken.

---

[53] Skolverket, *Kursplan i matematik för gymnasieskolan.*

Detta motsatsförhållande mellan skolan och matematiken tenderar emellertid att dölja en strukturell likhet mellan dem. Båda är nämligen relativt konstanta över tid och rum och de framställs också i den skolmatematiska diskursen som konstanta över tid och rum. Man kan nästan säga att skolmatematiken framställs som en sorts olycksalig följeslagare till matematiken. Matematiken finns där, och överallt har man försökt utforma en adekvat skolmatematik – alltid med lika fruktlöst resultat.

En annan av de egenskaper som vi sett tillskrivas matematiken är dess (ofta osynliga) närvaro. Matematiken är, sägs det i den skolmatematiska diskursen, något vi möter dagligen. Även här finns en kanske oväntad överensstämmelse med skolmatematiken. Under en stor del av våra liv möter vi nämligen matematiken dagligen – i skolan! Genom att omfatta alla människor och vara relativt konstant över tid och rum, motsvarar alltså skolan själv, i egenskap av social institution, det den påstår om matematiken. Det ligger nära till hands att se det hela som en självuppfyllande profetia. Samhället förutsätter att matematik är något man möter varje dag och utformar därför en skola som skall förbereda för dessa möten. Och vips så har matematiken *blivit* något alla möter dagligen, i denna skola.[54] Följer vi analogin ytterligare ett steg, ser vi hur det dagliga livet förutsätts inbegripa rader av svåra problem som bara kan lösas med matematikens hjälp. Och vad är skolmatematiken, om inte just detta? Genom att skolmatematiken blivit en del av (unga) människors vardag, har denna vardag gjorts precis så svår och precis så matematisk, som den från början antogs vara (jmf. s. 14ff nedan).

Slutligen är en av matematikens mest centrala attribut dess ”viktighet”. I den skolmatematiska diskursen placeras matematiken nära centrum av den mänskliga kulturen och tillmäts en avgörande betydelse för individuell och samhällelig framgång. Även här finns en uppenbar korrespondens med matematikens roll i skolan: där spelar den ju bokstavligt talat, genom prestationsmätningar, en livsavgörande roll.

Tillspetsat uttryckt finns det alltså en korrespondens mellan matematikens och skolmatematikens *konstans*, *närvaro* och ”*viktighet*”. Vad man normalt tänker sig är naturligtvis att skolan är sekundär i förhållande till matematiken, det vill säga att skolmatematik är ungefär samma sak överallt och relativt konstant över tid, på grund av att matematiken är universell och konstant över tid; att man ägnar sig åt matematik dagligen på grund av att man efter och utanför skolan möter matematik dagligen, och slutligen att matematikämnet är viktigt i skolan, på grund av att matematiken spelar en så central roll i samhället. Min tes är att det är precis tvärtom. Matematiken, och mer specifikt den skolans matematik som jag syftar på här och som skolmatematiken kretsar kring, är något som skapas i skolan. Den är det ideal vi på ett imaginärt plan identifierar och identifierar oss med, då vi på ett symboliskt plan identifierat oss med skolmatematiken.

---

[54] Angående närvaro, jmf. Roland Barthes, *Mytologier*, Staffanstorp; Solna, 1969, s. 226.

Fantasin som ger det hela mening

Låt oss några ögonblick bortse från matematiken. Hur skulle skolmatematiken framstå då? Att tänka skolmatematik utan matematik innebär att tänka dess relation till verkligheten utanför skolan som direkt, oförmedlad av den universalitet som matematiken utgör. Det innebär att inte tänka dess praktiker som mer eller mindre lyckade arrangemang för att åstadkomma lärande i matematik. Istället måste de bedömas och värderas utifrån andra kriterier. Utan matematiken blir frågan: ”Vad liknar detta?” viktig, eller: ”Vad är det för framtida tillvaro som eleverna genom denna strikt reglerade verksamhet förbereds för?” Med Žižek kan vi likna den ”blinda, gigantiska, meningslösa apparat”, som skolmatematiken skulle utgöra utan matematiken, med den värld som tecknas av Kafka i *Processen*.[55] Det är en värld omöjlig att orientera sig i, omöjlig att förstå. För att beteckna det som saknas i denna värld använder Žižek termen *fantasi*. Mer exakt menar Žižek att vi i världen alltid hittar – och alltid måste hitta – en *sak* att identifiera oss med; något som vi identifierar i världen, identifierar världen med, och samtidigt identifierar oss själva med. Det är uppenbarligen en sak som får fylla en viktig funktion för att ge vår värld mening. Den upprättar, kan man säga, ett sammanhängande fält av betydelser. Žižek skriver att fantasin ”är den ram som samordnar och organiserar vårt begär”.[56] Det är så att säga med hjälp av vår fantasi, som vi ser det symboliska maskineriet som meningsfullt, och – vilket är viktigt – som vi för oss själva kan artikulera vad det är vi *vill*.

För skolmatematikens del är givetvis matematiken den sak vi identifierar och identifierar oss med. Matematiken gör att vi bortom strävan efter poäng och betyg, ser en meningsfull strävan efter kunskaper. ”Fantasin”, skriver Žižek, ”lär oss hur vi skall begära”, och i skolmatematikens fall kan vi mer exakt säga att fantasin om en universell matematik lär oss hur vi skall begära inom skolmatematikens ramar.[57]

Här uppstår emellertid ett problem som måste hanteras. Det tycks nämligen nödvändigt att införa en skarp distinktion mellan å ena sidan de bilder och föreställningar rörande matematiken som skolmatematiken skapar och å andra sidan den så att säga verkliga matematiken, som matematiker arbetar med, som används inom teknik och vetenskap och så vidare. Kanske står det klart att den skolmatematiska diskursens påståenden om matematikens egenskaper är överdrivna och till och med i viss mån felaktiga. Kan den då inte justeras, genom någon typ av objektiv undersökning, som avgränsar vilken roll matematiken faktiskt spelar inom samhällets olika sfärer och vilka egenskaper den faktiskt har?

I det följande avsnittet skall jag argumentera för att det inte är möjligt att göra någon sådan distinktion och nyansering, utan att så att säga hela

---

[55] Žižek, *Ideologins sublima objekt*, s. 53.
[56] Ibid, s. 137.
[57] Ibid, s. 137.

matematiken måste inkluderas i analysen av relationen mellan skola och matematik.

Matematiken som sublimt objekt

Ett sublimt objekt är något som får en frånvaro att framstå som något dolt. De sublima objekten är speciella, men de är allt annat än ovanliga och de är inte svåra att känna igen om man väl lärt sig leta efter dem. Deras särskilda natur har inget att göra med deras faktiska egenskaper.[58] Alla objekt kan bli sublima. Deras sublimitet är istället en effekt av den roll de kommit att spela i en övergripande struktur. Denna roll gör att de framstår som fascinerande och outgrundliga. Talesättet ”gräset är alltid grönare på andra sidan” beskriver de sublima objektens logik. Det faktum att något ligger utom räckhåll och därmed är okänt, gör det möjligt för oss att ladda det med mening: vi tror oss veta att det är *något* som vi skulle ha stor glädje av. Men om vi kommer dit, förlorar objektet genast sin sublimitet och vi upptäcker att det inte var *det*. Det strukturellt bestämda ”andra sidan”, som givetvis inte hade något att göra med själva det gräs som växte där, hänvisar nu till något annat, som på grund av sin oåtkomlighet kan inta det sublimas plats.

Att inte förstå matematik

Med utgångspunkt från ovanstående resonemang kan vi se skolmatematiken och matematiken som två väsensskilda sidor, där skolmatematiken är dålig och matematiken i och för sig god men å andra sidan, tyvärr, blott en fantasi utan substans. Så enkelt är det emellertid inte.

Matematiken måste i och för sig förstås som den fantasiram som ger skolmatematiken dess mening. Samtidigt måste man emellertid vara medveten om att den på ett fundamentalt sätt misslyckas med detta meningsgivande. Hade den lyckats skulle skolmatematiken framstått som en harmoniskt integrerad del av samhället, en plats där elever efter bästa förmåga lär sig matematik, där deras kunnande registreras och eleverna sedan, med kunskapsmåttet som utgångspunkt, fördes vidare mot en för dem lämplig plats i samhället. Längre ifrån den faktiska bilden av skolmatematiken kan man knappast komma. Det finns ett fundamentalt *glapp* mellan matematiken och skolmatematiken, en katastrofalt bristande överensstämmelse, som placerar skolmatematiken i konstant tillstånd av kris.

Det märkliga, som jag redan noterat flera gånger ovan, är emellertid att denna bristande överensstämmelse, långt ifrån att försvaga skolmatematikens ställning och göra den känslig för kritik, istället tycks tala till dess fördel. Hur är detta möjligt?

---

[58] Slavoj Žižek, *The ticklish subject: the absent centre of political ontology*, New York, 1999, s. 221.

Žižek förklarar att trossystem *aldrig* riktigt räcker till för att få tillvaron, i det här fallet skolmatematiken, att framstå som helt meningsfull. ”Det finns alltid en rest”, skriver han, ”ett överskott, en fläck av traumatisk irrationalitet och meningslöshet som klamrar sig fast [...]”.[59] Nyckeln till en förståelse av det gängse förhållningssättet till skolmatematiken ligger i hur Žižek avslutar denna mening. Det är nämligen så, skriver han, att ”*långt ifrån att hindra subjektets fullständiga underkastelse i förhållande till det ideologiska dekretet utgör denna rest dess grundläggande villkor*”.[60] Det ”ideologiska dekret” som Žižek talar om skall här förstås som påbudet att handla i enlighet med skolmatematikens sätt att fungera, det vill säga för läraren att fortsätta undervisa på det fördömt oinspirerande sätt som läromedel och centrala prov gör oundvikligt, för läroboksförfattarna att fortsätta fylla läroböckerna med det traditionstyngda stoff som utbildningssystemet kräver, för kursplanekonstruktörer att stå ut med se sina ambitioner grusade av irrationella krav från politiker, lärare, föräldrar och gud vet vem, för forskarna att inte haka upp sig på skolmatematikens många brister, utan fokusera på vad som, givet omständigheterna, trots allt är möjligt att göra, och så vidare.[61]

En viktig aspekt av detta sätt att resonera, som den tyske filosofen Peter Sloterdijk kallar *cyniskt*, är att vi inte kan sätta fingret på exakt varför vi gör det vi gör.[62] Vi handlar ”som om” skolmatematiken vore något vi vet att den inte är, med en diffus förhoppning om att den på något sätt ändå, trots allt, har något gott i sig, är på väg att förändras, eller dylikt. Vad man måste observera är att denna vaga förhoppning inte på något enkelt sätt kan förstås som orsaken till vårt handlande. Snarare är den en effekt av vad Žižek kallar ”extern lydnad”, eller med andra ord: vanans makt.[63] Vanan ger upphov till ett *något* som vi identifierar ”bakom Lagens idiotiska, traumatiska och inkonsekventa bokstav”.[64] Detta något, detta sublima objekt, gör det möjligt för oss att fortsätta handla ”som om”, trots allt tvivel.

I skolmatematiken fall kan denna vanans makt förklaras på ett relativt enkelt sätt. Under vår uppväxt har vi nämligen alla deltagit i skolmatematikens praktiska verksamhet. Vi har lyssnat på vår lärare, räknat våra uppgifter, löst våra prov, och under dessa timmar, dagar, veckor, månader och år kommit att identifiera denna verksamhet som meningsfull. Vi hade inga möjligheter att upprätta den distans i förhållande till skolmatematiken som skulle krävas för reflektion och kritik. Våra kroppar,

---

[59] Žižek, *Ideologins sublima objekt*, s. 52.
[60] Ibid, s. 53.
[61] Centralt är alltså att vi förstår oss själva som något mer än den person som i en objektiv bemärkelse gör det som förväntas. Žižek skriver: “An interpellation succeeds precisely when I perceive myself as ‘not only *that*’, but a ‘complex person who, among other things, is also *that*’ – in short, imaginary distance towards symbolic identification is the very sign of its success” (*The ticklish subject*, s. 258–259).
[62] Peter Sloterdijk, *Kritik av det cyniska förnuftet*, Stockholm, 1988, s. 25–27.
[63] Žižek, *Ideologins sublima objekt*, s. 46.
[64] Ibid, s. 47.

vår *habitus* som Bourdieu skulle säga, har formats på skolmatematikens villkor. Karaktäristiskt för den typ av extern lydnad som Žižek talar om, och det *cyniska förnuft* det hänger samman med, är ett sorts blint förgivettagande, av att vissa saker helt enkelt är som de är, att de ligger bortom vår personliga kontroll – *att de inte kan förändras*. Med tanke på hur fullständigt maktlösa vi alla varit i förhållande till skolmatematiken under vår uppväxt – och detta gäller oavsett hur man värderar dess resultat och vad man tror om matematiken – är det inte märkligt att vi som vuxna tar den för given.[65]

Till särdragen hos Žižeks analys hör observationen (eller antagandet, beroende på hur man ser det) att det till synes meningslösa cyniska handlandet aldrig kan vara helt meningslöst. Tvärtom finns det alltid något, ett objekt, som ger handlandet åtminstone ett spår av mening. Vad jag vill argumentera för är naturligtvis att detta något, detta outgrundliga objekt, vad gäller skolmatematiskt handlande, är knutet till matematiken.

Det gäller här att observera skillnaden mellan detta objekt och den enkla och klara bild av matematiken som jag beskrivit tidigare. I avsnittet om imaginär och symbolisk identifikation utgjorde matematiken en fantasiram, ett system av betydelser. Det outgrundliga objekt som det cyniska förnuftet relaterar till är inte identisk med denna positiva helhet. Snarare är detta objekt det som återstår sedan fantasiramen rasat samman och skolmatematiken visat sig i all sin olycksalighet. Ideologins sublima objekt är det objekt vi håller fast vid trots att allt är, som jag själv kanske skulle uttrycka det, helt åt helvete.[66]

Detta fasthållande är emellertid inte medvetet, så att vi tänker: jag vet ju att matematiken, trots allt, är något som är värt att hålla fast vid. Tvärtom är det vi håller fast vi ett sorts obstinat och alltid diffust insisterande på att det helt enkelt måste finnas något *i* matematiken, som ger allting mening. Givet denna precisering är det inte svårt att se varför matematiken utgör en tämligen tacksam ”behållare” för sublimitet och outgrundlighet i skolmatematikens värld. I skolan konstitueras nämligen matematiken som väsentligen okänd, som något som man bara lär sig ”grunderna” om. Med denna vetskap om sin egen relativa okunskap, kan man vara i och för sig diffust, men likväl tryggt, förvissad om att matematiken i andra sammanhang, inom till exempel vetenskap och teknik, är något väsentligen annat och framför allt något oändligt mycket mer. Žižek skriver:

[65] Jag utvecklar detta resonemang i avhandlingens slutsatser på s. 361ff nedan.

[66] Kanske är det nödvändigt att här påminna om möjligheten av att helt enkelt sluta. Eller mer exakt, att det finns en annan typ av genomskådande som gör ett sådant avbrott oundvikligt. När det inträffar, sammanfaller det alltid med det sublima objektets upplösning. Objektet är aldrig, och kan aldrig vara, någon *orsak* till handling i egentlig mening. Det är blott en effekt av nödvändigheten att handla. När vi blir fria från detta tvång, så behövs inte längre det objekt som tidigare gav detta handlande åtminstone ett minimum av koherens och mening.

> Det sublima objektet är ett objekt som vi inte kan närma oss alltför direkt; om vi kommer alltför nära, förlorar det sin sublima karaktär och blir till ett helt alldagligt, vulgärt objekt. Det är endast som avståndsobjekt, beläget i ett slags mellanrum där det endast kan uppfattas från ett specifikt och begränsat perspektiv, som det framträder som realt [eller med ett annat ord: sublimt]. Att det i fullt dagsljus reduceras till ett alldagligt objekt är en effekt av att det i sig är ingenting alls.[67]

I skolmatematiken är matematiken ständigt närvarande, men aldrig i sin helhet; man tar några steg i matematikens riktning, men vet att stanna på behörigt avstånd. Just denna kombination av närvaro och frånvaro ger fantasin det spelrum den behöver för att finna sig till rätta, och i matematiken hitta något att hålla fast vid.

Min förståelse av matematiken som något sublimt kan illustreras av vad historikern Joan Richards skriver i sin bok *Mathematical visions: the pursuit of geometry in victorian England*, som handlar om synen på matematik i England på 1800-talet.[68] Angående tidens mångfacetterade diskussion rörande matematikens natur skriver hon:

> Ultimately, however, foundational questions can be reduced to the questions of what mathematics is. This question is at once simple and immense. It is not relevant only to the systems of philosophers or even of mathematicians. It is addressed over and over again as societies negotiate the terms of mathematical educations, development, support and prestige. Responses to it are better understood as visions than as answers; they appear as ever-changing patterns rather than fixed solutions. To borrow a phrase from an English mathematician: 'like a rainbow, if we try to grasp it, it eludes our very touch; but like a rainbow it arises out of real conditions of known and tangible [circumstances]'.[69]

Richards talar här om *matematiska visioner* och jämför dem med regnbågens kombination av påtagligt fascinerande synlighet och samtidiga ogripbarhet. Hon talar, kan man säga, om matematikens sublimitet.

Ett helt annat typ av stöd ges av det faktum att matematiker ofta är skolmatematikens hårdaste kritiker, och dessutom kritiker som tar sikte just på själva matematiken. Ett tydligt exempel utgörs av en debattartikel i

---

[67] Žižek, *Ideologins sublima objekt*, s. 193. I citatet har jag för enkelhets skull kompletterat Žižeks term ”realt” med den i det här sammanhanget synonyma termen ”sublimt”. Mer allmänt kan sägas att jag genomgående har undvikit att tala om det reala i avhandlingen, trots att det reala intar en central plats hos Žižek. Därmed lämnar jag tveklöst en rad teoretiska frågor obesvarade. Jag hoppas emellertid att detta *otänkta* skall kunna utgöra en produktiv kraft för de läsare som möter det, snarare än motsatsen.

[68] Joan L. Richards, *Mathematical visions: the pursuit of geometry in victorian England*, Boston, 1988.

[69] Ibid, s. 11.

Dagens Nyheter som av tidningsredaktionen fick titeln: ”Inte så himla viktigt att kunna matematik”. I denna artikel argumenterar en grupp matematiker för att matematik först och främst är en *specialitet*, på ungefär samma sätt som juridik, medicin och för den delen teknik, och att det är i denna bemärkelse den står i förbindelse med till exempel Sveriges tillväxt. I vardagen, skriver de, klarar sig tvärtom de flesta medborgare med ”mycket lite matematik”.[70] För dessa matematiker framstår matematiken som ett ganska handgripligt redskap, användbart i vissa specifika sammanhang, snarare än som något outgrundligt och sublimt. De ser den ”i fullt dagsljus”, som Žižek skriver,[71] och berörs därför inte av den skolmatematiska diskursen. Deras matematik är inte skolans.

Stöd ges också från det ofta observerade faktum att skolelever (och lärare!) är rörande överens om att matematik är något viktigt – men långt mindre säkra på *varför* det är så viktigt.[72] Den känsla de därmed ger uttryck för stämmer väl med de sublima objektens logik. De talar om matematiken som något som ”hänvisar” och som de känner mycket väl just som ”hänvisare”. Om denna matematik *vet* de, med största säkerhet, att den hänvisar till något mycket viktigt. Samtidigt erkänner de villigt att de inte vet något om *vad* det är matematiken hänvisar till. Man kan säga att dessa elever och lärare, som i skolan lärt sig vara intresserade av och tro på matematikens betydelse, tror genom att förutsätta att det finns någon annan som vet (mer). Med Žižek kan man säga att de tror att den store Andre vet vad matematiken hänvisar till och varför den är så viktig.

Skovsmose skriver som jag nämnt ovan om den enligt honom vanliga situation som består i att den personliga erfarenheten tycks motsäga det man lärt sig att tro på, det vill säga att man inte ser matematikens närvaro och dess användbarhet. Följande stycke, hämtat ur rapporten *Vuxna och matematik – ett livsviktigt ämne*, illustrerar denna ståndpunkt:

> Matematiken finns alltså överallt, men till synes ingenstans. Detta förhållande kallar Niss *matematikens relevansparadox:* objektivt är matematikens roll oerhört omfattande, men subjektivt för individen förblir denna roll osynlig och därmed framstår matematikkunskaper som irrelevanta.[73]

Žižeks kommentar angående relationen mellan ideologins ”sanning” och den personliga upplevelsen, att en ideologi ”har fullt ut lyckats när även de fakta som vid första anblicken motsäger den börjar fungera som ett argument i dess

---

[70] Erikson, et al., ”Inte så himla viktigt kunna matematik”.
[71] Žižek, *Ideologins sublima objekt*, s. 193.
[72] Se t.ex. Skovsmose, *Towards a philosophy of critical mathematics education*, s. 80–82.
[73] Gustafsson & Mouwitz, *Vuxna och matematik: ett livsviktigt ämne*, s. 56. Niss skriver om relevansparadoxen bland annat i Mogens Niss, ”Nogle perspektiver for matematikundervisningen i de gymnasiala uddannelser i 1990” *”Hvad er meningen med matematikundervisningen?” Fire artikler. IMFUFA tekst nr 36*, Roskilde, 1980, s. 10.

favör",[74] tycks träffa relevansparadoxen mitt i prick. Det som för den ovane betraktaren, som det står i gymnasieskolans kursplan, framstår som en frånvaro av matematik, sägs i själva verket vara en effekt av att matematiken är "osynlig" (kursplanen), eller som Skovsmose skriver, "dold".[75] Matematiken sägs bara kunna uppfattas av ett tränat öga. Detta blir därmed ytterligare ett argument för vikten av skolmatematisk undervisning. Precis som Žižek skriver har fakta – upplevelsen av att matematiken inte är närvarande och användbar – genom att konstitueras som orsakade av en sorts okunskap, vänts till skolmatematikens favör.

Skolmatematikens sublima objekt

Rubriken ovan – Skolmatematikens sublima objekt – skall förstås i plural. Skolmatematiken vimlar av sublima objekt. Matematiken i sig är kanske inte så fascinerande, men genom sin outgrundlighet skapar den utrymme för sådant som matematiskt tänkande, matematisk problemlösning, matematisk kreativitet, tillsammans med allt det andra som skolmatematiken så gärna vill bibringa eleverna. Det är dessa företeelser – jag kommer här att kalla dem *objekt* – som skolmatematiken kretsar kring.

Dessa objekt utgör en sorts översättningar och konkretiseringar av vad matematik innebär i skolan. Kort sagt omformar de den universella och abstrakta matematiken till mänskliga egenskaper, till saker man kan ha, vara och kunna. De utgör fästpunkter mellan eleven och matematiken, de sätt på vilka matematikens goda egenskaper kan komma dem till del. Sammantagna konstituerar de den matematikens skolsida som jag talade om ovan (s. 14). På samma gång konstituerar de den idealelev som skolmatematiken genom sin verksamhet vill skapa.

Vad man måste notera är dock att dessa positiva, eftersträvansvärda bilder bara kan framträda som sådana i förhållande till en i grunden bristfällig och på olika sätt patologisk verklighet. De matematiska egenskaperna kan bara framstå som eftersträvansvärda mot bakgrund av ett antagande om att de är något människor i allmänhet saknar, vill ha, och behöver.

Det är i denna uppsplittring av verkligheten, mellan ett mycket specifikt ideal, och en motsvarande lika specifik brist, som skolmatematiken finner sin uppgift. Man kan säga att de objekt jag talar om här genererar ett glapp som fascinerar och manar till handling.

Till saken hör att de inte manar till vilken handling som helst. Tvärtom reser de tämligen specifika krav på skolmatematikens utformning, krav som visar sig i det närmaste omöjliga att leva upp till. Objekten, den matematiska förståelsen och kreativiteten, kan inte föras över från lärare till elev och inte heller forceras fram (som kroppsstyrka genom fysisk träning). Istället är den

[74] Žižek, *Ideologins sublima objekt*, s. 59.
[75] Skolverket, *Kursplan i matematik för gymnasieskolan*; Skovsmose, *Towards a philosophy of critical mathematics education*, s. 94.

något som tar form i eleven, då hon får arbeta med saker som intresserar henne, väl valda uppgifter, under det att hon resonerar kring det hon gör, har roligt, men samtidigt anstränger sig och så vidare. Lite tillspetsat kan man säga att objekten bara kan skapas genom att skolmatematiken genom sin praktiska utformning bereder plats för dem. Om de sedan inte uppstår, så måste detta bero på att skolmatematiken inte åstadkommit de rätta förutsättningarna.

Och faktum är att de inte uppstår. Detta är ytterligare ett sätt att tala om kontrasten mellan skolan och matematiken. Skolmatematiken känner sitt ideal, men vet också med sig att den inte lever upp till det. Den vet att dess praktiker inte är sådana att de leder till det mål som matematikens skolsida konstituerar. Detta hänger i sin tur samman med att skolmatematikens många mätningar inte mäter *det*, som de borde mäta, utan något annat, vilket bidrar till att skjuta praktiken bort från det matematiska idealet. Som jag konstaterat ovan tror man i allmänhet inte på skolmatematiken, utan förhåller sig snarast till den som en ordning man är tvungen att acceptera.[76] Konsekvensen blir en sorts dubbel nedvärdering: dels konstituerar skolmatematiken eleven som i behov av hjälp, dels konstituerar den ”sig själv”, den instans som skall hjälpa eleven, som också den i behov av hjälp. Gapet mellan skolan och matematiken blir därmed väldigt stort, och massiva insatser tycks påkallade.

Här framträder en sorts skolmatematikens logik, som har varit relativt konstant under de senaste ungefär 150 åren. Logiken kan beskrivas på följande sätt. Matematik antas ha en *potential* att vara människor till nytta. Om människor ”möter” matematiken är det, antar man, naturligt för dem att finna den intressant och nyttig, och ta den till sig. I skolan kommer emellertid inte denna potential eleverna till del. Detta antas bero på att något *hindrar* potentialen från att *aktualiseras*. Hindret antas ligga i ”metoden”, det vill säga, något tillspetsat, i skolmatematiken själv. Skolmatematiken framställs som en trög oformlig massa, ärvd från gångna tider och skapad under inflytande av irrationella krav på bland annat disciplinering och underkastelse. Skolmatematiken ställer därmed sig själv inför den stora uppgiften att förändra sig, och vi ser här nödvändigheten av att de som arbetar med skolmatematik placerar sig själva vid sidan av allt det som skolmatematiken i praktiken är.

Ställd inför denna sorts logik föreslår Žižek en analys som kan delas in i två steg.[77] Det första steget motsvaras i vårt specifika fall av att visa att det ideal som skolmatematiken strävar mot är en effekt av skolmatematikens egen blick. Detta har vi i princip redan gjort. Det handlar om att visa att det bakom talet om matematiska kunskaper, matematisk förståelse och matematisk kreativitet, döljer sig en ”symbolisk maskin” av prestationsmätningar och differentierande betyg. Mer specifikt är det viktiga i detta

[76] Jmf. Sloterdijk, *Kritik av det cyniska förnuftet*, s. 27.
[77] Žižek, *Ideologins sublima objekt*, s. 87 och 145.

skede av analysen att visa att det *bortom* som skolmatematikens sublima objekt tycks hänvisa till, bara existerar som en effekt av deras funktion inom skolmatematiken. Det är alltså inte så att de skolmatematiska praktikerna misslyckas med att generera dessa objekt, och att prestationsmätningarna ”missar målet”. Tvärtom hör det till de sublima objektens natur att de bara kan existera i egenskap av ”missade”.

Det andra steget består i att visa att den fantasi som dessa objekt utgör, blott tjänar till att *dölja* det plågsamma faktum att skolmatematiken saknar rationell förankring och är i grunden ”orättvis”. Det väsentliga, och konceptuellt svåra, är att inse att det inte finns någonting bakom den stora rikedom av betydelser som i skolmatematikens värld omger matematiken och, lika viktigt, de matematiska egenskaper den vill bibringa eleverna.[78]

Låt mig för att illustrera detta ta ett mer konkret exempel: den *svagpresterande eleven* och denna elevs behov av *baskunskaper*. Dessa två moment utgör i princip ett hål (eleven) och det som skall stoppas i detta hål (baskunskaperna). I en serie av steg har man inom den svenska skolmatematiken försökt att bestämma vad det är för baskunskaper dessa elever egentligen behöver.[79] Tonen i dessa texter om baskunskaper är ofta kritisk; de pekar på hur skolmatematiken strävat och strävar mot ”fel” sorts baskunskaper och mynnar ut i krav på vetenskapligt förankrad förändring.

Vad vi måste inse, är att både idén om eleven som är i behov av baskunskaper, liksom dessa baskunskaper som sådana, uteslutande är ideologiska konstruktioner som tjänar till att göra skolmatematikens i sig meningslösa sortering möjlig att tala om på ett acceptabelt sätt. Den symboliska ordningen *behöver* – man kunde använda ordet *kräver* – den meningsskapande fantasin. Analysens andra steg består i att se skolmatematikens ”fantasieggande rikedom” av problem och möjliga lösningar som (blott) ett svar på detta krav.[80] Skolmatematikens intensiva kamp för att hjälpa eleverna, skall med andra ord snarast förstås som en kamp för att få samhället att framstå som en meningsfull helhet. Den svagpresterande eleven är inget hål; han eller hon är inte i behov av ”baskunskaper” för att kunna hantera sin vardag. Som Lave visat klarar sig de allra flesta utmärkt (utanför skolan), oberoende av skolans ansträngningar att hjälpa (se s. 14 ovan).

Det finns ingen motsägelse mellan denna insikt och konstaterandet av att det finns en skillnad mellan barn och vuxna, att olika vuxna kan olika saker, att det finns vissa saker som är bra att kunna, att förmåga alltid föregås av ett skede där man ”lär sig”, och så vidare. Poängen är att tal om svagpresterande elever och baskunskaper inte har med detta att göra. Att vissa elever måste hamna längst ner i den hierarki som skolmatematiken upprättar är en

[78] Ibid, s. 221.
[79] Skolöverstyrelsen, *Basfärdigheter i matematik*; Kilborn, *Vad vet fröken om baskunskaper?: matematik för skolan och samhället*; Myndigheten För Skolutveckling, *Baskunnande i matematik*.
[80] Žižek, *Ideologins sublima objekt*, s. 115.

strukturell nödvändighet. Genom att tala om dessa elever i termer av bristande baskunskaper, kan skolmatematiken förskjuta orsaken till detta faktum, från dess egna sorteringsmekanismer till eleverna själva. Fantasin säger att det är på grund av att eleverna i egenskap av individer saknar något, som de hamnar längst ner i hierarkin. Givet fantasin om ”denna svårgripbara egenskap som skiljer dem från andra människor”[81] kan skolmatematiken framställa sig själv som den instans som försöker hjälpa dem – i praktiken ofta elever som i en sociologisk terminologi skulle sägas tillhöra samhällets lägre skikt – samtidigt som den kontinuerligt och med obönhörlig konsekvens bidrar till att hindra dem från att ta sig fram i samhället.

När vi, som Žižek uttrycker det, ”genomkorsat den ideologiska fantasin”, upplever vi att skolmatematiken *saknar substans*. Vi ser att det problem den försökte lösa är dess egen skapelse och att det samma gäller det mål den strävade mot.

Žižek påpekar att vi alltid kan få hjälp att påvisa bristen, luckan, i en ideologi, med hjälp av en intern motsägelse. Det finns alltid, menar han, ett element som ställs utanför den logik som ideologin upprättar. I skolmatematikens fall utgör detta element givetvis matematiken. Ett sätt att visa på motsägelsen är att ta fasta på skolmatematikens ambition att forma eleverna till demokratiska medborgare, som tänker självständigt och kan anlägga ett kritiskt perspektiv på det samhälle de träder ut i efter skolan. Matematiken är nämligen undandragen från detta kritiska förhållningssätt. Att tänka fritt *är* inom skolmatematiken att tänka matematiskt.[82] På denna punkt är den skolmatematiska diskursen öppet dogmatisk. Grundskolan skall enligt kursplanen i matematik inte bara aktivt verka för att eleven ”utvecklar ett intresse för matematik” utan också få eleverna att *inse* att ”matematiken har spelat och spelar en viktig roll i olika kulturer och verksamheter”. I beskrivningarna av de mål som skall nås i grundskolan ingår att eleven, för betyget väl godkänd skall kunna ge ”exempel på hur matematiken utvecklats och använts genom historien och vilken betydelse den har i vår tid inom några olika områden”. För mycket väl godkänd krävs att eleven ”reflekterar över matematikens betydelse för kultur- och samhällsliv”.[83] Dessa krav skall förstås mot bakgrund av beskrivningen av ”ämnets karaktär och uppbyggnad” i gymnasieskolans kursplan, där man kan läsa att matematiken ”är en förutsättning för stora delar av samhällets utveckling och den genomsyrar hela samhället, ofta på ett sätt som är osynligt för den ovane betraktaren”.[84] Det råder med andra ord knappast någon tvekan om vilken typ av reflektioner det är som efterfrågas. I rapporten *Att lyfta matematiken*, den senast genomförda offentliga utredningen av den svenska skolmatematiken,

[81] Ibid, s. 104.
[82] Jmf. ibid, s. 101–103.
[83] Skolverket, *Kursplan i matematik för grundskolan.*
[84] Skolverket, *Kursplan i matematik för gymnasieskolan.*

står intresse för, och attityder till matematik i centrum. Det första stycket i deras första huvudförslag lyder: ”Stöd och utveckla aktiviteter som ökar intresset för och *insikterna om matematikens värde*, roll och betydelse i vardag, yrkesliv, vetenskap och samhälle”.[85] Formuleringen att det är ”insikt” om matematikens värde som efterfrågas känns igen från grundskolans kursplan. Den frihet som skolmatematiken vill bibringa eleverna är med andra ord i fråga om matematiken den högst begränsade friheten att välja att tro (det vill säga ingen frihet alls). I analogi med Žižeks resonemang kring arbetarens frihet inom den kapitalistiska ordningen, att ”fritt” sälja sin arbetskraft (med exploatering som nödvändig följd), kan den frihet skolmatematiken vill bibringa eleverna sägas vara en ”frihet” att bjuda ut sin förmåga att prestera till jämförelse inom det meritokratiska systemet – med utestängning av vissa och reproduktion av ett hierarkiskt samhälle som nödvändig följd. På ett imaginärt plan är matematiken undantagen från det aktiva medborgarskapets kritiska tänkande, på ett symboliskt plan skolmatematiken (och mer allmänt utbildningssystemet).

Matematiken som nodpunkt

En nodpunkt är ett ord som inte har någon egen betydelse, utan enbart fungerar som en förbindelselänk mellan andra ord. Det är ett ord som sammanfattar serier av andra ord och genom denna sammanfattning tycks fixera deras innebörd. En nodpunkt uppfattas emellertid inte som betydelselös, utan tvärtom som ett koncentrat av alla de betydelser den sammanfattar.

Žižek använder ”kommunism” som exempel på en nodpunkt. Givet att vi tror på kommunismen, det vill säga förhåller oss till kommunism som till en nodpunkt, så får ord som demokrati, feminism, ekologism (några av Žižeks exempel) en specifik innebörd: ”'verklig demokrati' står i motsats till 'borgerlig formell demokrati', vilken avfärdas som en legal form av exploatering [...] kvinnoförtryck är effekten av en klassbestämd arbetsdelning [...] nedbrytningen av naturliga resurser är den logiska konsekvensen av en profitstyrd kapitalistisk produktion”, och så vidare.[86] Genom nodpunkten ”kommunism” så kan denna serie kampfrågor betraktas som blott aspekter av en övergripande kamp, nämligen kampen för kommunism. Termen tycks lyfta frågorna till ett högre plan och på något sätt förklara sambandet mellan dem. På ett sätt är detta också vad som sker: idén om kommunism blir en sorts förklaring. Förklaringseffekten har emellertid inte sitt ursprung i en

[85] Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken*, s. 18 (min kursivering). Det är lockande att i detta sammanhang jämföra med ambitionerna kring sekelskiftet 1800 att ”höja gudsfruktan i landet” genom offentlig undervisning (Nils Andersson, *1878 års katekes: debatten om katekesens form och innehåll 1810–1878*, Lund, 1973, s. 7). Jag menar att det i båda fallen är fråga om att ingjuta respekt hos folket för en högre makt: idag matematiken vars värde måste inses, då Gud som måste fruktas.

[86] Žižek, *Ideologins sublima objekt*, s. 102.

innebörd i termen kommunism som föregår de specifika kampfrågorna. Poängen med att se kommunism som en nodpunkt är tvärtom att se hur betydelseeffekten uppstår genom en att de specifika kampfrågorna så att säga *finner sig själva* i kommunismen och mer specifikt finner sig själva som samma sak, och på så sätt binds samman. Detta utan att termen kommunism tillför särskilt mycket mer än just denna reflektionsmöjlighet.

Matematikens insida och utsida

Inom den skolmatematiska diskursen fungerar termen matematik som en nodpunkt, eller annorlunda uttryckt: matematik är den nodpunkt som knyter samman den skolmatematiska diskursen. Detta är tydligt i citaten på sidan 14 ovan, där matematik får utgöra en förutsättning för ”kampfrågorna” självförtroende, demokrati, tillväxt och livslångt lärande.[87] Matematiken ger ett specifikt svar på frågan om hur man skall sträva efter demokrati och tillväxt, nämligen genom att ”satsa på matematiken”. Jag skall här ge en mer exakt beskrivning av hur matematik fungerar som en nodpunkt, genom att skilja mellan vad jag kallar matematikens insida (eller skolsida) respektive dess utsida.[88] Denna distinktion leder till tre sammanhängande problemområden.

För det första sambandet mellan matematikens insida och utsida, vilken motsvarar sambandet mellan skolan och verkligheten utanför skolan. Matematiken tjänar här som en förbindelselänk mellan två delar av den sociala verkligheten. Som jag påpekat flera gånger ovan, får skolmatematiken sin mening genom att syfta till kunskaper i matematik (samt matematisk förståelse, matematisk problemlösningsförmåga, etcetera). Dessa antas eleverna ta med sig från skolan, ut i verkligheten. Väsentligt är här att relationen mellan en specifik skolmatematisk verksamhet, till exempel övning på att lösa andragradsekvationer, i den skolmatematiska diskursen aldrig knyts direkt till förmågan att hantera en viss motsvarande problematik utanför skolan. Förmågan att lösa andragradsekvationer betraktas alltid som blott en aspekt av den större helhet som matematiken utgör. Och det är denna helhet som antas vara relevant utanför skolan.

För det andra matematikens funktion inom den del av den skolmatematiska diskursen som kretsar kring verkligheten utanför skolan. Det är denna funktion som exemplifieras i citaten på sidan 14. Här får matematiken utgöra en sorts reflektionsyta, som är ren såtillvida att det inte finns några gränser för vilka samhälleliga frågor den kan reflektera. Allt som har positivt värde i samhället kan relativt oproblematiskt knytas till

---

[87] *Hög tid för matematik*, s. 25.

[88] Detta innebär att jag i viss mån lämnar det sätt att använda nodpunktsbegreppet som Žižek gör i *Ideologins sublima objekt*, och även den definition i Ernesto Laclau & Chantal Mouffe, *Hegemony & socialist strategy*, London, 1985, s. 93–148 som Žižek i stor utsträckning utgår från. Se även Laclaus bidrag i Judith Butler, Slavoj Žižek & Ernesto Laclau, *Contingency, hegemony, universality: contemporary dialogues on the left*, London, 2000.

matematiken. I *Att lyfta matematiken* blir detta särskilt tydligt i ett avsnitt med rubriken ”Brottslighet”, där man kan läsa följande:

> Våra förslag kan indirekt minska brottsligheten på så sätt att risken för tidig utslagning och arbetslöshet minskar om våra ungdomar redan i grundskolan får relevant stöd och stimulans för att utveckla bl.a. sitt matematikkunnande. Som tidigare nämnts utestänger ej godkända resultat i matematik från många studievägar och yrkesutbildningar. Även inom folk- och vuxenutbildningen är ångest och blockeringar inför ämnet vanliga, vilket kan minska möjligheter till omskolning och vidareutbildning. Arbetslöshet, sviktande självförtroende och socialt utanförskap kan i sin tur bädda för kriminalitet.[89]

Matematiken täcker så att säga in hela samhället, från det allra mest eftersträvansvärda (demokrati, självförtroende, tillväxt), till det mest problematiska (arbetslöshet, ångest, utanförskap, kriminalitet). Relativt explicit i den skolmatematiska diskursen, konstitueras därmed en satsning på matematiken som synonymt med en satsning på själva samhället. På den svårhanterliga frågan: ”Hur kan vi göra samhället bättre?” ger den skolmatematiska diskursen ett konkret svar: ”Satsa på matematiken!”

Här måste vi minnas distinktionen mellan imaginär och symbolisk identifikation. Matematiken konstitueras som en imaginär sammanfattning av allt som är gott i samhället. Bakom denna fantasi står den sociala (”symboliska”) institution som skolmatematiken utgör. I den skolmatematiska diskursen fungerar därmed matematiken som en sorts sammanfattande representant för skolmatematiken. Det samhället ”ser” när den vänder sig till skolmatematiken, är med andra ord – om allt sker på skolmatematikens villkor – matematiken i egenskap av sammanfattande reflektionsyta. Man kan därmed säga att skolmatematiken använder matematiken för att i viss mån dölja sin inre verklighet, eller åtminstone bestämma villkoren för hur denna verklighet skall uppfattas. Denna inre verklighet reflekteras emellertid också den, dock på ett lite annat sätt, i matematiken.

För det tredje kan man därför tala om en matematikens insida, eller skolsida. Detta är matematiken så som den framträder för lärare, elever och andra som arbetar med matematik i skolan, utan ambition att representera denna verksamhet för en allmän offentlighet. Jag har beskrivit denna sida av matematiken i avsnittet om ”matematikens sublima objekt” ovan (s. 14). Det är en matematik som å ena sidan utgör det enhetliga mål som all verksamhet strävar mot, men å andra sidan sönderfaller i en mängd fascinerande kontaktpunkter där matematiken möter eleverna: matematisk problemlösningsförmåga, matematisk förståelse, matematisk kreativitet, och så vidare. Genom dessa sublima objekt, som jag kallar dem, utgör matematiken en sorts reflektionsyta även sedd inifrån skolan, men denna yta har andra egenskaper

[89] Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken*, s. 175.

än matematikens blanka utsida. Den är fascinerande och fungerar som den skolmatematiska verksamhetens drivkraft. Och den fascinerar genom att konstituera en svårdefinierad, men till synes utforskningsbar, distinktion inom den skolmatematiska verkligheten mellan det rätta, som svarar mot matematikens krav, och allt det andra, alldagliga, som måste förändras. Matematikens skolsida är med andra ord den instans som säger hur skolmatematiken måste vara utformad. Den utgör den måttstock i förhållande till vilken skolmatematiken värderar sig själv. För att knyta an till problemställningen, är denna matematik ursprunget till skolmatematikens anspråk på elevens tid och anspråket på att behöva möta eleverna när de är relativt unga. Det är matematikens skolsida som konstituerar idealet för de skolmatematiska undervisningspraktikerna – kanske inte de metoder som i praktiken används, men likväl de relativt snarlika metoder man *vill* använda.[90] Det är elevernas möte med matematikens skolsida som utgör temat för matematikdidaktisk forskning.

På ett sätt som motsvarar hur skolmatematiken framställer sig själv för samhället genom matematiken, utgör matematikens skolsida skolmatematikens representation av verkligheten utanför skolan. Tydligast är detta då det gäller skolmatematikens prestationsmätningar. Man kunde tänka sig en typ av utbildning där elever under en tid får ägna sig åt att försöka lära sig något, för att sedan "släppas lösa" i de verksamheter (utanför skolan) deras lärande syftar till att förbereda dem för. Dessa skulle då utgöra den prövning som tydliggjorde vad eleverna lärt sig. De som visade sig ha otillräckliga kunskaper (eller vad man väljer att kalla det) skulle få återvända till skolan, för att lära sig mer.

Så fungerar inte skolmatematiken. Den organiserar tvärtom sina egna prövningar. Dessa är tänkta att motsvara den verklighet skolmatematiken utgör en förberedelse för. Istället för att ställas direkt inför verkligheten utanför skolan, ställs eleverna, i skolan, inför matematikens skolsida, vilken får fungera som deras måttstock.

Väsentligt är här att matematikens skolsida, i egenskap av sådan måttstock, tycks "innehålla" verkligheten, vilken därmed tycks representeras av matematiken. Dowling talar om detta i termer av *rekontextualisering*.[91] Skolmatematikens prövningar handlar på ett plan om verkligheten, men en verklighet beskriven på skolmatematikens villkor. Det är en verklighet där matematiken är ständigt närvarande och överallt användbar. Dowling visar hur skolmatematiken, genom att låta denna matematiserade verklighet vara ständigt närvarande i undervisningen, förmedlar ett antal myter rörande matematikens relation till verkligheten. I min terminologi kan man säga att skolmatematiken konstituerar en speciell (imaginär) bild av verkligheten, som dels gör att den skolmatematiska undervisningen tycks handla om

---

[90] Se ovan s. 34.

[91] Dowling, *The sociology of mathematics education*, s. 9–10, 136–137.

verkligheten, dels att skolmatematikens prövningar framstår som prövningar av i vilken mån eleverna svarar upp mot verklighetens krav.

Matematiken som referensobjekt

Låt mig säga lite mer om matematikens roll i förhållande till skolmatematikens prestationsmätningar. I egenskap av samhällsövergripande social institution upprättar utbildningssystemet jämförbarhet mellan prestationer i matematik. Genom centralt konstruerade prov, med stoff helt konstant geografiskt, och relativt konstant över tid, kan hela ålderskohorter *ordnas*, med utgångspunkt från en viss typ av skolmatematiska prestationer. Värdet av en viss prestation bestäms helt relationellt, dvs. *innebörden* av en prestation är uteslutande relationell. Detta är i princip något alla vet.

Det intressanta är att resultaten på dessa prestationsmätningar tveklöst framstår som något mer än blott instrument för sortering. De framstår som mått på individuella egenskaper; något man har eller är, oberoende av sociala relationer. Skillnaden är ytterst betydelsefull. Man skulle kunna se ”kunskaper i matematik” som blott en praktisk sammanfattande benämning av hela det system av mätningar genom vilka skolmatematiken bidrar till utbildningssystemets sorterande funktion. Dessa kunskaper skulle då inte tillmätas någon egen existens, utan identifieras med det man i praktiken mäter. Tvärtom uppfattas emellertid skolmatematikens mätningar som blott approximationer av en typ av kunskaper som antas föregå och existera oberoende av de mätande praktikerna. På ett sätt som jag beskrivit flera gånger ovan, konstituerar matematiken ett ideal för vad som borde mätas, vilket ständigt diskvalificerar de mätningar som i praktiken görs och därmed nödvändiggör en kontinuerlig förändringsprocess.

Vårt förhållande till kunskaper i matematik liknar därmed på flera sätt vårt förhållande till pengar. Pengars värde är naturligtvis helt bestämt av sociala relationer. Att ha en viss mängd pengar motsvarar att stå i ett visst förhållande till samhällets övriga individer. Två moderna individer som möts, och som har olika tillgång till pengar, uppfattar emellertid inte detta faktum som en social relation eller, mer tillspetsat, som ett socialt dominansförhållande. Vi möts istället som fria likvärdiga demokratiska medborgare, med ”olika mycket pengar”.[92] Pengarna upprättar ett sorts avstånd mellan oss själva som individer och det uppenbart hierarkiska samhället. Vi hanterar pengar som om de vore en i sig själv värdefull substans som enskilda individer helt enkelt har olika mycket av och som så att säga bortom vår kontroll bestämmer sociala dominansförhållanden. Marx och Žižek talar om denna egenskap hos pengarna, att möjliggöra ett sorts bortseende från det sociala,

[92] Žižek, *Ideologins sublima objekt*, s. 30: ”Vad som i realiteten är en strukturell, relationell effekt, framstår som den direkta egenskapen hos en av dess beståndsdelar, som om denna egenskap tillhörde den utanför dess plats i strukturen.”

med hjälp av termen *fetisch*.[93] En fetisch är något som gör det möjligt för oss att på ett plan veta något, men på ett annat plan – mer specifikt handlingens plan – agera *som om* vi inte visste. Fetischen utgör en sorts outgrundlig representant som får oss att sluta tänka på det den representerar.

I denna bemärkelse utgör kunskaper en fetisch. Samhället är, på en *symbolisk-mekanisk* nivå, i betydande utsträckning strukturerat med utgångspunkt från systematiskt organiserade prestationsmätningar som reglerar ungdomars banor genom utbildningssystemet. Mätningarna är sådana att de reproducerar samhällets hierarkiska struktur. Som jag skrev i inledningen till mitt teoriavsnitt är detta något som de allra flesta känner till – inte bara att prestationsmätningarna fyller en sorterande funktion, utan också att de i högst begränsad utsträckning korresponderar med skolans högre mål. Men när två individer med olika betyg möts, uppfattar de som regel likväl inte detta faktum som resultatet av ett meningslöst socialt dominansförhållande. Tvärtom framstår det som orsakat av deras olika förmåga att skaffa sig kunskaper i skolan. Precis som pengar, framstår kunskaper som något individer har, oberoende av sociala relationer. Istället för att tänka: ”Han kan lösa mattetal, därför har han fått högt betyg i matematik; detta kallar vi 'matematikkunskaper'”, tänker vi precis tvärtom: ”han har matematikkunskaper, därför har han fått högt betyg i matematik”.[94]

Man kan säga att skolmatematiken upprättar matematiken som ett socialt referensobjekt. Den fungerar som en fast punkt, runt vilken skolmatematiken med sina mätningar fördelar eleverna. Matematiken får sin tyngd, sin oomkullrunkelighet, genom att identifieras med verkligheten som sådan. Denna identifikation understöds, som vi sett, av skolmatematikens undervisningspraktiker – i sin tur understödda av den skolmatematiska diskursen. Matematikens funktion som nodpunkt är förbunden med en sorts inversion, där vi istället för att se matematiken och de matematiska kunskapernas centralitet som socialt bestämd, ser det sociala som orsakat av en på förhand given central matematik.

Kampen om hegemoni

I det närmast ovanstående resonemanget har jag växlat mellan att tala om skola och kunskaper i allmänhet, och de mer specifikt bestämda kunskaper i matematik som utgör mitt egentliga fokus. Denna tvetydighet förtjänar ytterligare uppmärksamhet. Det är uppenbart att mina resonemang är tillämpbara även på andra skolämnen än matematik. För är inte också till exempel svenska, engelska, kemi, fysik och historia fixpunkter runt vilka skolan fördelar eleverna? Man måste här skilja mellan två nivåer: en

---

[93] Det relevanta stället hos Marx är avsnittet "Der Fetischcharakter der Ware und sein Geheimnis" [1867] i första kapitlet av första boken av *Das Kapital* (återgivet t.ex. i Boris Goldenberg (ed.), *Karl Marx: Ausgewählte Schriften*, München, 1960).

[94] Žižek, *Ideologins sublima objekt*, s. 39: ”Det abstrakta, universella värdet framstår med andra ord som en genuin substans, vilken successivt förkroppsligar sig själv i en serie konkreta ting”.

grundläggande nivå, som har med själva idén om ”kunskaper” att göra, och en nivå som tar hänsyn till kunskapernas föremål.

Tar vi matematik som exempel kan man på den nivå som tar hänsyn till kunskapernas föremål säga att matematiken fyller två funktioner (med fokus på dess utsida snarare än dess insida). För det första konstituerar den samhället som en helhet, genom att vara något alla individer står i relation till, något vi alla vet mer eller mindre om. Som jag nämnt ovan, existerar matematiken i denna bemärkelse framför allt i egenskap av *något vi vet oss inte veta något om*; vi har sedan länge glömt det (i och för sig i allmänhet mycket viktiga, men för just mig mindre centrala) vi lärde oss i skolan, etcetera. För det andra konstituerar den själva verkligheten som en helhet, genom att vara det verktyg (eller vad man väljer att kalla det) med vars hjälp *hela* verkligheten kan beskrivas och bemästras. Det finns ingen del av verkligheten som ligger bortom det som kan förstås med hjälp av matematik. Matematiken konstituerar verkligheten som ”homogen”, som alltigenom och med hjälp av en enhetlig metod hanterlig.[95]

Mer allmänt kan man säga att matematiken, genom att finnas både i oss (i form av kunskaper) och i verkligheten, gör det möjligt för oss att känna igen verkligheten som *vår* verklighet. Matematiken förbinder oss med den verklighet vi tänker oss vara en del av. Givetvis tänker vi oss denna relation på så sätt att vi genom matematiken förstår och bemästrar denna vår verklighet. Min analys pekar emellertid på att förhållandet inte är så enkelt. I egenskap av att höra till verkligheten tycks nämligen matematiken lika mycket dominera oss, som vi använder den för att dominera verkligheten. Matematiken ställer krav på hur vårt samhälle skall vara utformat. Den kräver inte bara en omfattande skolmatematik, utan anger dessutom (i form av det jag kallar dess skolsida) hur denna skolmatematik måste vara utformad: den måste ta en stor del av barns och ungdomars tid i anspråk, den kräver att få ta form i dessa barn och ungdomar genom en viss typ av ”upptäckande övning”, och så vidare. Den upprättar sig själv (genom sin utsida) som ett ideal för den kompetenta och kunniga (kreativa, problemlösandet, etcetera) människan, och kräver därmed att få fungera som utgångspunkt för ett meritokratiskt system. Den grekisk-franske filosofen Cornelius Castoriades skriver:

> Från Platon till den moderna liberalismen och till marxismen har den politiska filosofin förpestats av det operativa postulatet att det skulle finnas en total, ”rationell” (och följaktligen ”meningsfull”) ordning i världen, liksom av detta postulats oundvikliga följdsats: att det skulle

---

[95] Jmf. Amos Funkenstein, *Theology and the scientific imagination from the middle ages to the seventeenth century*, Princeton, N.J., 1986, s. 28–29, 73, där Funkenstein skriver om uppkomsten av idén om en homogen verklighet, ”governed always and everywhere by the same unequivocal, that is, mathematical, laws” (s. 73).

> finnas en ordning i människans göranden och låtanden som är kopplad till ordningen i världen [...][96]

Det tycks mig som om matematik är ett av namnen på den förment rationella ordning i världen Castoriadis talar om. Vi utformar vårt samhälle som om matematiken och dess världsordning vore oss given som nödvändig att rätta sig efter. Min analys ligger helt i linje med Castoriadis, som säger att det inte alls är så, utan att den värld vi upplever som vår värld måste förstås som vår egen *autonoma* skapelse.[97] Vi är i denna bemärkelse fria och kan inte avsäga oss ansvaret för vår samhällsordning med hänvisning till en ordning bortom vår kontroll, matematisk eller annan.

Mitt snäva fokus på matematiken riskerar att dölja den mer grundläggande nivå som utgör de matematiska kunskapernas förutsättning. Jag syftar här på själva idén att relationen mellan människan och naturen är förmedlad genom kunskaper. Låt mig för ett ögonblick lämna matematiken och säga något om detta.

En rad sammanlänkade händelser strax efter sekelskiftet 1900 gör att man kan tala om ett paradigmskifte i synen på kunskaper. Latinet och de klassiska språken i allmänhet förlorade då sin centrala ställning i läroverket.[98] Nästan precis samtidigt förlorade katekesen och mer allmänt religionsundervisningen sin centrala ställning i folkskolan.[99] Dessa två förändringar speglade en mer allmän internationell rörelse bort från det religiösa och bort från bildning som övergripande utbildningsmål. I deras ställe trädde vetenskapen och den vetenskapliga metoden in.[100] Max Weber talade om fenomenet i termer av ”avtrollning”.[101]

Med Castoriadis kan man säga att det som vid denna tid övergavs var en specifik enhetsontologi som förband människan med hennes verklighet.[102] Med utgångspunkt från det svenska utbildningssystemets utveckling i allmänhet vid denna tid, och matematikens förändrade ställning i synnerhet, kan man emellertid se hur denna enhetsontologi, under loppet av 1900-talets

---

[96] Cornelius Castoriadis, *Filosofi, politik, autonomi*, Stockholm; Stehag, 1995, s. 51.
[97] Jmf. ibid, s. 161–162.
[98] Bo Lindberg, *Humanism och vetenskap: den klassiska filologien i Sverige från 1800-talets början till andra världskriget*, Grillby; Stockholm, 1987, s. 232.
[99] Andersson, *1878 års katekes: debatten om katekesens form och innehåll 1810–1878*, s. 197–204.
[100] Se i synnerhet Karl Pearson, *The grammar of science*, Gloucester, Mass., 1957 [1892], s. 6–12,25–26 och 107–112.
[101] Max Weber, *Vetenskap och politik*, Göteborg, 1977 [1919], s. 20. Intressant nog passar det Weber säger om denna avtrollning ganska bra ihop med mina resonemang kring sublima objekt och nodpunkter. Han säger nämligen att det karaktäristiska för tillvaron i den nya avtrollade världen inte alls är att alla vet så mycket mer än tidigare om ”de livsvillkor man lever under”. Karaktäristisk är istället: ”en kunskap om eller tro på, att om man bara *vill*, så *kan* man när som helst ta reda på [vad som helst]”. Den avtrollade världen är med andra ord, så tolkar jag Weber, en värld baserad på tro lika mycket som tidigare – men en tro på att det alltid, bortom den personliga tron, finns ett för mig okänt (och möjligen ännu blott potentiellt) vetenskapligt vetande. Det vill säga i mitt specifika fall: *alla tror sig veta att någon annan vet* vad matematik är, hur dess roll inom teknik och vetenskap kan preciseras, sambandet mellan skolan och verkligheten utanför skolan, och så vidare.
[102] Castoriadis, *Filosofi, politik, autonomi*, s. 51.

första hälft, ersätts av en *annan* lika enhetlig ontologi, nämligen den ontologi inom vilken kunskaper – i motsats till (mer eller mindre explicit underförstått religiös) bildning – står i centrum. Min hypotes är att denna förändring hänger samman med det samhällsövergripande utbildningssystemets framväxt. Det är nämligen tydligt hur detta utbildningssystem öppnade ett homogent socialt rum inom vilket det var möjligt för ämnesföreträdare att, på ett helt annat sätt än tidigare, ta strid för sitt eget ämne och dess plats inom det framväxande utbildningssystemet.

Avgörande är här öppningen av själva det rum inom vilket dessa strider ägde rum under 1900-talets första hälft. Detta socialt bestämda homogena rum korresponderar nämligen, menar jag, med ett samtidigt öppnade av den lika homogena verklighet som utbildningssystemet från och med nu skulle förbereda det uppväxande släktet inför. Striderna handlade på en tämligen explicit nivå om *vad denna verklighet ställde för krav*: var det krav på matematik? Eller hembygdskunskap? Eller historia?

Min poäng här är emellertid att striden om hegemoni så att säga redan var avgjord på förhand när det rum öppnats inom vilka dessa partikulära strider kunde äga rum.[103] Verkligheten hade då nämligen redan blivit den vetenskapliga verklighet som bara kan bemästras med hjälp av vetenskapligt förankrade kunskaper; en verklighet som sönderfaller i en mängd skikt, vilka svarar mot vetenskapens och skolans ämnen, och på en mer allmän samhällelig nivå, av experter respektive konsumenter av expertis.[104]

För att knyta an till mitt övergripande syfte utgör skolmatematikens diskurs om matematiken ett av många uttryck för den allmänna moderna tendensen att, med hänvisning till skolans och vetenskapens gemensamma ämnen, undandra frågor rörande samhällets organisation från det politiska samtalet. Genom att visa att denna matematik i själva verket är vår egen skapelse, eller som jag uttrycker det ”skolans matematik”, och att de krav den tycks ställa har sitt ursprung i samhället och inte i naturen, vill jag bidra till att återföra dem till politiken.

[103] Jmf. Butler, Žižek & Laclau, *Contingency, hegemony, universality: contemporary dialogues on the left*, s. 108.
[104] Jmf. Magali Sarfatti Larson, ”In the matter of experts and professionals, or How impossible it is to leave nothing unsaid” i Rolf Torstendahl & Michael Burrage (eds.), *The formation of professions: knowledge, state and strategy*, London, 1990, s. 38–40.

4. Metod

Frågan är om den ovanstående beskrivningen av skolan och matematiken är trovärdig. Risken finns att det ser ut som om jag tagit en på förhand given ideologikritisk formel och med hänvisning till ett rätt magert material klistrat den på skolmatematiken. Det går lätt att *säga* att det inte ”finns något bakom” alla till synes självklara idéer om behov av grundläggande matematikutbildning och att dessa istället utgör en ”ideologisk fantasi” som tjänar till att ”dölja” det obehagliga faktum att skolmatematiken utgör en ”meningslös sorteringsmaskin”. Men är det verkligen så?

Ja, enligt min uppfattning är det så. Men denna slutsats är inte grundad enbart i en samläsning av dagens skolmatematik med psykoanalytiskt inspirerad samhällsfilosofi. Min teori är framför allt resultatet av ett arbete med skolmatematikens historia. I det här avsnittet förklarar jag vari detta arbete bestått och hur det kommer att presenteras i den strax följande historiska redogörelsen. Syftet med detta metodavsnitt är dubbelt: Å ena sidan att säga något om hur jag i praktiken har gått till väga, inte hur jag tänkte och planerade, utan vad som *hände*. Å andra sidan att förklara hur det jag gjort kommit att hänga samman.

Utgångspunkter

Låt mig alltså inleda med att beskriva vad jag gjort. Mitt arbete med den svenska skolmatematiken började som en sociologisk undersökning inspirerad av Pierre Bourdieu. Jag gjorde intervjuer med matematiker, lärare, forskare inom matematikdidaktik och andra, för att kartlägga vad jag hoppades skulle kunna beskrivas som *ett rum av ståndpunkter* rörande matematiken. Detta arbete resulterade bland annat i den lilla uppsatsen ”Matematikens betydelse” publicerad i *Fältanteckningar. Utbildnings- och kultursociologiska texter tillägnade Donald Broady*.[1]

Den rent sociologiska forskningsansatsen ledde dock in i svårigheter. De hade att göra med det objekt – matematiken – vilket utgjorde föremålet för den mångskiftande uppsättningen ståndpunkter som skulle kartläggas. En

[1] Sverker Lundin, ”Matematikens betydelse” i Mikael Börjesson et al. (eds.), *Fältanteckningar. Utbildnings- och kultursociologiska texter tillägnade Donald Broady*, Uppsala, 2006.

historisk kontext tycktes nödvändig. Men när de första stegen tagits i historisk riktning, öppnades ett fält av frågor som ganska snart kom att överskugga de rent sociologiska. Jag blev nämligen i det närmaste chockad av diskrepansen mellan de bilder av det förflutna som framträdde i min sociologiska empiri (vilka jag själv hade tagit för givna), och de det förflutnas bilder av sin egen samtid som jag hittade i skoltidningar, rapporter och utredningar, inledningsvis från det inte särskilt avlägsna 1970-talet.

I och med detta inledde jag en resa bakåt i tiden, utan andra mål än att ersätta den falska bild av skolmatematikens förflutna som jag inte längre kunde tro på, med något annat. Jag började gå igenom material som av någon anledning verkade lovande, från pärm till pärm. I praktiken rörde jag mig bakåt stegvis. Jag valde en tidpunkt jag trodde skulle räcka för att nå den eftersökta förståelsen och läste mig sedan "framåt" genom det material om skolmatematiken jag kunde hitta. Jag tänkte att 1950-talet borde räcka som bakgrund för att förstå den nya matematiken på 1960- och 1970-talet, men det gjorde det inte. Tvärtom kastades jag då rakt in i heta diskussioner om matematikens plats på schemat i läroverket och om allt för svåra studentskrivningar. Varför denna hetta? Sekelskiftet blev nästa anhalt. Men då stod tydligen någon slags reform av skolmatematiken på diskutanternas önskelista. "Reform av vad?" ville jag givetvis veta. Ett genombrott nåddes då jag kunde jämföra Roloff Anderssons *Aritmetica Tironica*, vars första upplaga publicerades 1779, med Per Anton von Zweigbergks *Lärobok i räknekonsten* från 1839.[2] Varför kommer att framgå i det följande. Vad gäller tidskrifter hade jag då bland annat gått igenom följande: *Ny Tidskrift för Lärare och Uppfostrare* (1849-1850), *Pedagogisk Tidskrift* (1865-1968), *Svensk Läraretidning* (1883-1946), *Tidskrift för matematik och fysik* (1868-1874), *Elementa* (1938-1980), *Tidning för Sveriges Läroverk* (1904-1962), *Verdandi* (1886-1913), *Folkskolans Vän* (1885-1946). Inom parentes anges vilka årgångar jag tagit del av.

Det tycktes likväl nödvändigt att gå ytterligare något längre tillbaka i tiden, och för perioden före mitten av 1800-talet utgick jag från det material som finns indexerat i LIBRIS. För perioden från 1720-talet, fram till omkring 1850, visade sig mängden relevant publicerat material vara långt mindre än senare. För denna period har min empiri huvudsakligen utgjorts av tidens svenska "läroböcker" (inom citationstecken för att undvika anakronistiska jämförelser med dagens läroböcker) i matematik. Jag kunde relativt tidigt skaffa mig en

[2] Roloff Andersson, *Arithmetica tironica; eller Kort och grundelig anwisning, at practice lära all nödwändig hus- och handels-räkning; efter then nu för tiden mäst brukeliga och fördelaktigaste läro-methode. Til allmänhetens- och i synnerhet scholarnes: tjenst och nytto. Efter sednaste kongl. maj:ts mynt-ordning samlad af Roloff Andersson. Med allernådigste privilegio.*, Stockholm, 1779, respektive Per Anton Von Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel: med facit-tabeller*, Stockholm, 1839.

överblick över de läroböcker som fick större spridning,[3] och har sedan tagit del av merparten av dem som publicerades under perioden. Därefter inleddes en långsam resa tillbaka, genom det material jag samlat in, mot den skolmatematik vi har idag – en resa där det om och om igen blev nödvändigt att återvända till tidigare perioder, samt utvidga och ändra undersökningens gränser, för att samla bitar möjliga att sammanfoga till en meningsfull helhet.

Historiografisk översikt

Låt mig nu, med detta sagt om hur det empiriska materialet i praktiken kommit till, sätta 1850-talet som startdatum för en liten historiografisk översikt, vilken sedan kan fungera som bakgrund till redovisningen av tidigare forskning om skolmatematikens historia. Den historiska redogörelse som strax följer kommer nämligen att visa att det var på 1850-talet som skolmatematiken började uppfatta sitt förflutna som defekt, på grund av ”felaktiga metoder”.[4]

Skolmatematikens historiska utgångspunkt förläggs då till några år kring 1840, då det publicerades en rad läroböcker i aritmetik (och i viss mån algebra) vars huvudsakliga innehåll utgjordes av *regler* och *övningsuppgifter*.[5] Till saken hör att dessa böcker, vilka relativt snart kom att betraktas som ”traditionella”, inte alls hade någon längre historia av användning bakom sig. Tvärtom kan deras säregna utformning till stor del förklaras med att de var avsedda att användas inom olika typer av växelundervisning, en särskild sorts undervisningsmetod vilken introducerades i Sverige under 1800-talets första decennier.[6]

Från 1860-talet fram till slutet av 1880-talet utgör denna historiska utgångspunkt en återkommande referens. Det blir nästan obligatoriskt att

[3] En slutsats jag dragit med utgångspunkt från antalet upplagor, samt hänvisningar i senare litteratur. I synnerhet syftar jag här på de böcker som nämns i 1820-års skolordning, *Kongl. maj:ts förnyade nådiga skol-ordning*, Stockholm, 1821, s. 29–30.

[4] Tidiga exempel är Bergius, ”Utkast till Lärobok i Aritmetiken för skolor i allmänhet och folkskolor i synnerhet, af J. Otterström”samt förordet till Axel Theodor Bergius, *Elementarkurs i räknekonsten*, Stockholm, 1850. Tidig i sitt kritiska ställningstagande var även C. A. Nyström vilket bland annat framgår av förordet till hans sedermera mycket populära *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran, med talrika öfningsexempel och särskildt häftad facitbok*, Stockholm, 1853. Även t.ex. Lars Phragmén, ”Om undervisningen i Mathematik med hufvudsakligt afseende på vigten av den s.k. hufvudräkningen”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1868 och Frans Wilhelm Hultman, ”Anmälan af tio stycken räkneböcker”, *Tidskrift för matematik och fysik*, 1868.

[5] Hit hör framför allt Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten.* Än mer extrem i sin utformning är Carl Jonas Love Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, Stockholm, 1832. Den blev dock aldrig tillnärmelsevis lika populär som Zwegbergks räknebok. Vad gäller algebra kom E. G. Björling, *Elementar-lärobok i Algebra*, Stockholm, 1832 att bli trendsättande. Liksom läroböckerna i aritmetik hade den stort fokus på regler. Det skulle dock dröja till början av 1900-talet, då diskussionen rörande matematikundervisningen i läroverken tog fart, innan reglerna i algebran blev föremål för den typ av kritik som redan på 1860-talet började riktas mot regler i räkneundervisningen.

[6] Se kapitel 5 nedan.

argumentera för egna läroböcker genom att visa hur de tar avstånd från regler att lära sig utantill och övningsuppgifter att lösa mekaniskt.[7] Denna genomgående negativa karaktäristik av ett relativt närliggande förflutet kan jämföras med 1820 års skolordning, där det talas om den ”i alla tider förträfflige Celsii Arithmetik”, syftandes på en lärobok som då hade nästan 100 år på nacken.[8] Det är alltså tydligt att synen på skolmatematikens förflutna förändrades kraftigt mellan 1820 och 1860.

I problemställningen ovan (på s. 14) gav jag ett exempel på hur man vid denna tid kunde hänvisa till det förflutna. Låt mig komplettera denna bild med en samtida beskrivning av matematiken. Följande stycke är hämtat ur artikeln ”Om skolundervisningen i matematik” författad av läroverksläraren och läroboksförfattaren A. T. Bergius och införd i *Pedagogisk Tidskrift* 1868:

> Matematiken ansågs redan hos Grekerna på den tid, då deras kultur stod i sin skönaste blomstring, såsom en nödvändig förberedelse för verldsvisheten, och har väl sedermera i alla tider betraktats såsom det undervisningsämne, som företrädesvis är egnadt att befordra den förståndsutveckling, som hvarje skola vill meddela den bildningssökande lärjungen. Liksom för all skolundervisning denna utveckling af förståndet eller af förmågan att med säkerhet bilda begrepp och slutledningar bör utgöra den hufvudsynpunkt, dit alla bemödanden skola riktas, så bör äfven särskilt den matematiska skolundervisningen så ordnas, att den i första rummet afser befordrandet af den bildning, som den till följd af sina inneboende egenskaper i så hög grad förmår meddela.[9]

Man kan här se en rad termer som hänvisar till det man värdesatte i tidens samhälle. Nyhumanismen stod fortfarande högt i kurs och Bergius förknippar i linje med nyhumanismens ideal matematiken med den Grekiska kulturens ”skönaste blomstring”, liksom den oerhört centrala termen *bildning*.[10] Matematiken får också stå för ”förstånd” och ”säkerhet att bilda begrepp” – allt detta i egenskap av ”sina inneboende egenskaper”. Det finns en strukturell likhet mellan Bergius hänvisning till en matematik med inneboende egenskaper och det sätt på vilket matematiken beskrivs i dagens skolmatematiska diskurs. Egenskaperna är även idag inneboende, men de har förändrats från bildning och säkerhet att bilda begrepp, till befordrande av demokrati och tillväxt.

Kring sekelskiftet 1900 förloras 1830- och 1840-talets läroböcker ur sikte, samtidigt som man börjar tala om en ”statisk” och ”traditionell” matematikundervisning, utan närmare precisering. Vid denna tid introduceras

---

[7] Två undantag från denna regel är Frans Wilhelm Hultman, ”Svenska aritmetikens historia”, *Tidskrift för matematik och fysik*, 1868–1871, 1874 och E. M. Dalin, *Bidrag till de matematiska vetenskapernas historia i Sverige före 1679*, Uppsala, 1875.

[8] *Kongl. maj:ts förnyade nådiga skol-ordning*, s. 29–30.

[9] Axel Theodor Bergius, ”Om skolundervisningen i Matematik”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1868.

[10] Angående nyhumanismen i Sverige, se Niléhn, *Nyhumanism och medborgarfostran.*

termen ”skolmatematik”,[11] och man hör för första gången det sedan dess många gånger upprepade påståendet om skolmatematiken att ”alla medgifver dess nödvändighet”, men att få har klart för sig ”hvarför [den] är nödvändig”.[12] Jag ser detta som ett uttryck för att skolmatematiken i egenskap av social institution vid denna tidpunkt började tas för given. Detta förgivettagande åtföljdes av ett sökande efter en rationell förankring kombinerat med cynisk distans, eftersom man såg sig tvingad att anpassa sig till omständigheter vars logik och ursprung man inte kunde förstå.

Under första halvan av 1900-talet kan man sedan tala om ett slags korttidsminne, sträckande sig några tiotal år bakåt i tiden, vilket följer med den skolmatematiska diskussionen som det traditionella förflutna man strävar efter att frigöra sig från.[13] Med Kuhn kan man säga att skolmatematiken under denna tid förstod sig själv som *normal*; man såg sin verksamhet som en stadig rörelse mot något bättre.[14]

Mot slutet av 1950-talet skedde ett skifte inom den svenska skolmatematiska diskursen som innebar att den blev ”vetenskaplig”, så som denna term vid denna tid förstods i USA.[15] Tidigare hade erfarenhet av egen undervisning utgjort den huvudsaklig utgångspunkten för ställningstaganden inom skolmatematiken. Nu blev sådan erfarenhet noll och intet värd i förhållande till metodiskt stringenta vetenskapliga experiment, presenterade på ett vetenskapligt sätt – givetvis på engelska. Denna förändring ledde till en

[11] Till exempel i Petrini, ”Matematiken i skolan”.

[12] Anna Rönström, ”Om en praktisk anordning af räkneundervisningen”, *Verdandi*, 1894.

[13] Karaktäristisk för skolmatematikens sätt att förstå sitt förflutna är Petrini, ”Matematiken i skolan”. Mer nyanserade är Dahlgren, ”Die Mathematik an den Volksschulen und volksschullehrerseminarien Schwedens” och Edvard Göransson, ”Bidrag till kännedom om undervisningen i Sverige under 1800-talet” i O. G. A. Hahr & J. M. Lindqvist (ed.), *Redogörelse för Stockholms samgymnasium*, Stockholm, 1905. Se även Edvard Göransson, ”Nyare riktlinjer för matematikundervisningen” *Årsredogörelse för högre realläroverket å Norrmalm*, Stockholm, 1907.

[14] Se t.ex. Abel Bergsten, *Folkskolans räkneundervisning: kurser och arbetssätt: en utredning*, Lund, 1939, s. 5–8. Recensioner av läroböcker i matematik från denna tid är ofta tämligen intetsägande, något som observeras i Johan Prytz, *Speaking of geometry: a study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905–1962, with a special focus on professional debates*, Uppsala, 2007, s. 51. Detta fenomen kan ses som ett tecken på skolmatematikens normalitet (i Kuhns mening) under denna period.

[15] Detta skifte sammanfaller för övrigt med Olof Magnes inträde på den skolmatematiska scenen, med artiklar som: Olof Magne, ”Sjunkande räknefärdighet”, *Folkskollärarnas tidning*, nr 45, 1952 och Olof Magne, ”Undersökning om räknefärdigheten”, *Folkskollärarnas tidning*, nr 51–52, 1953. Rubrikerna till några av de artiklar och recensioner Magne publicerade innan hans fokus förflyttades till skolmatematiken ger en bild både av Magnes egen rörelse, och av vad det var han tog med sig till den skolmatematiska diskursen: ”Psykoterapi i medicinsk praktik” (1946), ”Hur människan utvecklas” (1948), ”Studier i barnets andliga utveckling” (1948), ”Intelligensproven” (1949), ”Pedagogisk idébrytning i U. S. A.” (1949), ”Hur människans psyke fungerar” (1950) och ”Felplacerade sinnesslöa” (1951). De två nyckelorden är *mätning* och *psyke*.

försvagning av det historiska intresset.[16] Man kan tala om en slags tömning av det förflutna på empiriskt innehåll. Från att tidigare ha beskrivit det förflutna som en rörelse mot den moderna samtiden, kan man vid denna tid snarare tala om upprättandet av en dikotomi mellan tradition och modernitet, där det förflutna helt förkastades. Kulmen på detta synsätt utgjordes av den nya matematiken (*the modern mathematics movement*) under 1960- och början av 1970-talet. Följande citat, hämtat från en artikel skriven av en av den nya matematikens mer framträdande talesmän: Matts Håstad, är ett typiskt exempel på hur man vid denna tid kunde uttrycka sig rörande matematikens betydelse:

> Utvecklingen inom forskning, industri, näringsliv, samfärdsel och förvaltning gör att allt fler personalkategorier möter situationer, där matematiska begrepp och metoder används. Dagens samhällsliv är fyllt av komplicerade tankeproblem där kännedom om matematiska modeller är väsentlig. Man kan nämna funktioner, diagram, statistik och sannolikhetslära.[17]

Den relativt statiska och tillbakablickande bildning som värderades så högt då Bergius skrev sin artikel, har nu ersatts av en tro på forskning och utveckling. Men även här visar sig matematiken motsvara samhällets behov, nu genom sina begrepp och metoder. Vi ser i Bergius och Håstads texter två bilder av matematikens blanka utsida, som speglar samhällets skiftande ideal.

Karaktäristiskt för den nya matematiken var ambitionen att skapa en ny skolmatematik som vilade på vetenskaplig grund. Under 1970-talets lopp blev det allt klarare att detta projekt skulle misslyckas. Efter det att entusiasmen ebbat ut, följde en period av förnyat historiskt intresse då flera av dem som varit verksamma under den nya matematikens era försökte förstå vad det var som hade gått snett.[18] Dessa historiska reflektioner var i allmänhet knutna till skedet kring 1900-talets mitt, och reproducerade i stort sett den nya matematikens bild av tiden före 1950-talet som ”statisk tradition”.

Under 1980-talet börjar fragment ur den svenska skolmatematikens äldre historia tas upp i den skolmatematiska diskursen. Det är emellertid inte fråga om något återknytande till det förflutna, utan tvärtom ett hänvisande till det förflutna som distinkt annorlunda än nuet. Typiskt för detta historiska

---

[16] Till undantagen hör Jan Unenge, ”Hundra års skolmatematik i Pedagogisk Tidskrift”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1964 och Gustaf Kaleen, *Sveriges första folkskollärarförening: ett bidrag till den pedagogiska och didaktiska diskussionen vid mitten av 1800-talet*, Stockholm, 1966 som innehåller ett ganska långt avsnitt om ”Räkning, geometri och bokföring” (s. 296–312).

[17] Matts Håstad, ”Förslag till ny matematikkurs i grundskolan”, *Elementa*, 1966.

[18] Matts Håstad, *Matematikutbildningen från grundskola till teknisk högskola i går – idag – i morgon*, Stockholm, 1978; Margareta Kristiansson, *Matematikkunskaper Lgr 62, Lgr 69*, Göteborg, 1979; Jan Unenge, *Skolmatematiken i går, i dag och i morgon: –med mina ögon sett*, Stockholm, 1999; Leif Hellström, *Undervisningsmetodisk förändring i matematik: villkor och möjligheter*, Malmö, 1985. Delvis undantagen från regeln att endast skedet kring mitten av 1900-talet behandlas är Olof Magne, *Teorier för folkundervisningen i matematik*, Malmö, 1986.

intresse är att det vänder sig mycket långt tillbaka, eller fokuserar enskilda personer och detaljer, utan att relatera dem till deras historiska kontext.[19] Samtidigt börjar man åter använda termen ”tradition” för att hänvisa till det nära förflutna på ungefär samma sätt som man gjorde under första halvan av 1900-talet. Detta blir dock givetvis lite problematiskt i och med att det förflutna nu innefattar den nya matematiken, vilken svårligen kan reduceras till blott tradition. Det tycks träffande att kalla detta tillstånd postmodernt.

Kring sekelskiftet 2000 har det uppstått utrymme för historieskrivning med den nya matematiken som utgångspunkt.[20] Vår tid har därmed vissa likheter med andra halvan av 1800-talet, då man liksom nu var tämligen överens om hur långt tillbaka samtidshistorien skulle sträcka sig. Vår tids tillbakablickar har även det gemensamt med i synnerhet 1880-talets, att de ser skolmatematikens utveckling som en kamp mot rader av hinder vilka hela tiden gör att de högre idealen inte kan realiseras.

En viktig fråga är om den forskning kring skolmatematikens historia som bedrivits under senare år kan ordnas in i denna översikt. I viss mån kan den det. Låt mig visa detta med hänvisning till internationell forskning.

Min ingång till den internationella forskningen om skolmatematikens historia har varit två forskningsöversikter av Gert, publicerade i tidskriften *Pedagogica Historica* 2006, tillsammans med en bibliografi sammanställd av samme Schubring.[21] Gert Schubring är en auktoritet på området, och i artikeln ”Researching into the history of teaching and learning mathematics: the state of the art”, beskriver han, som titeln anger, forskningens tillstånd 2006. Artikeln inleds med en motivering till varför man över huvud taget bör studera skolmatematikens historia. Detta argument lyder som följer:

---

[19] Jag tänker här t.ex. på de små historiska notiser och artiklar som fanns införda i *Nämnaren*, t.ex. Per Häggmark, ”Skolmatematik för hundra år sedan”, *Nämnaren*, nr 3, 1984. Till denna genre hör även de något senare artiklarna om skolmatematikern K. P. Nordlund i Bengt Johansson & Inger Wistedt, *Problemlösning*, Göteborg, 1991 och Bengt Johansson & Inger Wistedt, *Tal och räkning 1*, Göteborg, 1991. Hit hör även Bengt Johanssons nyutgivning: *Minnen och dokument. Aurelius' räknelära från 1614: nyutgåva av den första tryckta läroboken i matematik som skrivits på svenska*, Uppsala, 1995 [1614] samt Staffan Selander, ”Från geometri till aritmetik: 1700-talets skolmatematik” i Madeleine Löwing et al. (ed.), *Vänbok till Wiggo Kilborn*, Göteborg, 2000. Eventuellt kan även Johan Prytz, ”'Moderna' idéer från förr och nu”, *Nämnaren*, nr 1, 2003 föras hit. Från regeln att det historiska intresset inte knyts till nuet måste man undanta Bengt Johanssons återknytande till 1900-talets första hälft, med artiklar om Fritz Wigforss och K. G. Jonsson, t.ex. ”Sveriges första forskare i matematikdidaktik”, *Nämnaren*, nr 3, 1986.

[20] Emanuelsson, *Svårt att lära – lätt att undervisa?* samt Wiggo Kilborn, ”Synen på baskunskaper i ett tidsperspektiv” i Myndigheten för skolutveckling (ed.), *Baskunnande i matematik*, Stockholm, 2003.

[21] Gert Schubring, ”Introduction. History of teaching and learning mathematics”, *Pedagogica Historica*, vol. 42, nr 4&5, 2006; Gert Schubring, ”Researching into the history of teaching and learning mathematics: the state of the art”, *Pedagogica Historica*, vol. 42, nr 4&5, 2006. Bibliografin fanns våren 2008 tillgänlig online på hemsidan för tidskriften *The international journal for the history of mathematics education.*

> Since the present situation is the product of a historical process, the evolution informs the mathematics education regarding political, social and cultural constraints to improving mathematics instruction. Practically all the research questions in mathematics education have a historical dimension that too often, however, remains implicit, or is treated too superficially. Research can be improved by explicit consciousness of the history of teaching and learning mathematics. And, what is probably even more important, the history of mathematics instruction should constitute one of the dimensions of the professional knowledge of mathematics teachers. In order to be able to handle the problems they encounter in their professional life, mathematics teachers should know how their profession emerged historically, how it developed and which types of problems were encountered during this development, and what obstacles had to be overcome for the effective establishment of mathematics teaching.[22]

Schubring beskriver nutida matematikundervisningen som effektiv och som ett resultat av en historisk evolution. En central plats i Schubrings fortsatta framställning intar en dikotomi mellan religion och kunskap, där matematik betraktas som synonym med kunskap. En viktig uppgift för historikern är, menar Schubring, att visa hur staten, vilken ofta varit tätt sammanvävd med religiösa intressen, på olika sätt förhindrat att kunskapen (det vill säga matematiken) tagit plats i skolans läroplaner. Schubring tar för givet att skolmatematikens historia är en process av successiv modernisering, genom vilken matematiken fått sin rättmätigt centrala plats i utbildningssystemet (med demokratisering som följd), och ser därmed historikerns uppgift som att klarlägga vad som gjort att detta tagit så lång tid.[23] Jag hoppas det framgår att han i och med detta klart placerar sig inom ramarna för den retoriska figur jag redogjort för ovan.

Forskning om den svenska skolmatematikens historia

Det är alltså tydligt att även forskning om skolmatematikens historia måste hanteras med försiktighet. 2007 publicerades de två första svenska avhandlingarna om den svenska skolmatematikens historia. Båda ger viktiga bidrag till vetandet som den svenska skolmatematiken historia och det är därför på sin plats med en diskussion av var de står i förhållande till den ovanstående historiografin. Jag skall först säga något om Reza Hatamis

---

[22] Schubring, ”Researching into the History ofTeaching and Learning Mathematics: the state of the art”.

[23] Typisk för denna sorts forskning är även Karen D. Michalowica & Arthur C. Howard, ”Pedagogy in text: an analysis of mathematics texts from the nineteenth century” i Jeremy Kilpatrick & George M. A. Stanic (eds.), *A history of school mathematics*, Reston, VA, 2003. Beskrivningarna av läromedel i denna bok är informativa och sprider ljus över svenska förhållanden, såtillvida att de visar att mycket av det som hände i Sverige under 1800-talet vad gäller skolmatematik, hände ungefär samtidigt i USA. Däremot är de slutsatser författarna drar av förloppet de beskriver bestämda av deras normativa perspektiv.

Reguladetri. En retorisk räknemetod speglad i svenska läromedel från 1600-talet till början av 1900-talet,[24] för att sedan diskutera John Prytz *Speaking of Geometry: a study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates.*[25]

Styrkan i Hatamis avhandling ligger i den grundlighet med vilken han tar sig an sitt historiska material. Han talar med rätta om detta material som ett arkeologiskt fynd och jag delar helhjärtat Hatamis upptäckarglädje i fråga om den svenska skolmatematikens bortglömda och misstolkade förflutna.[26]

Hatami visar hur en specifik metod inom aritmetiken, *Regula de Tri*,[27] behandlats i några tiotal böcker som använts för undervisning i räkning. Han behandlar en tidsperiod från 1600-talet fram till mitten av 1900-talet, då *Regula de Tri* förlorade sin plats i den svenska skolmatematiken. Under denna period identifierar han både förändringar över tid och skillnader mellan olika samtida läroböckers behandlingssätt. Hans observationer då det gäller dessa skillnader stämmer bra med dem jag gjort med utgångspunkt från mitt eget material, och i synnerhet vad gäller 1600-talets räkneläror (av vilka jag bara tagit del av ett fåtal) har jag haft stor nytta av Hatamis redogörelse.

Hatami drar, med utgångspunkt från sitt material, slutsatsen att den kritik som kring mitten av 1900-talet riktades mot *Regula de Tri* i stor utsträckning var orättvis.[28] Intressant nog ser Hatami istället det tidiga 1800-talet som en undervisningsmetodisk höjdpunkt.[29] Jag kan se flera poänger med denna slutsats. Det var en tid då den svenska skolmatematiken ännu inte börjat rikta sig till yngre barn och därmed inte heller tagit intryck av de (enligt min mening, för den matematiska undervisningen föga gynnsamma) pedagogiska idéer som växte fram i anslutning till det problem som barnuppfostran ansågs utgöra under merparten av 1800-talet. Samtidigt var matematik inget nytt undervisningsämne kring sekelskiftet 1800. Tvärtom hade det genomgått en påtaglig undervisningsmetodisk utveckling under andra halvan av 1700-talet.[30] Resultatet hade blivit en skolmatematisk undervisning som, bortsett från allt det jag har att säga om dess relation till verkligheten utanför skolan, förmodligen på ett ganska effektivt sätt bibringade de elever den riktade sig till en förståelse av hur *Regula de Tri* kan användas för att lösa en viss typ av problem.

Jag vill här nämna en observation Hatami gör rörande relationen mellan ”mekanisk räkning” och ”förståelse” i den skolmatematiska diskursen. Han

---

[24] Reza Hatami, *Reguladetri: en retorisk räknemetod speglad i svenska läromedel från 1600-talet till början av 1900-talet*, Växjö, 2007.
[25] Prytz, *Speaking of Geometry*.
[26] Hatami, *Reguladetri*, s. 198.
[27] Se kapitel 5 och 8 nedan. Metoden säger hur man utifrån antagande om proportionalitet, med hjälp av tre kända tal, kan finna det fjärde.
[28] Hatami, *Reguladetri*, s. 196.
[29] Ibid, s. 190.
[30] Se kapitel 7 nedan.

noterar att man kring mitten av 1950-talet hade en väldigt kritisk inställning till mekanisk räkning och att man gärna ville att eleverna själva skulle ”finna samband” inom matematiken, för att på så sätt inte bara lära sig dem utantill. Hatami påpekar i anslutning till denna ambition att matematikens samband tagit mänskligheten ”lång tid att upptäcka” och att det därför inte är rimligt att kräva att barnen skall (åter)upptäcka dem på egen hand. Detta orimliga krav ser han som en bidragande orsak till skolmatematikens samhällsreproducerande funktion och att den ”varit en plåga för många barn och ungdomar under de senaste 50 åren”.[31]

Vad Hatami talar om här, kallades fram till inledningen av den nya matematikens era för *den heuristiska metoden* och den är intimt sammanvävd med bildningstänkandet. Den kallades även ”sokratisk” och en variant av metoden beskrivs till exempel i Rousseaus *Émile*.[32] Den går ut just på att man inte skall tala om för eleven vad man vill att han eller hon skall lära sig, utan istället – på ett sätt eller annat – få honom eller henne att *upptäcka* kunskaperna. Jag är helt enig med Hatami i slutsatsen att denna metod knappast är eller någonsin varit eleverna till någon större nytta.[33] Hans observation rörande den heuristiska metoden utgör ett bra exempel på hur han, genom att kombinera en beskrivning av olika metoders historia med deras förtjänster och nackdelar, bidrar till att nyansera bilden av den svenska skolmatematikens historia.

Givet dessa förtjänster är det emellertid också nödvändigt att rikta viss kritik mot Hatamis sätt att förhålla sig till skolmatematiken på ett övergripande plan. Hatamis ansluter sig tämligen helhjärtat till den skolmatematiska diskursens syn på matematiken och skolan. Han talar om vikten av ”begreppsförståelse” och nödvändigheten av att elever får ”träna matematiskt tänkande”.[34] Hans syfte är delvis instrumentellt: att ”ge yrkesverksamma matematiklärare och lärarstudenter ett stöd i undervisningen”.[35] Trots det historiska djupet hos Hatamis material, misstolkar han enligt min mening den oerhört centrala förändring i synen på kunskaper i matematik

[31] Hatami, *Reguladetri*, s. 202.
[32] Jean Jacques Rousseau, *Emil eller om uppfostran*, Uppsala, 1912 [1762], s. 216.
[33] Det tycks mig som att upptäckten av fenomenet ”lotsning” kring slutet av 1970-talet måste ses som en återupptäckt av den då alldeles nyss bortglömda heuristiken, se Urban Dahllöf, ”Bränningar, lotsning och norska efterdyningar” *Vänbok till Wiggo Kilborn*, Göteborg, 2001 för en liten forskningsöversikt. Den heuristiska metoden (om man lite förenklande likställer heuristik med lotsning) var föremål för kritik långt tidigare, t.ex. i Gullbrand Elowsson, ”Om den aritmetiska undervisningsmetoden. 1 Diskussion om undervisningen i aritmetik”, *Tidskrift för matematik och fysik*, 1869. Angående idén om att eleverna skulle upptäcka matematiska samband skriver Elowson: ”Man skulle nämligen derigenom komma till den fordran, att disciplarne borde genom sitt tankearbete deducera de regler hoc est den teori, som är – ett seklernas verk. Tacksamma för hvad vi emottagit från förgångna tider böra vi för vår undervisningsmetod uppställa såsom regel: att göra läroämnet begripligt”. Analysen ligger väl i linje med Hatamis resonemang.
[34] Hatami, *Reguladetri*, s. 16–17, 167.
[35] Ibid, s. 15.

som skedde under första halvan av 1800-talet. Jag behandlar detta skede i kapitel 9-10 nedan och kort sagt var det då som bildningstänkandet tog plats i den svenska skolan. Det var i och med detta sätt att tänka som det upprättades en dikotomi mellan å ena sidan det mekaniska regelföljandet och å andra sidan begreppslig förståelse. Det var också då som skolmatematikens förflutna relativt plötsligt började beskrivas som ”mekaniskt”. Min bestämda uppfattning är att denna karaktäristik är en effekt av bildningstänkandets tämligen speciella kunskapssyn och därför inte kan användas som måttstock på de tidigare böckernas kvalitet, om det över huvud taget går att tänka sig en objektiv måttstock för böcker om räkning. Hatami ansluter sig emellertid till bildningstänkandets synsätt, vilket som jag visat ovan legat relativt fast från 1860-talet till idag. Som exempel kan anföras att han ser läroverksläraren Frans Hultmans kritik av de tidigare räknelärorna, uttryckt på 1870-talet, som framsynt och skriver: ”Idag accepteras inte sådana läroböcker som bara ger färdiga regler utan förklaringar. Men när de skrevs ansågs de vara lämpliga och progressiva”.[36] I själva verket var Hultman inte alls särskilt framsynt. Tvärtom är hans ståndpunkt ett tidstypiskt uttryck för bildningstänkandets syn på skolmatematikens förflutna.[37] Mot slutet av sin avhandling skriver Hatami att det kring mitten av 1800-talet växande fokus på begrepp och förståelse skall betraktas som ett uttryck för tilltagande ”demokratisering”. Han skriver: ”Eleverna behöver inte kunna bara använda regler utan nu måste de förstå varför de fungerar. De måste lära sig vara självständiga medborgare som passar in i det nya samhället.” Detta är en anakronism inspirerad av vår egen tids skolmatematiska diskurs.

Låt mig nu säga något om den andra svenska avhandlingen om den svenska skolmatematikens historia som publicerades 2007, författad av Johan Prytz.[38] Den behandlar en väl avgränsad period i den svenska skolmatematikens historia, men innehåller dessutom både en historisk bakgrund som sträcker sig in i 1800-talets diskussioner, och en omfattande litteraturöversikt rörande internationell forskning kring den grundläggande geometriundervisningens historia i andra länder än Sverige.

I fokus för Prytz avhandling står den euklidiska geometrin. Kännetecknande för denna typ av matematik är dess logiskt stringenta uppbyggnad. I Euklides *Elementa*, de böcker från vilka den euklidiska geometrin utgår, byggs geometrin upp steg för steg, från inledande *axiom* – utgångspunkter som måste tas för givna – med hjälp av *satser* (påståenden) som alla *bevisas*, enligt väl definierade regler. Satser och bevis hämtade från Euklides *Elementa* utgjorde en central del av den (högre) svenska skolmatematiken under hela 1800-talet. Prytz beskriver den diskussion som föregick det skede strax efter

---

[36] Ibid, s. 25. Se även s. 185. Jmf. Prytz, ”'Moderna' idéer från förr och nu”.
[37] Se kapitel 10 nedan.
[38] Prytz, *Speaking of Geometry*.

mitten av 1900-talet då denna typ av matematik försvann från den svenska skolmatematiken (för övrigt samtidigt som ovan nämnda *Regula de Tri*).

Prytz beskriver å ena sidan hur man talade om de mål man ville att skolmatematiken i allmänhet – och undervisningen i euklidisk geometri i synnerhet – skulle leda till, och å den andra vilka metoder som förespråkades för att dessa mål skulle nås. Med utgångspunkt från tidskriftsartiklar och metodanvisningar identifierar Prytz en rad skiljelinjer i diskussionen. Ytterligare en dimension tillförs sedan genom en analys av några av diskutanternas läroböcker, samt även de examinationer kurserna i euklidisk geometri ledde fram till. Resultatet blir en rik bild av den svenska skolmatematiken under första halvan av 1900-talet. Liksom Hatami ger därmed Prytz ett bidrag till justerandet av den endimensionella bild av denna tidsperiod som målades upp av den nya matematikens talesmän och som fortfarande i stor utsträckning tas för given.[39]

I inledningen till sin avhandling skriver Prytz att han vill förstå *meningen* med de argument som framfördes i anslutning till den euklidiska geometrin. Han skriver: ”what objects or phenomena did the persons mean by the crucial words and expressions used in the argumentation?”[40] Denna fråga besvaras enligt min mening inte på något tillfredställande sätt i avhandlingen. Frågan skapar emellertid en öppning för att relatera Prytz undersökning till min egen. Med utgångspunkt från min empiri och mitt synsätt framstår framför allt Prytz analyser och problematiseringar – i motsats till hans beskrivningar – av det han finner i sin empiri som i flera avseenden otillfredsställande. Mer exakt menar jag att mycket finns att vinna genom att utsträcka analysen i tre olika riktningar:

För det första kan analysen utsträckas i fråga om skolmatematikens högre mål. Prytz konstaterar i sin avhandling att de flesta, både i Sverige och utomlands, var överens om att geometristudier är bra *övning för tänkandet*.[41] Till detta kommer, i Sverige, en ambition att med geometrins hjälp förbättra elevernas moraliska omdöme,[42] lära dem att tänka kritiskt, lära dem hantera språket på ett omdömesgillt sätt, träna deras rumsliga intuition, samt ge dem kunskaper användbara i vardags- och arbetsliv.[43] Prytz observerar att dessa argument förekom. Jag saknar emellertid en distanserande och problematiserande analys.

Argumenten kring geometrins potential att leda till allmänna högre mål har en lång historia, med ursprung i Antiken, och i modern tid i renässansen. I Sverige kan man följa en argumentation för geometristudier åtminstone från

[39] Ibid, s. 23, 194.
[40] Ibid, s. 12
[41] Ibid, s. 37–38.
[42] Ibid, s. 60.
[43] Ibid, s. 75, 123 och 189–190.

och med början av 1700-talet.[44] Givet detta längre tidsperspektiv blir det, menar jag, tydligt hur Euklides *Elementa* utgjort en bricka i ett spel om vad ungdomar skall ägna sig åt i skolan, vilken typ av ”tänkande” som skall värderas högst och i sista hand om vem som har *rätt* i fråga om sanningen, Gud, människan och verkligheten. Det längre tidsperspektivet tydliggör att den skolmatematiska diskursen måste problematiseras i dess egenskap av ”framställning” av den skolmatematiska praktiken eller för att tala med Bourdieu, som *social strategi.*

Prytz egen position i förhållande till de anspråk som i hans empiriska material reses på geometristudiernas positiva egenskaper är ofta oklar. Han skriver till exempel: ”The ability to reason effectively, to think critically, and to treat concepts and language carefully is indeed useful in other areas as well, not just mathematics”.[45] Av Prytz fortsatta resonemang, som handlar om huruvida dessa mål var ämnade bara för en studiebegåvad elit, eller för en bredare elevpopulation, får man intrycket att Prytz relativt oproblematiskt sätter ett likhetstecken mellan dessa diskursivt uttryckta mål och vad undervisningen i praktiken ledde till. Detta intryck får stöd av att Prytz på ett annat ställe använder de mål som lärarna hoppades att deras undervisning skulle leda till, som en sorts måttstock för värdet av deras undervisning.[46]

Att det ibland är svårt att skilja Prytz egen röst från den mångfald av röster från första halvan av 1900-talet som han låter komma till tals tror jag beror på en viss samstämmighet mellan de historiska rösterna och Prytz egen, vilken bottnar i en gemensam syn på matematiken. Prytz skriver redan på första sidan i sin avhandling att han ser symbolisk algebra och analytisk geometri som oundgängliga delar av ”economics, engineering, science and other related practices”, och att han menar att matematiken ”banat väg” för dessa delar av samhällslivet.[47] Längre fram skriver han, angående 1950-talet, att vikten av vetenskap och teknik för samhällets välstånd då var generellt ”accepterad”.[48] Det sammantagna intrycket blir att Prytz i fråga om matematiken i stor utsträckning ansluter sig till den skolmatematiska diskursen och att detta är orsaken till det jag uppfattar som en otydlighet rörande Prytz position.

För det andra kan analysen utsträckas i fråga om sätten att nå skolmatematikens högre mål. Prytz redovisar med hög detaljnivå en rad argumentationslinjer i vilka *åskådlighet* och *självverksamhet* spelar en central roll.[49] Han observerar att det var kritiken mot ”mekaniken” som utgjorde

---

[44] Se kapitel 6 nedan, och t.ex. förordet till Mårten Strömer, *De Sex Första Böckerna Af Euklidis Elementa, eller grundeliga inledning til geometrien*, Uppsala, 1748 [1744] samt Fredric Palmqvist, *Tal, om mathematiska vetenskapernas nytta i allmänna lefvernet*, Stockholm, 1754.
[45] Prytz, *Speaking of Geometry*, s. 75.
[46] Ibid, s. 123.
[47] Ibid, s. 9.
[48] Ibid, s. 30.
[49] Ibid, s. 56–57 och 66–72.

diskussionens samlande punkt.[50] Mer exakt visar Prytz hur man ställde ”mekanisk” undervisning, vilken man menade var kontraproduktiv och ledde till att eleverna förlorade intresset för matematik, mot att göra undervisningen intresseväckande, att ge studenterna en grundlig förståelse, att låta studenterna vara självverksamma och bibringa dem en förmåga till ”inre åskådning”.[51] Vidare observerar Prytz en trend i geometriläroböckernas utformning, av att förklaringar i text ersätts av allt fler övningsuppgifter, något som hänger samman med ambitionen att göra studenterna ”självverksamma”.[52] Alla dessa i och för sig helt riktiga observationer måste, menar jag, förstås mot bakgrund av skolmatematikens utveckling under 1800-talet. Prytz menar att Fritz Wigforss, en av de personer som vid denna tid gav uttryck åt skolmatematikens undervisningsmetodiska ideal, var en person som sammanfattade vad lärarna redan gjorde och gav denna praktik en teoretisk formulering. Detta är på ett plan korrekt, men nästan exakt samma ståndpunkt hade formulerats långt tidigare. Prytz hänvisar i och för sig, via sekundärlitteratur, till Pestalozzi och Herbart, men detta ger ingen uppfattning om vilken genomgripande betydelse deras idéer haft för den svenska skolmatematiken.[53] Det var i själva verket redan kring sekelskiftet 1800 som den ”mekaniska” undervisningsmetoden på ett systematiskt sätt började ställas mot åskådning och självverksamhet.[54] Denna dikotomi löper sedan som en röd tråd genom den svenska skolmatematiska diskussionen under 1800-talet, med rader av mer eller mindre systematiska uttryck.[55]

Trenden av ökande antal övningsuppgifter i geometri, på bekostnad av den löpande texten, har sitt ursprung i månandet om elevernas självverksamhet. I början av 1900-talet kallade man, som Prytz skriver, denna metod för ”arbetsmetoden”.[56] Den har dock ett uppenbart ursprung i vad som under 1800-talet kallades den ”heuristiska” metoden. Den diskuterades fram och tillbaka och, som jag nämnde ovan i anslutning till Hatamis avhandling, utsattes även för skarp kritik. Utan denna historiska bakgrund riskerar man att uppfatta det tidiga 1900-talets självförståelse av att starta något nytt, som en bild av hur det faktiskt var.

[50] Ibid, s. 68.
[51] Ibid, s. 69.
[52] Ibid, s. 108–109, 111 och 124.
[53] Ibid, s. 45.
[54] Se kapitel 9 nedan. Jag har exemplifierat bildningsidéerna med några texter av Pestalozzi: *Lienhard och Gertrud: en bok för folket*, Göteborg, 1890 [1781/1787]; *Huru Gertrud undervisar sina barn: ett försök att gifva mödrarna ledning att sjelfva undervisa sina barn, i bref*, Göteborg, 1895 [1801] och *Enslingens aftonstund*, Lund, 1901 [1780]. Se även den tidiga översättningen: Carl Adolph Agardh & Magnus Bruzelius, *Pestalozzi's Elementar-böcker*, Lund, 1808.
[55] Som sagt ovan, i synnerhet efter 1850, då diskussionen kring folkundervisning även börjat innefatta frågor kring matematikens ställning.
[56] Prytz, *Speaking of Geometry*, s. 109. Se även t.ex. Elsa Ericsson, *Barnens räknearbete under de sex första skolåren: metodiska anvisningar för lärare*, Stockholm, 1928, i synnerhet Karl Petter Nordlunds förord.

Prytz beskriver det skede under vilket den euklidiska geometrin slutligen försvann från den svenska skolmatematiken. Med utgångspunkt från hans redogörelse riskerar man att få intryck av att den euklidiska geometrin tidigare stått relativt ohotad. Denna bild understöds delvis av den sekundärlitteratur Prytz hänvisar till, och stämmer givetvis bra med det tidiga 1900-talets självbild av att vara modernitetens företrädare i strid mot en förhärskande tradition. Den euklidiska geometrin var emellertid föremål för kritik långt tidigare. I Frankrike fasades den ut ur ingenjörsutbildningarnas kursplaner redan under 1700-talets andra hälft.[57] I Sverige löper kritiken av Euklides, under hela 1800-talet (liksom kritiken av "mekaniken") som en röd tråd genom den skolmatematiska diskussionen, med rader av försök till alternativa läroböcker i geometri.[58] Redan från mitten av 1800-talet ansåg de flesta att vad man kallade "åskådningsgeometri" eller "åskådningslära" utgjorde en nödvändig förberedelse för den euklidiska geometrin.[59] Det läroboksförfattarna framställde som, och säkert också uppfattade som, undervisningsmetodiska nyheter på 1930- och 1940-talet, måste med andra ord förstås som variationer på ett äldre tema.

Här skall dock sägas att Prytz absolut inte påstår att 1800-talet skulle ha saknat skolmatematisk diskussion. Denna tidsperiod faller helt enkelt utanför ramarna för hans avhandling. Min ståndpunkt, att mycket kan vinnas på att utsträcka analysen bakåt i tiden, skall därför inte så mycket förstås som en kritik mot det Prytz gjort, som en observation rörande den övergripande problematik han bidrar till att belysa. Det avgörande problemet är att Prytz analys, genom att ta det tidiga 1900-talet som startpunkt, gör det möjligt att

---

[57] Ken Alder, *Engineering the revolution: arms and enlightenment in France 1763–1815*, Princeton, N.J., 1997, s. 73.

[58] Se kapitel 8 nedan, samt t.ex. Carl Jonas Love Almqvist, *Lärobok i geometrien, innefattande grunderna för läran om Linier, Ytor Planimetri och Landtmäteri, solida Figurer Stereometri utgörande en ny bearbetning af Chr. Wolffs Anfangsgrnde allre mathematischen Wissenschaften I Th II Abschn.*, Stockholm, 1833.

[59] Edvard Göransson berättar att Sverige var ett av de länder som tidigast infört en "propedeutisk" kurs i geometri med hänvisning till att åskådningsgeometri nämns redan i 1820 års skolordning ("Nyare riktlinjer för matematikundervisningen", s. 70). Med utgångspunkt från diskussionen som fördes står det dock klart att en sådan kurs knappast hörde till vanligheterna förrän efter 1800-talets mitt. Till exempel ser läroboksgranskningskommittén 1871 avsaknaden av förberedande "åskådningsundervisning" som en bidragande orsak till matematikundervisningens dåliga resultat (Kommissionen för behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor, *Underdånigt betänkande*, Stockholm, 1872). Jmf. Sixten Von Friesen, "Geometrisk Elementarkurs af E. F. Gustrin, Docent vid Lunds Universitet. Första delen. Åskådningslära jämte några satser med bevis. Lund 1874. C.W. K. Gleerups förlag.", *Pedagogisk Tidskrift*, 1875: "Utan tvifvel var det med en något orolig känsla, som lärarne i matematik på läroverkets lägre stadium mottogo den i Kongl. cirkuläret den 6 juni 1873 gifna föreskriften, att de i nära två år skulle sysselsätta sig med geometrisk åskådningslära, innan de finge öfvergå till den egentliga vetenskapliga undervisningen i geometri. Väl hade äfven förut en dylik förberedande kurs i åskådningslära varit föreskrifven så väl genom 1865 års undervisningsplan som genom 1869 års cirkulär, men dessa föreskrifter torde endast skenbart hafva följts – med säkerhet vet rec., att så varit förhållandet vid några läroverk."

"rädda" skolmatematikens funktionellt bestämda förflutna – det endimensionella defekta förflutna vars innehåll bara är en motsats till det matematiska idealet – genom att blott förskjuta det något femtiotal år längre bak i tiden.

För det tredje krävs, menar jag, en sociologisk analys av skolans relation till samhället. I sina avslutande reflektioner tar Prytz examensprövningarna som utgångspunkt. Hans analys av dessa visar att det som i praktiken krävdes av eleverna för att klara examinationsuppgifterna i geometri i stor utsträckning kan beskrivas som "problemlösningsförmåga". Därmed, menar Prytz, hade det varit relevant för de diskuterande lärarna och läroboksförfattarna att ta upp frågan om problemlösning i sin diskussion av geometriundervisningens mål och medel.[60] Man diskuterade emellertid inte problemlösning. Detta ser Prytz som en möjlig bidragande orsak till att resultaten på geometriproven var tämligen dåliga.[61] Hade man gjort frågan om problemlösning explicit, tycks Prytz mena, hade man kanske kunnat anpassa undervisningen till examinationernas krav och därmed hjälpt fler studenter att klara sig.

Detta resonemanget väcker emellertid en rad frågor. I och med att Prytz utan vidare diskussion tar examinationernas utformning som definition av kursernas "verkliga" innehåll, står det klart att Prytz helt rör sig inom skolans värld. Han problematiserar inte relationen mellan skolans examinationer och den värld utanför skolan som geometriundervisningen skulle förbereda studenterna inför.[62] Vad gäller problemlösningens plats i diskussionen tror jag att Prytz analys utgår från en anakronistisk förståelse av termen "problemlösning". Denna term har idag positiv laddning.[63] Annat var det emellertid före den nya matematiken. Då pågick vad som närmast kan beskrivas som en strid rörande studentskrivningarnas innehåll och svårighetsnivå. I denna strid spelade problemlösning en central roll – men som något negativt, nämligen som beteckning på den, som man uppfattade det, *meningslösa* förmåga som examinationsuppgifterna krävde. Man menade att examinationernas krav tvingade lärarna att utforma sin undervisning som en övning på att lösa problem, snarare än att ägna sig åt just den tidskrävande åskådning och självverksamhet som skulle leda till insikt och djupare förståelse.[64]

---

[60] Prytz, *Speaking of Geometry*, s. 101.

[61] Ibid, s. 190–191.

[62] Detta hänger givetvis samman med att Prytz mer eller mindre explicit ansluter sig till de ståndpunkter rörande geometristudiernas positiva effekter som kommer till uttryck i diskussionen.

[63] Låt mig som vanligt hänvisa till Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken* för att illustrera dagens skolmatematiska diskurs. Där kan man läsa om värdet av "begreppsutveckling och problemlösningsförmåga" (s. 71). Delegationen skriver också att matematik i grunden kan betraktas som "en problemlösningskonst både i sig själv och i sina tillämpningar" (s. 85).

[64] Diskussionen fördes bland annat i *Tidning för Sveriges Läroverk*, t.ex. i följande artiklar: C. E. Sjöstedt, "Studentskrivningarna i matematik" (1940); Agne Wahlgren, "Realgymnasiets matematikkurser" (1940); Baltzar Wahlström, "Examensskrivningarnas svårighetsgrad" (1945); C. E. Sjöstedt, "Examensskrivningarnas svårighetsgrad" (1945) och Henrik Jörlander, et al., "Ämneskonferensen i Södertälje" (1949), där man kan läsa: "Studentproblem av nuvarande karaktär, hur intressanta och skickligt gjorda de ofta än är, fordrar en alldeles särskild sorts

Examensskrivningarnas utformning motiverades huvudsakligen med hänvisning till deras funktion som begåvnings- och intelligensmätare. Själva förmågan att lösa examensproblem sågs som tämligen värdelös förutom som *tecken* på något annat, mer allmänt.

Problemlösningsförmåga har alltså under andra halvan av 1900-talet gått från att beteckna en meningslös förmåga att lösa skolans artificiella problem, till att ses som en del av det allmänna mål som skolan (genom sina artificiellt konstruerade problem) skall sträva mot. Detta väcker nya frågor rörande relationen mellan den skolmatematiska diskursen och skolmatematikens praktiska verklighet. Klart är emellertid att studentskrivningarna var utformade för att fylla en specifik funktion i förhållande till det övriga samhället, nämligen att begränsa antalet studenter som tog sig vidare till högre utbildning. Man talade om detta i termer av *gallring*, och såg matematiken som ett lämpligt *gallringsinstrument* eftersom förmågan att lösa matematiska problem ansågs spegla allmän begåvning och intelligens.[65] Prytz analys av orsaken till att en relativt stor andel studenter inte lyckades lösa examenstalen saknar denna sociologiska dimension av problematiken. Man måste, menar jag, dra en skarp gräns mellan å ena sidan den skolmatematiska diskursen och å andra sidan skolmatematiken i egenskap av social institution. Den skolmatematiska diskursen kan inte ses som ett uttryck för en ambition att göra skolmatematiken i en allmän mening *bättre*. Tvärtom måste man se diskursen som "framställning" av skolmatematiken, som en strävan efter att ge den med en specifik mening. Denna framställning spelar, menar jag, en komplementär roll i förhållande till vad jag kallar den *symbolisk-mekaniska* nivå vilken bland annat innefattar sortering av samhällets barn och unga.

Låt mig nu, mot bakgrund av dessa reflektioner säga något om tankarna bakom min egen historiska undersökning.

Argumentets struktur

Syftet med min historiska redogörelse är att rekonstruera en så fullständig och sammanhängande berättelse om den svenska skolmatematikens historia, att

träning, en tidsödande träning av ett slag som knappast ger behållning i form av verklig matematikkunskaper. Det gäller nu att drilla in en lösningsteknik, men att ha förvärvat denna rutin behöver inte utgöra bevis på matematisk begåvning."

[65] Se t.ex. C. E. Sjöstedt, "Studentskrivningarna i matematik", *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1942, där Sjöstedt kommenterar examensuppgifter som kritiserats för att de kräver finurlighet: "För min del finner jag uttrycket 'finurlighet' föga lyckat. De uppgifter, som här avses, äro sådana, där lärjungarnas matematiska begåvning kommer till sin rätt. Skulle man alltför mycket begränsa antalet dylika uppgifter, så skulle differentiering efter matematisk begåvning försvåras. Genom flit och noggrannhet skulle en lärjunge med ringa matematisk begåvning kunna i större omfattning nå de högsta betygen, under det att han nu icke torde nå högre än mellan betygen."

den ideologiska fantasi som understödjer denna skolmatematik kan lösas upp. Min redogörelse är kronologisk, men på ett analytiskt plan rör sig argumentationen på tre olika nivåer. Dessa hänger samman med relativt olika problem rörande avgränsning och empiri, och jag skall här behandla dem var för sig. Tillsammans utgör de följande avsnitten en beskrivning av det historiska argumentets struktur.

Här måste dock påpekas att denna struktur inte skall tillmätas allt för stor betydelse. Avhandlingen kretsar huvudsakligen kring dagens skolmatematik. Den teori jag presenterar rörande skolans matematik är framför allt avpassad för att förklara den situation vi har idag. Det är med utgångspunk från nuet, som jag sträckt mig bakåt i historien för att söka förklaringar. Vad jag hittat där har emellertid sällan i sig själv passat in i min förklaringsmodell. Vad jag gjort kan därför förstås som en kompromiss, där jag å ena sidan försökt beskriva det empiriska materialet på sina egna villkor och därmed öppnat det för en mångfald olika tolkningar, men å andra sidan utnyttjat det – så att säga mot dess egen vilja – för att ge stöd åt mina egna idéer, genom att jämföra det med nuet, relatera det till något av mina problemområden, eller kanske omtolka det i min psykoanalytiska terminologi. Resultatet av detta tillvägagångssätt har blivit en serie minianalyser, ordnade huvudsakligen med utgångspunkt från det empiriska materialets kronologiska struktur, vilka – på grund av det empiriska materialets egenheter – inte pekar i exakt samma riktning.

Det är därför en förenkling att påstå att denna inledande beskrivning av argumentets stuktur beskriver "samma" argument som det vilket presenteras i den historiska redogörelsen. Snarare innehåller avhandlingen tre olika versioner av min bild av skolmatematikens historia, varav denna beskrivning är den första. Dess karaktäristiska drag är ett fokus på form, snarare än innehåll. I den egentliga historiska redogörelsen är sedan argumenten utspridda och uppblandade med beskrivningar och citat med syfte att inte bara *säga* utan också *visa* och därmed öppna för alternativa tolkningar. I avsnittet "Slutsatser", sist i avhandlingen (bortsett från den avslutande epilogen om skolmatematiken under 1900-talet), upprepas sedan argumentet en sista gång, då med fokus på den historiska redogörelsens konsekvenser i termer av mitt teoretiska ramverk. Låt mig nu, med detta sagt, beskriva hur den historiska redogörelsen kan förstås på en *symbolisk-mekanisk* nivå:

Skolmatematikens *symbolisk-mekaniska* nivå

På en nivå som också kan beskrivas som sociologisk, försöker jag beskriva skolmatematikens genes i egenskap av social institution. Underförstått i skolmatematikens bilder av sig själv och sitt förflutna är att det finns ett behov, samhälleligt och individuellt, av matematiska kunskaper i en eller annan form, som det är skolmatematikens uppgift att leverera. Jag vill här visa att skolmatematikens genes kan förstås utan hänvisning till något sådant behov. Med min teoretiska terminologi kan man säga att det handlar om att förstå skolmatematikens historia utan den meningsskapande fantasi som skolans matematik utgör.

På denna nivå beskriver jag skolmatematikens förändringar med hänvisning till externa, sociala, faktorer. Det kommer inte att bli fråga om några detaljerade analyser av skolmatematikens funktion vid en eller annan tidpunkt, eller om etablerandet av exakta orsakssamband. Snarare handlar det om att ta fasta på ”självklarheter”, som att framväxten av en offentlig folkundervisning under första halvan av 1800-talet måste förstås mot bakgrund av en övergripande samhällsomvandling som krävde nya mekanismer för social kontroll av underklassen, eller att matematiken under 1900-talets första hälft betraktades som ett lämpligt ”gallringsinstrument”.

Analysen på denna nivå är baserad på ett flertal olika sorters material. Skolans inre verklighet – vad eleverna i praktiken gjorde – utläser jag ur läroböcker, metodanvisningar och andra samtida kommentarer rörande undervisningspraktiken. Den bild av den skolmatematiska undervisningspraktiken jag på detta sätt kan få är givetvis långt ifrån exakt. Den är emellertid, menar jag, tillräckligt exakt för mina syften. Detta material relaterar jag till sekundärlitteratur rörande skolan och samhället på ett mer övergripande plan. En viktig nyckel för att förstå de funktionella sambanden mellan skolmatematiken och det omgivande samhället så att säga bortom den meningsskapande matematiken, har även varit en ofta förekommande samtida diskurs rörande just dessa funktioner. Till exempel var det inte alls ovanligt att man under 1800-talet talade om skolmatematikens disciplinerande syfte i explicita termer. Under slutet av 1800-talet talade man om läroböckernas utformning i termer av sysselsättning och, som sagt ovan, under första halvan av 1900-talet om examinationernas funktion för sortering.

Det finns här en mängd avgränsningsproblem. I min teori definierar jag skolmatematik som den sociala institution vilken binds samman av tron på matematikens allmänbildande potential. Den är alltså summan av alla de verksamheter som syftar till att realisera samhällets högre mål med hjälp av matematikundervisning. Denna avgränsning utesluter framför allt undervisning som kretsar kring matematik i egenskap av specialitet – det tydligaste exemplet är här forskarutbildningar i matematik. Det går emellertid inte att dra någon skarp gräns mellan denna *skolmatematik* och andra sammanhang inom vilka matematik förekommer. I synnerhet går det inte att dra någon gräns i termer av elevernas ålder. Det går inte att knyta skolmatematiken till en viss organisatorisk enhet, som folkskolan eller grundskolan, och än mer problematiskt är att det inte ens går att knyta fenomenet skolmatematik till något specifikt skolämne. Det var inte förrän kring mitten av 1900-talet som skolämnet matematik blev ett enhetligt ämne med beteckningen *matematik*. Tidigare talade man, i synnerhet i folkskolans värld, istället om undervisning i räkning och geometri. Det är dock inte så enkelt som att dessa ämnen tillsammans skulle motsvara det senare matematikämnet. Räkning knyter nämligen å sin sida an till ämnen som handelsräkning, bokföring och ekonomi. Geometri angränsar å sin sida till lineartekning, teckning i allmänhet samt åskådningsundervisning. Man kan tala om en *familj* av skolämnen, som mer eller mindre direkt leder fram till dagens enhetliga matematikämne. Hela denna familj hör till mitt studieobjekt.

Mina avgränsningar har huvudsakligen styrts av de frågor jag velat besvara rörande dagens skolmatematik. Detta syfte har lett till att fokus i stor utsträckning hamnat på den mest elementära undervisningen, vilket i sin tur inneburit att fokus hamnat på undervisning i *räkning*, snarare än undervisning i geometri och högre matematik.

Jag har valt att nästan uteslutande fokusera på svenska förhållanden. Detta val hänger delvis samman med tillgången på material. En fördel med detta fokus är emellertid att det möjliggör beskrivandet av ett relativt sammanhängande förlopp, som äger rum på en viss plats och där generationerna avlöser varandra. Slutligen är det också den svenska skolmatematiken som utgör det problem vilket avhandlingen syftar till att belysa.

På denna nivå argumenterar jag för min teori på följande sätt. För det första visar jag hur skolmatematiken genom en följd av skeden tar form som en säregen institutionaliserad praktik. Man kan tala om en process, i Sverige inledd under 1700-talets andra hälft, genom vilken den skolmatematiska undervisningspraktiken separeras från övriga delar av samhället. Det eleverna gör blir då något annat än vad matematiker, ingenjörer, lantmätare och handelsmän gör i sin yrkesutövning, och det blir också något annat än vad människor gör i sin vardag. Skolmatematiken är här i gott sällskap med andra skolämnen, vilkas separation sker mer eller mindre samtidigt. Det handlar på ett övergripande plan om formandet av det som skulle bli dagens obligatoriska skola.

Argumentets andra steg består i att visa att den form den skolmatematiska undervisningspraktiken får under denna separationsprocess, kan förklaras sociologiskt, utan hänvisning till matematiken. Under det första skedet, mot slutet av 1700-talet, avgränsas skolmatematiken som ämne genom att indelas i en hierarkiskt ordnad uppsättning kurser. Dessa kurser definieras genom avslutande examinationer. Man kan se hur såväl läroböcker som undervisning anpassas till skolmatematikens funktion vid denna tid att *sortera* den mindre grupp elever det då var fråga om. Under 1800-talets lopp utsträcks undervisningen till att omfatta allt fler och allt yngre elever. Den blir repetitiv och praktisk och förlorar sitt matematiska innehåll, samtidigt som moment av lydnad och underkastelse får stort utrymme. Till den tidigare konsekrerande och sorterande funktionen läggs i och med detta en roll som disciplineringsinstrument. Under 1800-talets lopp, samt första halvan av 1900-talet, blir antalet övningsuppgifter allt fler. Detta kan förklaras dels med hänvisning till ett explicit uttryckt behov av att hålla eleverna sysselsatta, dels av att uppgifterna utgör en form av disciplinerande kontroll, dels av den växande betydelsen av matematikämnet som sorteringsinstrument.

Ett tredje steg kan sägas bestå i att, med hänvisning till vad eleverna faktiskt ägnade sig åt, påvisa det otroliga i att denna verksamhet skulle vara eleverna till någon instrumentell nytta utanför skolan (utöver den nytta man har av höga betyg och examina). Här kan jag givetvis hämta stöd från den kontinuerliga och tämligen förintande kritik som från 1850-talet riktats mot skolmatematikens resultat. Skolmatematiken framställer sig själv som igår misslyckad men snart lyckad leverantör av ett matematikkunnande samhället behöver. Istället menar jag att skolmatematiken är en såväl igår som idag lyckad leverantör av något helt annat (sortering, etcetera) – som samhället behöver, men som det undviker att kännas vid med hjälp av fantasin om behovet av matematikkunnande.

Matematikens utsida

Den ovanstående analysen måste kompletteras med en motsvarande analys av den mening som skolmatematiken tillskrevs under dess uppkomst. Det handlar här om att förstå bilden av matematiken i egenskap av imaginär identifikation, som sublimt objekt, och som nodpunkt. Om skolmatematiken på ett *symbolisk-mekaniskt* plan bidragit till att disciplinera, sysselsätta och sortera, så är det fantasin om matematiken som givit dessa funktioner (en annan) mening.

Analysen på denna nivå utgörs av en relativt rättfram ideologikritik, det vill säga en demonstration av att det bakom anspråken på en universell matematik döljer sig partikulära intressen, och, i nästa något mer komplicerade steg, att själva idén om en universell matematik hämtar sin kraft just från dess ideologiska funktion.

Empirin består här huvudsakligen av texter om skolmatematikens mål, om matematikens roll i samhället och om matematikens egenskaper i allmänhet. Man hittar sådana beskrivningar i förord till läroböcker i matematik, i läroplaner, utredningar, rapporter och inte minst tidskriftsartiklar. Detta material relaterar jag till bearbetningar och sekundärlitteratur inom framför allt vetenskapshistoria och idéhistoria, med vars hjälp bilden av matematiken kan sättas in i ett större religiöst, filosofiskt och politiskt sammanhang.

Vad gäller avgränsning har jag i första hand fokuserat skolans bilder av matematiken, det vill säga ståndpunkter som på ett institutionellt plan kan knytas till skolmatematiken. Med min terminologi kan man säga att jag försökt att studera *skolans matematik*. Det är emellertid först under 1800-talet som det blir enkelt att skilja skolmatematiken från andra institutionella sammanhang. Innan dess var undervisning i matematik synonymt antingen med undervisning i, som det brukade heta, det ”borgerliga livets” matematik (då det var fråga om räkning), eller vetenskapens matematik då det var fråga om geometri, algebra, analys eller någon annan del av den högre matematiken.

Det finns vid denna tid en ganska disparat uppsättning bilder av matematiken, men de är alla vetenskapens bilder och man kan till och med säga att vetenskapen vid denna tid framställde sig själv genom matematiken på ett liknande sätt som skolmatematiken gör idag. Jag har sett det som nödvändigt att åtminstone översiktligt redogöra även för dessa tidigare bilder av matematiken. Det är nämligen i detta skede, under 1600- och 1700-talen, som matematiken blir fascinerande och börjar fungera som en nodpunkt på det sätt jag beskrivit ovan (s. 14ff).

Mitt argument rörande bilden av matematiken är som följer. Matematik utgjorde redan från början – om man så förlägger denna början till Antiken eller renässansen – ett fascinerande ”sublimt” objekt, sammanvävt med mer eller mindre dominerande tanke- och värdesystem. Inte minst var matematiken, fram till slutet av 1800-talet, förknippad med religion. Poängen är här inte att misstänkliggöra matematiken genom att visa på en sorts tidigare ”ovetenskaplighet”. Poängen är att matematiska studier fick sin huvudsakliga mening från matematikens plats i dessa tankesystem, och att detta satte villkoren för vilken typ av matematiska studier som värderades högt respektive lågt.

Som en del av skolmatematiken tänkte man inte matematiken som något man ”lär sig”. Tvärtom betraktades matematiken som ett sorts *kraftfullt objekt* vilket genom undervisningen kunde fås att verka på människans inre. Detta synsätt kontrasterar skarpt mot bilden av matematiken som ett användbart redskap vilket man genom träning lär sig att behärska.

En viktig del av mitt argument består i att visa att denna idé om matematiken varit relativt autonom i två avseenden. För det första har den varit autonom i förhållande till skolmatematikens under 1800-talets lopp allt mer institutionaliserade praktiska verklighet. Skolmatematiken innefattar en disparat uppsättning praktiker, fördelade över skolformer, skolämnen och elever i olika åldrar. Allt detta får sin mening med hänvisning till matematiken. För det andra har den varit autonom i förhållande till samhället utanför skolan. Kort sagt förlorar de som i skolsammanhang talar om matematiken redan mot slutet av 1700-talet kontakten med de praktiker de genom matematiken mer eller mindre explicit hänvisar till. Den matematiska vetenskapen, tekniken och ekonomin förändras radikalt under 1800-talets lopp. Sättet att tala om matematiken i skolan påverkas bara marginellt av denna utveckling.

Man måste emellertid observera att det endast är *formen* hos hänvisningarna till matematiken som är autonom, det vill säga *att* den utgör en kraft med potential att forma människan. Den riktning i vilken matematiken sägs forma är tvärtom, visar jag, knuten till vad som vid en given tidpunkt värderas högt i samhället. Under 1600-talet leder matematiska studier till tro och ordning, under 1700-talet rationalitet och nytta, under 1800-talet bildning och religiositet, under 1900-talet tillväxt och demokrati.

Matematikens insida

Vad som återstår att förklara är den rikedom av mening som präglar den interna skolmatematiska diskussionen. Den kan inte reduceras varken till sociologiska funktioner, eller till matematikens blanka utsida och dess reflektioner av samhällets högre värden. De som arbetar med skolmatematik förhåller sig till en matematik fylld av tämligen specifik mening och en matematik som står i nära förbindelse med vad eleverna faktiskt ägnar sig åt i skolan.

Det handlar här om en ganska märklig reflexiv bestämning, där det är långt ifrån enkelt att skilja orsak från verkan. Den skolmatematiska undervisningspraktiken får nämligen, in i minsta detalj, en specifik mening genom sin relation till matematiken. Det är matematiken som får det att framstå som nödvändigt att praktiken har just *denna* utformning och ingen annan. Matematiken framstår därmed som praktikens orsak. Utifrån ett sociologiskt perspektiv kan vi emellertid se att praktiken kan förklaras med hänvisning till faktorer som inte har med matematik att göra. Detta talar för ett omvänt orsakssamband, där matematiken retroaktivt får just de egenskaper som behövs för att praktiken skall framstå som meningsfull. Men matematiken kan inte tillskrivas vilka egenskaper som helst, på samma sätt som undervisningspraktiken givetvis inte kan reduceras till ett svar på någon typ av yttre socialt behov eller krav. Istället måste vi förstå förloppet som ett relativt autonomt ”spel” mellan praktik och diskurs, vilket framträder allt tydligare under 1800-talets lopp i takt med att skolmatematiken institutionaliseras och får större plats i samhället.

Med Bourdieu kan man tala om denna aspekt av skolmatematiken som ett fält, inom vilket yttre impulser översätts till en intern logik. Vad som i praktiken kan studeras är hur ett antal aktörer, inom detta fält, strider om hur den skolmatematiska undervisningspraktiken skall utformas och tolkas och samtidigt därmed även strider om matematikens egenskaper. Mer exakt står det jag kallar matematiken insida i stridernas centrum. Den *symbolisk-mekaniska* nivån visar hur detta fält fixeras av yttre sociala villkor. Nivån som beskriver matematikens utsida visar hur fältets relation till det omgivande samhället förmedlas av den universella matematik genom vilket det framställer sig själv.

Två slag av empiri måste samläsas på denna nivå. För det första olika tecken på vad eleverna i praktiken gjorde på lektionerna, det vill säga läroböcker och metodanvisningar. För det andra diskussionen kring denna praktik, förd i läroboksförord, läroplaner, utredningar, rapporter och inte minst tidskriftsartiklar.

Låt mig ta det ”benämnda talet” som exempel på den typ av problematik denna tolkningsnivå innefattar. Ett benämnt tal är en fråga, formulerad i löpande text, som kan besvaras med hjälp av matematik. Under 1800-talets lopp kom skolmatematiken allt mer att domineras av denna typ av uppgifter.

Läroböcker i räkning från början av 1800-talet innehåller som regel några tiotal benämnda tal.[66] Strax efter sekelskiftet 1900 kan antalet uppgifter räknas i tusental.[67] Hur kan detta förklaras? På en *symbolisk-mekanisk* nivå kan vi hänvisa till behovet av att hålla eleverna sysselsatta, att uppgifterna troligtvis hade en disciplinerande effekt, och att uppgifterna utgjorde en sorts hinderbana med vars hjälp eleverna kunde sorteras. Denna förklaring var faktiskt inte helt främmande för skolmatematikerna själva. Deras huvudsakliga förklaringsmodell var emellertid en helt annan. De motiverade det ökande antalet övningsuppgifter med hänvisning till vad jag här valt att kalla bildningstänkandet, och den med detta tänkande sammanhängande heuristiska metoden. I fråga om de benämnda talen, sade bildningstänkandet (något förenklat) att ett upprepat "användande" av matematik genom lösande av en mängd relativt likartade benämnda tal, skulle leda till ett matematiskt kunnande som var användbart i de sammanhang som de benämnda talen handlade om. Man kan förstå tänkesättet med hänvisning till vårt moderna användande av simulatorer, till exempel för att lära piloter att flyga. De benämnda talen gestaltade en uppenbart förenklad verklighet (detta var alla överens om!), där en viss typ av enkla metoder kunde användas för att lösa en ganska stereotyp uppsättning problem. Poängen med att eleverna ägnade sig åt denna förenklade, stiliserade, verklighet, var inte att de skulle bli duktiga på att lösa benämnda tal (något vissa av dem givetvis blev). Poängen var att de därmed skulle förberedas inför mötet med den "riktiga" verkligheten. De skulle formas av att så att säga *vara* i den verklighet de benämnda talen gestaltade. Där skulle de se hur matematiken kunde användas och inte minst *att* den kunde användas. Detta trots att de användningar det på en mer detaljerad nivå var fråga om, var uppenbart orealistiska. Att uppgifterna behövde vara så många, berodde på att det riktiga formandet bara kunde åstadkommas av att eleverna själva, helt på egen hand, *upptäckte* hur frågorna kunde besvaras, utan hjälp av någon på förhand given regel eller formel. Det är som att eleverna fick ge sig ut på en simulerad vandring i lärobokens värld för att som en upptäcktsresande lära sig hur denna värld kan bemästras med hjälp av matematik.

Ideologikritikens tillägg är givetvis att det inte alls var fråga om någon upptäcktsfärd, utan en rörelse längs en snitslad bana, där det från början var i

[66] Detta gäller t.ex. Roloff Andersson, *Genwäg til borgerliga räkne-konsten hwarigenom et barn med litet biträde af informator, och en äldre som med god eftertanka är begåfwad, utan information på ganska kort tid kan wägledas til det nödwändigaste af denna altid nyttiga wetenskapen.: Sammanskrifwen och nu tredje gången uplagd samt ansenligen tilökt och förbättrad af Roloff Andersson. Med kongl. maj:ts allernådigste privilegium*, Stockholm, 1798.

[67] Jämförelsen kompliceras av att ämnet räkning mot slutet av 1900-talet hade sönderdelats i en mängd hierarkiskt ordnade kurser, var och en med sin separata lärobok. Man bör därför snarast ta de läroboksserier som det därmed blev fråga om i beaktande då man räknar uppgifter. Det spelar emellertid inte någon större roll hur man räknar. Var och en av läroböckerna i räkning från det tidiga 1900-talet innehåller ensam ungefär hundra gånger antalet uppgifter i en typisk räknelära från sekelskiftet 1800.

detalj uppgjort vad som skall ”upptäckas”, nämligen exakt de regler och tekniker, den matematiska *karta*, eleverna nekats tillträde till. Men hade de nekats tillträde till denna karta för att orienteringen inte skulle gå allt för fort, och för att inte alltför många skall hitta rätt (som den sociologiska förklaringsmodellen säger), eller på grund av bildningstänkandets metodologiska principer (som skolmatematikerna själva skulle säga)? Svårigheten ligger i att se båda möjligheterna samtidigt.

Mitt argument på denna tolkningsnivå är följande. Den skolmatematiska undervisningspraktikens kännetecken är att den inte i första hand syftar till att förmedla en förmåga att använda matematiska tekniker, utan tvärtom att med hjälp av matematiken forma elevernas inre. Givet denna definition tar skolmatematiken form under 1700-talet utanför Sverige, och tar plats i Sverige under 1800-talet. Idén om matematik som formande kraft har haft många olika namn. Under 1800-talet talade man ofta om bildning, under 1900-talet (då bildningstänkandet hamnat i vanrykte) om sådant som tankegymnastik och att påverka självkrafterna, medan det på senare år åter blivit relativt oproblematiskt att tala om bildning. Det väsentliga är att skolmatematisk undervisning inte i första hand går ut på att lära människor använda matematik, utan att använda matematik för att forma människan – och därmed indirekt låta den komma henne till godo.

Dessa idéer gavs ett detaljerat och specifikt uttryck av bland andra schweizaren Heinrich Pestalozzi kring sekelskiftet 1800. Pestalozzi beskrev i detalj hur han menade att undervisning måste vara utformad för att matematikens kraft skulle komma eleverna till godo. På ett praktiskt plan var hans metoder explicit utformade för att undervisning av ett stort antal barn skulle kunna skötas av en ensam lärare, utan egna (matematiska) kunskaper och under knappa materiella omständigheter. Väsentligt är att Pestalozzi inte hade någon som helst kontakt vare sig med tidens vetenskapliga matematik, eller med matematikens användning i andra samhällssfärer. Undervisningens syfte var att forma elevernas ”åskådningsförmåga”, något Pestalozzi förknippade med ett religiöst ideal och såg som motsatt varje syfte att bibringa barnen kunskaper och färdigheter. Metoden bestod i att göra barnen aktiva och att fånga deras intresse, samtidigt som alla diskursivt förmedlade budskap uteslöts från undervisningen. En väsentlig roll spelade anpassning till ”barnets ståndpunkt”. Det matematiska innehållet reducerades med denna ambition som utgångspunkt till ett absolut minimum (betydande ansträngningar kunde till exempel ägnas åt undervisning om talet *ett*, eller på geometrins område åt undervisning om *linjen*).

För Pestalozzi var matematiken intimt sammanvävd med verklighetens innersta väsen, vilket i sin tur var sammanvävt med Gud. Pestalozzis undervisningsmetod var utformad för att forma elevernas inre till en samklang med verkligheten, så som Pestalozzi uppfattade att den var i sig själv, det vill säga genomsyrad av Gud och av matematiken. Det handlade kort sagt om att ge eleverna den rätta tron, vilket för Pestalozzi bland annat var en tro på matematikens kraft och ständiga närvaro.

Detta bildningstänkande kom att fungera som övergripande tolkningsramverk för den skolmatematiska diskussion vilken började komma igång kring mitten av 1800-talet. Det satte gränserna för det rum inom vilket undervisningsmetodiska försök uppstod, försvarades och kritiserades. Att åskådning och självverksamhet utgör en nödvändig förutsättning för formande av talbegrepp och att det bara är i form av talbegrepp som matematiken kan vara någon till godo, kom att bli skolmatematikens *doxa*. Denna doxa sade i princip att matematiken bara kan komma eleverna till godo genom att integreras med själva deras väsen, genom att bli den utgångspunkt från vilken de uppfattar sin omvärld, kort sagt genom att bli ett föremål för helhjärtad *tro*. Med min terminologi kan man säga att bildningstänkandet är (som) utformat för att generera symbolisk identifikation med skolan och imaginär identifikation av skolans matematik.

Bildningstänkandet transformerades under 1900-talets första hälft. Diskussionen fick en vetenskaplig form. Samtidigt ersattes den religiösa och nyhumanistiska kontext som skolmatematiken under 1800-talet rört sig inom, av en ny kontext bestående av vetenskapliga teorier, framför allt om barnet och dess utveckling. Månandet om undervisningens anpassning till barnets ”ståndpunkt” ersattes stegvis av hänvisningar till Piagets teorier om barnets mer eller mindre exakt mätbara utvecklingsnivå.

Min tes är emellertid att dessa nya teorier snarast måste förstås som en sorts transponering av det tidigare bildningstänkandet, genom vilken det gjordes gångbart i en tid med nya ideal. I de nya teorierna var det matematiska begrepp som skulle formas, men den nödvändiga metoden bestod fortfarande av åskådning och självverksamhet och, framför allt, det skolmatematiska metodidealet fortfor att vara ett ideal som i sin praktik ledde till tro på matematiken.

I inledningen till detta metodavsnitt beskrev jag hur jag under arbetet med skolmatematiken steg för steg tvingades allt längre bakåt i tiden, från 1970-talet, till 1950-talet, till sekelskiftet 1900, till 1840-talet, och slutligen ännu längre tillbaka. När jag landat, tog jag mig sakta tillbaka till nuet, och det var under denna resa som den teori om skolans matematik vilken jag presenterat ovan, i allt väsentligt tog form. Jag skall nu berätta om denna resa.

II. Förhistoria

5. Räknekonsten

Räknekonsten är ett system av tekniker för att besvara räknefrågor som uppstår framför allt inom ekonomi och handel. Vi har idag kännedom om detta system genom de *räkneläror* i vilka räknekonsten finns beskriven. Ser man räknekonsten som blott en beteckning på praktiskt räknande, har den givetvis en mångtusenårig historia. Här skall jag emellertid fokusera på själva räknelärorna, vars historia är något mer överskådlig. Den första tryckta räkneläran publicerades 1478 i Treviso och kallas – eftersom vi inte vet vem som författade den – för *Treviso-aritmetikan* (the *Treviso Arithmetic* på engelska).[1] Denna bok har en rad särdrag, vars utveckling man sedan kan följa genom 1500, 1600, och i viss mån även 1700-talet. Under 1700-talet började emellertid genren lösas upp.

Steven Toulmin beskriver i sin bok *Kosmopolis* en övergång mellan två olika sätt tänka som han menar skedde i Europa ungefär på 1630-talet.[2] Ett av de många förlopp som accelererade vid denna tid var uppvärderingen av matematiken. Toulmin beskriver den nya tidens karaktäristiska drag som en övergång från ”det enskilda till det universella”, ”det lokala till det allmänna” och ”det tidsbundna till det tidlösa”.[3] Räknekonsten hör tveklöst till det första av detta två tänkesätt. Räknelärorna beskriver enskilda sätt att räkna, användbara i specifika lokala sammanhang. De beskriver hur man kan och bör räkna vid en viss given tidpunkt, under omständigheter som inte minst innefattar att uträkningarna, givet tillgängliga hjälpmedel, måste kunna utföras inom rimlig tid. Räknekonsten hade aldrig särskilt hög status och den var aldrig sammanvävd med metafysik och religion. I motsats till matematiken reste den inga ontologiska anspråk. Räknelärorna beskriver exakt vad räknekonsten kan användas till i specifika konkreta sammanhang. De hänvisar inte till något annat, bortom detta räknande. Räknekonsten var kort sagt inget man talade om. Den var något man lärde sig och sedan använde. Den var en konst och en specialitet.

I en mening är denna räknekonst skolmatematikens ”traditionella” förflutna. Traditionen förknippas med *regler* och *minneskunskaper* och dessa stod i räknekonstens centrum. Historiskt är det också i stor utsträckning med

[1] Howard Whitley Eves & Jamie H. Eves, *An introduction to the history of mathematics*, Philadelphia, 1990, s. 268; Frank J. Swetz, *Capitalism and arithmetic*, La Salle, Illinois, 1987, s. xiii.
[2] Stephen Toulmin, *Kosmopolis: hur det humanistiska arvet förfuskades*, Stockholm, 1995, s. 24.
[3] Ibid, s. 56–62.

utgångspunkt från räknekonsten som skolmatematiken tog form. Samtidigt finns en djup klyfta mellan skolmatematikens syn på regler och minneskunskaper och den funktion dessa fyllde som delar av räknekonsten. Bilden av den skolmatematiska traditionen handlar i denna bemärkelse inte alls om räknekonsten, utan om något helt annat.

Huvudsyftet med det här kapitlet är därför att förklara vad räknekonsten faktiskt var. Inte minst vill jag visa att den utgjorde en sammanhängande fungerande helhet, i vilken regler och minneskunskaper spelade en central roll. Jag skall börja med en kort beskrivning av räkneläran i egenskap av genre, där jag säger något om relationen mellan räknekonsten och den vetenskapliga matematiken. Sedan upptas merparten av kapitlet av en beskrivning av räknekonsten med utgångspunkt från en specifik räknelära, nämligen Roloff Anderssons *Aritmetica Tironica*.[4] Denna beskrivning är av flera skäl relativt detaljerad: för det första på grund av att räknekonsten, och i synnerhet de svenska räknelärorna, aldrig varit föremål för några detaljerade studier och en beskrivning av dem därför har ett visst egenvärde. För det andra finns emellertid också skäl att vara detaljerad på grund av behovet av att *bryta* med skolmatematikens missvisande bilder av det sätt att förhålla sig till praktiskt räknande som räknekonsten utgör. Med risk för att därmed göra visst våld på det historiska materialet, kommer jag med detta syfte i åtanke att lyfta fram räknekonsten positiva sidor snarare än dess eventuella brister.

Min redogörelse i detta kapitel är nästan uteslutande baserad på innehållet i ett antal svenska räkneläror. Det går emellertid inte att sätta ett likhetstecken mellan beskrivningarna i dessa böcker och hur man i praktiken räknade. Kapitlet avslutas med en diskussion av detta komplicerande faktum.

Räkneläran som genre

Det är inte självklart hur räkneläran som genre bör avgränsas. Gränser måste dras åt åtminstone tre håll: för det första mot det som från och med 1600-talet var på väg att bli den moderna matematiska vetenskapen. För det andra mot böcker som i och för sig berörde ”matematiska” frågor, men hade fokus på annat, till exempel bokföring. För det tredje mot den typ av läroböcker som mot slutet av 1700-talet kom att ersätta räknelärorna som utgångspunkt för grundläggande undervisning i matematik. Förenklat kan man säga att genren, från att vara relativt lätt att identifiera fram till 1600-talet, under 1700-talet sönderfaller i de tre ovan nämnda riktningarna.

[4] Roloff Andersson, *Arithmetica tironica, eller Kort och grundlig anwisning at practice lära all nödwändig hus- och handels-räkning; efter den nu för tiden mäst brukliga och fördelaktigaste läro-methode, til allmänhetens och i synnerhet scholarnes tjenst: och nytta, efter sednaste kongl. maj:ts mynt-ordning*, Örebro, 1830 [1779].

Räknelärorna har inte direkt stått i den matematikhistoriska forskningens fokus.[5] Ofta var deras syfte uteslutande praktiskt; att visa hur man räknar och att erbjuda stöd åt den som ville lära sig. När matematikens utveckling mot den vetenskap vi känner den som idag började ta fart på 1500-talet, accentuerades därför skillnaden mellan å ena sidan matematik som vetenskap och å andra sidan räknekonsten. Betraktad utifrån den matematiska vetenskapens synvinkel kom räknekonsten att framstå som föga originell. I synnerhet innehöll den inget ur matematisk synvinkel nytt. Räknelärorna har därför i stor utsträckning fallit utanför den matematikhistoriska forskningens ramar. Samtidigt kan deras innehåll lätt kännas igen som matematik och detta är förmodligen en bidragande orsak till att de inte heller studerats i någon större utsträckning av forskare utan matematisk skolning.

Räknekonsten hade som sagt sitt ursprung i en tid innan matematikens vetenskapliggörande. Emellertid stod räknelärorna inte opåverkade av den förändring i synen på räknandet som matematikens transformering under 1600-talet innebar. Förändringen inleddes under 1500-talets andra hälft, och faktum är att de svenska räknelärorna i stor utsträckning lånade sin disposition från matematikern Christopher Clavius *Epitome Arithmeticae* från 1583, en bok med explicit vetenskapliga anspråk, inspirerad av Antikens matematiska ideal. Från slutet av 1500-talet måste räknelärorna därför förstås som resultatet av ett möte mellan en äldre räknekonst, representerad till exempel av *Treviso-aritmetikan*, och böcker med vetenskapliga pretentioner.

Vad gäller de svenska räknelärorna, i synnerhet de som trycktes i många upplagor, tycks emellertid inflytandet från vetenskapen ha varit ganska marginellt. Även om den övergripande strukturen lånades från Clavius, syftade de svenska räknelärorna i första hand till att förmedla räknekonstens praktik – inte att som Clavius göra räknekonsten till vetenskap.[6]

Den första svenska räkneläran, Aegidio Aurelius' *Arithmetica*, trycktes 1614.[7] Den sista upplagan av en svensk räknelära, så som jag avgränsar genren, trycktes 1843.[8] Mellan dessa år kom det ut ett drygt tjugotal svenska räkneläror. Läroverksläraren Frans Hultman diskuterar flera av dem i en serie artiklar under rubriken ”Svenska Aritmetikens Historia”, publicerade i *Tidskrift för matematik och fysik* 1868-1874.[9] Till de Hultman tar upp, kommer några publicerade under 1700-talet, Johan Gräns' *Underwisning uti*

---

[5] Eves & Eves, *An introduction to the history of mathematics* ägnar räknelärorna från och med *Treviso-aritmetikan* blott ett uppslag, s. 268–269.

[6] Angående skillnaden mellan olika typer av matematiker, se Mario Biagioli, ”The social status of italian mathematicians, 1450–1600”, *History of Science*, vol. 22, 1989, s. 42–43. Växelspelet mellan räknekonsten och den matematiska vetenskapen kommenteras i Richard W. Hadden, *On the shoulders of merchants: exchange and the mathematical conception of nature in early modern Europe*, Albany, 1994, s. 119–120.

[7] Vilken idag finns i nytryck: Johansson (ed.), *Aurelius' räknelära*. Aegidio Aurelius föddes någon gång på slutet av 1500-talet och dog 1648. Han var verksam i Uppsala.

[8] Jag syftar här på Roloff Andersson, *Genwäg till borgerliga räkne-konsten*, Örebro, 1843.

[9] Hultman, ”Svenska aritmetikens historia”. Se även Hatami, *Reguladetri*.

Räknekonsten från 1801, samt möjligen ytterligare några böcker från perioden kring sekelskiftet 1800.[10]

Bland de svenska räknelärorna intar Nicolao Agrelius' *Institutiones Arithmeticae* en särställning.[11] Den publicerades första gången 1655 och kom sedan ut i en mängd upplagor ända fram till 1798.[12] I de räkneläror som publicerades under senare hälften av 1700-talet utgör den en återkommande referenspunkt, som man efterliknar, hänvisar till, eller (oftast) tar avstånd från. Agrelius *Institutiones Arithmeticae* kan därför sägas utgöra ett sorts paradigm för de svenska räknelärorna.

Under 1700-talet kom Agrelius *Institutiones Arithmeticae* att utsättas för skarp kritik. Denna kritik utgjorde en del av den rörelse genom vilken räkneläran som genre successivt löstes upp och ersattes av andra typer av böcker. Räknelärorna hade dock flera försvarare. Under 1700-talet försågs till exempel Agrelius *Institutiones Arithmeticae* med ett förord, författat av Johannes Bilberg, i vilket Agrelius med stort patos försvarades mot sina ”fiender”.[13] Den som tog sig för att författa räkneläror under andra hälften av 1700-talet var säkerligen medveten om den kritik som riktats mot genren.

I synnerhet syns en sådan medvetenhet i kyrkoherden Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica*, publicerad första gången 1779.[14] I denna bok tycker jag mig kunna urskilja ett slags renodling av de särdrag vilka skiljer räknelärorna från de andra närliggande genrer som växte fram under 1700-talet. Andersson riktar kritik mot tidigare räkneläror (i synnerhet Agrelius) vilka enligt honom inte lever upp till vad man kan förvänta sig av en räknelära. Samtidigt är han kritisk mot de förändringstendenser han såg i sin samtid, vilka stred mot hans syn på vad en räknelära borde innehålla. Av dessa skäl har jag valt att ta Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica* som utgångspunkt för den redogörelse för räknelärornas disposition och innehåll som nu följer.

---

[10] Johan Gräns, *Undervisning uti räknekonsten, lämpad så väl til de okunniges som mera kunniges begrep, grundeligen och på et tydligt samt lätt sätt innefattande handels-och hushålls-räkning*, Stockholm, 1801. Tydligen levde genren vidare betydligt längre utanför Sverige. J. H. Harvey, *Commercial arithmetic*, London, 1978 [1949] kan vad gäller disposition, innehåll och framställningssätt föras till samma genre som *Treviso-aritmetikan.* Detta är alltså en bok som kom ut på 1900-talet (!) i flera upplagor mellan 1949 och (åtminstone) 1978.

[11] Nicolaus Petri Agrelius – eller på svenska, Niklas Peter Agrell – studerade i Uppsala från 1646. Han blev ”tullnär” i Varberg 1658, borgmästare 1660 och från 1665 ”inspektor” på det Wrangelska godset Lindeberg i Halland. Han dog 1681.

[12] Jag använder upplagan från 1798: Nicolaus Agrelius, *Institutiones arithmeticae, eller Kårt underwisning, om de förnämsta och högnödigsta reglor, exempel, italienska practiquer och compendier, som i dagelig räkning mäst brukelige äro. Dem konst-älskadom til nytto och gagn sammanskrefwen: af Nicolao P. Agrelio. Men nu förökt med några kårtare räkne-sätt, samt tydelig underrättelse om wäxel-räkningar och italienska bokhålleriet*, Stockholm, 1798 [1655].

[13] Se förordet till Nicolaus Agrelius, *Institutiones arithmeticae, eller Kårt underwisning, om de förnämsta och högnödigsta reglor, exempel, italienska practiquer och compendier, som i dagelig räkning mäst brukelige äro. Dem konst-älskadom! til nytto och gagn sammanskrefwen*, Stockholm, 1754 [1655]. Johannes Bilberg (1646–1717) var professor vid Uppsala universitet, först i matematik, men från 1689 istället i teologi.

[14] Roloff Andersson (1744–1828) var kyrkoherde och magister.

Räknelärornas disposition och innehåll

Anderssons *Arithmetica Tironica* har en disposition som är typisk för räknelärorna. Den börjar med en grundläggande genomgång av talsystemet. Sedan följer en beskrivning av de fyra räknesätten i hela tal, sorter och bråk. Merparten av boken upptas sedan av en redogörelse för *Regula de Tri* – ett sätt att räkna som jag kommer att ägna en hel del utrymme åt i det följande.[15]

Liksom de flesta räkneläror består Anderssons *Arithmetica Tironica* huvudsakligen av en kombination av löpande text och kommenterade exempel. Den löpande texten har ofta formen av ”reglor” vilka beskriver räknekonstens algoritmer. Reglorna är i sin tur olika beroende på den uppgift som skall lösas och Andersson talar då om olika ”förändringar” eller ”händelser”, vilka beskriver hur de olika fallen skall hanteras.[16] Anderssons räknelära är vidare typiskt i det att den innehåller en rad tabeller, till exempel multiplikationstabellen. Den inleds med en kort förklaring av bokens ämne: ”den borgerliga räknekonsten”. Syftet med denna konst är, skriver Andersson, att besvara de frågor som uppstår i ”det borgerliga lefwernet”. Den bygger på de fyra räknesätten och man kommer ingen vart i denna konst, fortsätter han, om man inte börjar med att lära sig att ”fermt och utan besvär” använda dem. Redan från början framgår alltså räknelärans praktiska syfte.

Numeratio

Efter denna inledning följer ett avsnitt med titeln ”Numeratio”. Denna rubrik, liksom avsnittets innehåll, följer hos Andersson en mall som är typisk för räknelärorna. Först beskriver han siffrorna – hur de skrivs och ”utnämns”, enligt följande:

> De skrifwas således: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. De första Nio kallas Numeri Significativi, eller betydlige tal, emedan de hwar för sig hafwa något att betyda s. s. 1 betyder ett, 2 betyder tu, 3 tre, etc. Men den tionde kallas nulla, eller Numerus non Significativus d. ä. obetydligt Tal, emedan det i och för sig sjelft intet betyder.[17]

---

[15] Utöver detta obligatoriska innehåll tillkommer i vissa räkneläror även annat – såsom redogörelser för progressioner, rotutdragning, räkning med decimaler och geometri. Dessa senare områden, vilka i och för sig är intressanta i förhållande till utvecklingen av matematiken som vetenskap, kommer inte att tas upp i redogörelsen som följer. Många räkneläror innehåller dessutom övningsuppgifter. Även dessa betraktar jag som externa i förhållande räknekonsten. Frågan är emellertid komplicerad. Exempel, och även okommenterade exempel, utgör en integrerad del av räknelärornas innehåll. Skillnaden mellan dessa exempel och övningsuppgifterna är att exemplen syftade till att å ena sidan illustrera och komplettera den löpande texten, å andra sidan till att låta läsaren pröva om han förstått. Detta är något annat än att öva. Typiskt för räknelärorna, så som jag förstår dem, är att övandet lämnades åt läsaren att sköta på egen hand. Se nedan s. 132.

[16] Se nedan s. 119.

[17] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 2.

Sedan beskrivs hur varje siffras värde bestäms av hur många nollor de har till höger om sig, det vill säga: ”när de betraktas ifrån högra till wänstra handen”, förklarar han, så ”anses den första för så stor som hon i sig sjelf är, den andra tio gånger större än hon är, och så widare, så att de efter sina rum få sin valeur”.[18]

Denna inledning återfinns i såväl Agrelius *Institutiones Arithmetica* (1655) som i *Treviso-aritmetikan* (1478). I sin bok om *Treviso-aritmetikan* skriver matematikhistorikern Frank J. Swetz följande om detta stycke:

> The first operation to be considered is numeration, which is defined in a rather modern vein as the representation of numbers by symbols. To fully appreciate the task the *Treviso's* author is undertaking in this section, one should understand the level of acceptance for the ”Hindu-Arabic” numeral system that existed in Europe at this time. The new numerals had been known in Europe from about 1000 A. D. yet they had not been universally accepted for use.[19]

Avsnittet om siffrorna hade alltså ursprungligen funktionen att introducera de arabiska siffrorna i en kultur där de var åtminstone potentiellt okända. Så var inte fallet 1779, då Anderssons räknelära publicerades, vilket kan ses som ett av många tecken på hur räknelärornas innehåll levde vidare, samhällsförändringar till trots. Redan på 1600-talet torde avsnittet i stor utsträckning ha förlorat sin ursprungliga funktion.

Intressant nog var denna inledning ett av de moment i räknelärorna som bevarades under det skede då räknelärorna användes som mall för en ny typ av mer regelrätta läroböcker i matematik. Som jag skall berätta i kapitel 8, kom Per Anton von Zweigbergks *Lärobok i Räknekonsten*, publicerad första gången 1839, att få ett enormt inflytande över den svenska skolmatematiken under andra halvan av 1800-talet.[20] Den kom ut i nya upplagor en bra bit in på 1900-talet. Även denna lärobok inleddes med ett avsnitt snarlikt räknelärornas numeratio.

Under 1800-talet kom emellertid detta avsnitt att tillskrivas en helt annan innebörd än den det ursprungligen hade. De läroböcker det då var fråga om riktade sig nämligen till barn, vilka inte kunde antas vara bekanta med siffrorna. Det avsnitt som på 1400-talet förtjänade sin plats i räknelärorna på grund av att siffrorna då var en kulturell nyhet, kunde därmed under 1800-talet motiveras med hänvisning till att siffrorna var en nyhet för de barn böckerna då riktade sig till.

[18] Ibid, s. 2–3.
[19] Swetz, C*apitalism and arithmetic*, s. 181.
[20] Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten.*

De stora talen

Något som troligtvis skulle förvåna en nutida läsare är att Andersson redan på bokens första sidor använder extremt stora tal som exempel. Talen fyller här emellertid en helt annan funktion än talen i de övningsuppgifter vi idag är vana vid. Låt mig säga något kort om detta.

Under andra halvan av 1800-talet började man mer allmänt i Sverige betrakta matematiska kunskaper i termer av ”talbegrepp”.[21] Man menade att riktiga talbegrepp bara kunde formas genom en långsam utveckling inom eleven. För att denna utveckling skulle förlöpa på ett bra sätt krävdes, menade man, idogt övande. Väsentligt i sammanhanget är att man fäste stor vikt vid att övningarnas föremål så att säga speglade hur väl utvecklade elevernas talbegrepp var vid en given tidpunkt. Ett föga utvecklat talbegrepp kunde bara utvecklas genom övning med små tal, medan ett mer utvecklat talbegrepp krävde större tal för att manas till ytterligare utveckling. Detta synsätt hängde samman med att undervisning i räkning vid denna tid blivit något för barn.

Inom räknekonsten skall tal tvärtom förstås som i sig meningslösa sammanställningar av siffror. Huruvida talen kan begripas saknar betydelse. Vad som är viktigt är istället att talen kan bemästras i en instrumentell bemärkelse, genom de många regler som räknekonsten innehåller. I det inledande avsnittet i Anderssons räknelära handlar det om att kunna skriva och benämna dem. Givet detta syfte hade de stora talen den fördelen att de satte reglerna på prov. Andersson skriver:

> Det står och utnämnes således:
> 744,345,376,932,186,216,739: det är 744 Trillioner, 345 Tusen 376 Billioner, 932 Tusende 186 Millioner, 216 Tusen 739.[22]

Om man hänger med på utläsandet av detta tal, tycks tanken vara, då har man sannolikt förstått hur det hela skall gå till. Den kritik som under 1800-talet riktades mot stora tal utgick alltså från en syn på talen som är räknekonsten främmande, något vi bör ha minnet i det följande (särskilt s. 14-14).

[21] Skiftande innebörder tillskrevs denna term. En specifik innebörd knuten till något som kallades ”talsortsmetoden” hade talbegreppet i *Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande. Räkning*, Stockholm, 1887. En mer allmän innebörd togs för given av Fredrik Sandberg i hans *Småskolans metodik i kort sammandrag för småskolelärarinne-seminarier*, Stockholm, 1869.

[22] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 4. Om det fanns en tävling i stora tal skulle ändå Johan Gräns, som författade den sista svenska räkneläran (enligt min definiton av genren), vinna. Han ägnar en hel sida åt utnämnande av stora tal. Han föreslår att man, ”om et Tal möjligtwis kunde stiga så högt”, skall sätta en punkt ovanför den siffra som står för en miljon, två över siffran som står för en billion, tre för trillion, fyra för kvadrillion, och ger som exempel talet 21,222,364,567,890,123,456,799,658,005. Gräns, *Underwisning uti Räknekonsten*, s. 5. (Han skulle dock bara vinna tävlingsklassen för räkneläror. Jmf. s. 162 nedan.)

De fyra räknesätten

Karaktäristiskt för räknelärornas redogörelse för addition, subtraktion, division och multiplikation är att de tar fasta på hur man *gör* när man räknar. De beskriver, kan man säga, algoritmer, mer eller mindre explicit i termer av ett antal regler. Andersson beskriver addition på följande sätt:

> Summorne uppställas så, att den första Siffran till höger i hwardera ställes under hwarannan: sedan börjar man wid höger att antingen uppföre eller nedföre lägga den ena Siffran till den andra, tills man gåt alla i första rummet igenom, då Summan skrifwes under linien. Sammanledes gör man med den andra, tredje, fjerde raden etc. såsom: [...][23]

Därpå följer ett kort exempel, med bifogad redogörelse för de operationer som krävs för dess uträknande ("Säg således: 2 och 1 är 3, och 6 dertill är 9. Skrif detta 9 under linien [...]" och så vidare).[24] Dessa beskrivningar av räknekonstens algoritmer utgjorde en del av räknelärorna som var relativt konstant över tid, vilket kan illustreras av en jämförelse mellan den ovanstående beskrivningen och den som finns i Agrelius *Institutiones Arithmetica*:

> Här uti Additione, som de öfriga tre Species, skola talen emot högre handen sålunda upskriwas, at ett under ett, (det är första Talet mot höger under det första wid samma hand,) tio under tio, hundrade under hundrade, etc. skrefne warda: Sedan de sålunda äro satte och stälde, dragas under alla Talen en Linea: Sist begynner man addera ifrån högre handen: Facit eller Summan skrifwes under Linien, rätt under den Rad, af hwilken hon (igenom Additionen) består.[25]

Förutom språkliga skillnader är beskrivningarna som synes mycket lika varandra. Liksom i avsnittet numeratio tvekar Andersson inte för att, direkt efter den ovanstående beskrivningen av additionsalgoritmen, ge sig på tämligen svårhanterliga exempel. De är emellertid noga kommenterade, vilket innebär att läsaren antingen kunde använda dem som en konkretisering av den löpande texten, eller, om han så önskade, för att pröva sin egen förmåga. Till saken hör att avsnittet om addition av hela tal endast sträcker sig över fem sidor. Anderssons framställning är tämligen koncis och exemplen samspelar med den löpande texten för att på litet utrymme förklara hur man gör när man adderar.

Beskrivningen av de fyra räknesätten hade i räknelärorna ett dubbelt syfte. Framför allt syftade den till att lägga en grund för de mer sammansatta tekniker som presenterades senare, framför allt för räknesättet *Regula de Tri*,

[23] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 5.
[24] Givetvis förklarar Andersson även hur "minnessiffran" skall hanteras, etc.
[25] Agrelius, *Institutiones arithmeticae*, s. 7.

som jag snart skall komma till. Den som räknade behövde behärska de fyra räknesätten – och mer därtill – för att kunna använda *Regula de Tri* på ett effektivt sätt. Först i andra hand presenteras de fyra räknesätten som tekniker användbara i sig själva.

Detta visar på det viktiga faktum att räknelärorna i allmänhet inte ägnade något större utrymme åt den typ av synnerligen enkla och därmed också orealistiska problem som senare kom att fylla läroböckerna. Sådana problem diskuterades snarast i ett didaktiskt syfte – till exempel för att illustrera en poäng i den löpande texten. Ytterligare ett skäl kunde vara att, som Andersson gör, ge ett exempel på addition för att visa "till hwad nytta" detta räknesätt kunde vara.[26]

Karaktäristiskt för Anderssons framställning är att alla hans exempel, även det mycket enkla exempel han ger på addition i hela tal, är realistiska. Ovan hänvisade jag till Agrelius för att visa hur en aspekt av räknelärorna varit konstant över tid. Angående exemplen kan Agrelius användas för att illustrera hur räknelärorna innefattade en viss spännvidd vad gäller framställningssättet. Agrelius var nämligen friare än Andersson i sin exempelkonstruktion. Hans exempel kan ofta snarare ses som illustrationer av räknekonstens algoritmer, än som verklighetstrogna beskrivningar av algoritmernas användning.[27] Följande exempel hos Agrelius är typiskt i detta avseende:

> Item. Från år 1550 in til 1586 hafwa Papisterna mördat, brändt och ihjälslagit några, uti åtskillige Länder, derföre at de Påfwiska Läran ej wille emottaga:[28]

Furstliga Personer	49
Grefwar	148
Friherrar	235
Adeliga Personer	147 518
Gement Folk	700 060
hwad är Summan?	Facit 848 010

Det är inte troligt att denna uträkning fyllde någon praktisk funktion. Här tas istället tillfället i akt för i form av ett räkneexempel säga något som egentligen inte har med räknekonsten att göra.

Typiskt för räknelärorna är att stor plats ägnas åt en rad specialfall. För att återgå till Andersson diskuterar han till exempel på särskild plats hur

[26] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 7.
[27] Denna typ av exempel är likväl, som jag ser det, undantag snarare än regel, även hos Agrelius.
[28] Agrelius, *Institutiones arithmeticae*, s. 10. Detta exempel ger, liksom många andra hos Agrelius, en intressant inblick i de frågor som stod på agendan i Sverige kring mitten av 1600-talet. Det är svårt att säga om Agrelius hade något särskilt syfte med valet av tema för just detta exempel.

förekomster av siffrorna noll och ett i de tal som skall behandlas kan utnyttjas för att snabba upp uträkningarna. Till skillnad från när det gäller minnessiffran i addition och lån i subtraktion, syftar jag här på situationer som i princip *kan* hanteras med hjälp av de generella reglerna. Andersson presenterar kort sagt tekniker för hur specialfall kan utnyttjas för att effektivisera det praktiska räknandet. Ett enkelt exempel är hans konstaterande att man vid multiplikation med 1 (ett) helt enkelt skriver av talet som skall multipliceras. Av samma slag är konstaterandet att om två tal skall divideras vilka båda har ”nollor i ändan”, så ”få utstrykas lika många af bägge, hwilka således utstrukna nollor icke upptagas uti bråket”.[29] Karaktäristiskt för räknelärorna är också att Anderssons avsnitt om de fyra räknesätten avslutas med ”probor”, det vill säga tekniker med vars hjälp man kan kontrollera om man räknat rätt. Dessa till synes kuriösa detaljer förtjänar att nämnas på grund av att de tydliggör den grundläggande inställning till det praktiska räknandet som genomsyrar såväl Anderssons som de flesta andra räkneläror. Ingen detalj som kan göra räknandet mer effektivt är här för obetydlig för att nämnas. I nästa kapitel skall vi se att detta ideal kontrasterar skarpt mot den vetenskapliga matematikens, inom vilket tvärtom framställningens korthet tillmäts ett eget värde.

Slutligen kan sägas att de tecken vi idag förknippar med de fyra räknesätten (+, =, etc) inte nödvändigtvis användes i räknelärorna. Varken Agrelius eller Andersson använde dem. Frånvaron av räknetecken, tillsammans med frånvaron av algebra, utgör ett av räknekonstens kännetecken. Räknelärornas uppställningar är uteslutande praktiska, det görs i dem ingen skillnad mellan sättet att *utföra* beräkningarna och sättet att *representera* dem.

De fyra räknesätten i blandade tal

Efter de fyra räknesätten i ”enkla” tal, följer hos Andersson de fyra räknesätten i ”sammanblandade” tal, det vill säga tal med, som det heter idag, olika enheter (kronor, meter, liter, etcetera). Ett riktigt hanterande av sådana tal, enligt räknekonstens alla regler, kräver egentligen en förmåga att hantera bråk. Bråk och sorter utgör därmed en sammanhängande helhet och i räknelärorna presenteras de alltid mer eller mindre parallellt. Agrelius har till exempel inget särskilt avsnitt för blandade tal, utan låter sorterna flyta in i alla typer av beräkningar redan från början i sin bok. Andersson valde emellertid att börja med själva sorterna, för att sedan fokusera på bråken.

Hanterandet av sorter utgjorde en integrerad och central del av räknekonsten. Sorterna var många: Andersson går på ett uppslag igenom relationerna mellan nästan 60 olika sorter.[30] Man använde olika sorter för

[29] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 19.
[30] Till exempel Ducat, Fjerding, Skålpund, Riksdal, Kappa, Lod, Schilling och Kanna. Ibid, s. 24–25.

mynt, vikt, längd, yta, volym och stycketal, och till detta kom att man använde olika sorter beroende på vilken typ av vara man mätte (torra varor, våta varor, metaller, mm.), samt att det förekom variationer mellan olika delar av landet, både vad gäller sorternas namn och vad dessa namn stod för.[31]

Det framgår av Anderssons framställning att han inte förväntade sig av läsaren att han skulle lära sig alla sorter utantill. Räknelärorna kunde användas som handböcker för hantering av ovanliga situationer, dels vad gällde relationen mellan olika sorter, men också, vilket skall framgå nedan, för att klargöra vilka lagar och regler som gällde inom något visst område, samt hur konkreta ”räknesituationer” kunde hanteras på ett smidigt sätt. Däremot var vissa sorter så centrala att man var mer eller mindre tvungen att lära sig dem utantill.

De fyra räknesätten i bråk

Att kunna hantera bråk var en förutsättning för att kunna hantera sorter. *Detta är den enda anledningen till att räknelärorna ägnade utrymme åt bråkräkning*, vilket förtjänar att påpekas med tanke på de många andra motiv för bråkräkning som presenterats senare, särskilt sedan det metriska systemet började användas mer allmänt kring sekelskiftet 1900 och det nära bandet mellan bråk och sorter därmed löstes upp. Roloff Anderssons sätt att ta sig an räkning med ”Bråk eller Brutna tal”, som han kallar det, är fokuserad på praktiskt handhavande. Han inleder med ett avsnitt om bråk ”i gemen”. Detta innehåller först ”Numeratio” motsvarande det för hela tal, där han redogör för terminologin och grundläggande egenskaper hos bråken. Sedan följer ”Abbreviatio”, där Andersson visar hur bråk kan förkortas.[32] För att ge ytterligare exempel på hur räknelärorna beskriver hur man i praktiken gör, kan sägas att Andersson skriver att förkortning oftast sker med siffrorna 2, 3 och 5, och sedan ger några enkla regler för när bråk kan förkortas, nämligen: om de slutar på en jämn siffra (då kan de förkortas med 2), om både täljarens och nämnarens siffersumma blir 3, 6 eller 9 (då kan de förkortas med 3), om både täljare och nämnare slutar på 5 eller 0 (då kan de förkortas med 5).

Räknelärornas indelning av reglerna i fall

Karaktäristiskt för räknelärorna i allmänhet och Anderssons framställning i synnerhet, vad gäller bråk och i övrigt, är som jag redan nämnt att beskrivningen av räknekonstens algoritmer är uppdelad i en mängd fall (vilka Andersson kallar ”förändringar” eller ”händelser”). Här måste poängteras att anledningen till detta inte är ovetskap om att räknekonsten utgår från vissa generella principer – ett påpekande som kan tyckas omotiverat, men vars

[31] Andersson tar upp de särskilda mått som tydligen användes i Bergslagen.

[32] Med ”Abbrevatio” syftar Andersson på att dividera både bråkets nämnare och täljare med samma tal. Till exempel kan $\frac{8}{16}$ förkortas till $\frac{1}{2}$ genom division med 8.

betydelse kommer att framgå i nästa kapitel. Jag tycker mig kunna identifiera två skäl till dessa ibland till synes pedantiska indelningar:

För det första en strävan efter tydlighet. Som exempel på detta kan tas Anderssons sju förändringar för multiplikation av bråk. Han utgår från multiplikation mellan brutna och hela tal och skiljer sedan mellan: 1) Hela och Brutna med Hela, 2) Hela med Brutna[33], 3) Brutna med Brutna, 4) Hela och Brutna med Brutna, 5) Hela med Hela och Brutna, 6) Brutna med Hela och Brutna samt 7) Hela och Brutna med Hela och Brutna. För vart och ett av dessa fall visar Andersson med exempel hur räknandet skall ske. Det kan tyckas enkelt att så att säga översätta mellan dem, eller kanske än bättre att se dem som tillämpningar av en generell princip. Här måste man dock inse att indelningen i fall helt enkelt utgör en annan *strategi* för att förmedla konsten att räkna. Typiskt för räknekonsten är en väldigt direkt relation till den beräkning som skall utföras. Räknelärorna beskriver tämligen exakt vad som skall göras, utan inblandning av begrepp eller teorier. Man kan se det som en sekventiell eller algoritmisk förståelse av räknande. Räknelärorna innehåller en rik uppsättning olika program eller recept för att hantera olika situationer. Räknarens uppgift består i att lära sig recepten (eller lära sig följa dem med hjälp av en bok) och att identifiera vilket recept som är tillämpbart.[34] Detta förhållningssätt kontrasterar skarpt mot en förståelse av matematiken som en uppsättning begrepp, med vars hjälp verkligheten kan bemästras – ett synsätt jag redogör för nedan och som kom att genomsyra skolmatematiken.[35]

För det andra syftar indelningen i fall till att i möjligaste mån undvika praktiskt svårhanterliga uträkningar. Väsentligt inom räknekonsten är att lära sig identifiera till vilket fall en viss uträkning hör – för att därigenom lösa den på lättast möjliga sätt. Detta syfte blir tydlig i det Andersson skriver om addition och subtraktion som avslutning på sitt avsnitt om bråkräkning:

> §. 52. Till beslut på de fyra sätten att räkna (Quator Species) i Bråk eller Brutna Tal, måste jag ärindra, att uti Addition och Subtractio är hufvudsaken, at kunna fermt uppsöka General-Nämnaren, hwilken man wäl kan finna genom en enda Regel: multiplicera alla Nämnare tillsamman, så är producten General-Nämnare: Men emedan härigenom förorsakas en widlyftig operation, måste man alltid beflita

---

[33] Andersson förklarar sig: ”Denna förändring är egentligen den samma, som den första; men på det ingen discipel må blifwa förwillad, om Bråket står öfwer eller under, har jag äfwen uti sednare fallet welat här införa några exempel, och wisa huru man dem tracterar, nemligen [...]”, Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 65.

[34] För övrigt en syn på matematiken som stämmer mycket bra med Wittgensteins så som han presenterar den i *Remarks on the foundations of mathematics: Bemerkungen über die Gründlagen der Mathematik*, Oxford, 1956.

[35] Givetvis är det lätt att se brister i räknelärornas sätt att presentera räknekonsten. En viktig poäng i den här avhandlingen är emellertid att skolmatematikens lösning på det problem som förmedling av förmågan att räkna utgör, nämligen att basera den på formerande av matematiska begrepp, knappast kan sägas ha varit mer framgångsrik än räknelärornas framställningar baserade på recept.

> sig om den minsta General-Nämnaren, till hwilkens finnande nödwändigt fordras de 5 Förändringar, som uti Bråken finnas tecknade.[36]

Andersson observerar här att det å ena sidan finns en generell princip som alltid kan följas, men att denna emellertid leder till ”widlyftiga” uträkningar. Av denna anledning har han delat in uträkningarna i fem förändringar vilka kan användas för att hålla operationerna hanterliga. Här tydliggörs den skillnad mellan räknekonsten och den vetenskapliga matematiken som består i att räknekonstens syfte inte bara är att producera rätt svar, utan också förse räknaren med verktyg för att kunna utföra beräkningarna på ett effektivt sätt. De detaljerade indelningarna i fall var ett av flera sådana verktyg.

Regula de Tri

Såväl räkning med hela tal och sorter som bråkräkning utgör i räknelärorna snarast en förberedelse till den generella teknik för lösning av praktiska problem vilken gick under namnet *Regula de Tri*. *Regula de Tri*, skriver Andersson, ”lärer huru man till trenne gifna Tal skall söka och finna det fjerde”. För att *Regula de Tri* skall vara tillämpbar måste vissa villkor vara uppfyllda. Dessa villkor kan enkelt förklaras med hjälp av algebra. Anderson använder emellertid inte algebra och detta är ett av räknekonstens kännetecken. Signifikativt är att Andersson istället börjar med en regel. Han skriver:

> Sjelfwa Regeln är denna: Multiplicera det andra Talet genom de tredje, och det productum integrum då fås dividera med det första.[37]

Sedan förklarar han vad regeln kan användas till i fyra punkter. Vad vi idag kanske skulle kalla den matematiska principen är här sammanvävd med hur den kan komma till nytta inom räknekonsten. Budskapet framgår emellertid, inte minst genom ett insprängt exempel: ”När 2 ger 4, hwad ger då 16? Sw. 32”, tillsammans med följande förklarande kommentar:

> Emedan 4 i andra rummet är dubbelt så stort som 2 i första rummet, måste det som sökes wara dubbelt så stort som 16 i tredje rummet. Eller, emedan 2 är 1/8 af 16, måste 4 wara 1/8 af det jag söker; så att till följe häraf det fjerde talet straxt skulle kunna tagas, om möjligt wore, att uti alla exempel genast se rätta proportionalen; men som detta uti större tal, i synnerhet irrationala, eller då frågan är om flere sorter, större och mindre, icke låter sig göra, måste efter förenämnde Regel det fjerde Proportional-Talet sökas.[38]

[36] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 75–76.
[37] Ibid, s. 78.
[38] Ibid, s. 79.

Regeln som sådan är med andra ord motiverad, eftersom en mängd frågor är så komplexa att man inte genast kan ”se” det rätta svaret. Att tala om *Regula de Tri* som en ”regel” är egentligen missvisande. Snarare handlar det om ett system av handgrepp vilka, genom att kombineras på olika sätt, kunde användas till att besvara en mängd frågor.

I matematiska termer kan man säga att *Regula de Tri* löser problem där det föreligger proportionalitet.[39] Den enklaste situationen är att det finns fyra tal, a, b, c och d för vilka gäller att $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, där tre av talen är kända och det fjärde efterfrågas. Så är det i Anderssons exempel ovan. Genom att sätta $a = 2$, $b = 4$ och $c = 16$, kan det passas in i den algebraiska formeln, av vilken följer att $d = 32$. Precis som Andersson säger är emellertid detta exempel så enkelt att någon regel knappast är behövlig. De fall som Andersson behandlar är betydligt mer komplicerade. Svårigheter kan tillkomma genom att fler än fyra tal ingår i frågan. Framför allt tillkommer emellertid svårigheter i och med att talen alltid är uttryckta i *sorter*.

Väsentligt är att så gott som alla frågor, bortsett från de allra mest triviala, inom räknekonstens besvaras med hjälp av *Regula de Tri*. Detta även om det som skall göras bara är att multiplicera eller dividera två tal med varandra. Man började alltid med att ställa upp talen i vad man kallade deras respektive ”rum”. Rummen åtskildes ofta av kolon, enkelt kolon mellan första och andra rummet, dubbelkolon mellan andra och tredje, samt enkelt kolon mellan det tredje och fjärde rummet, dvs:

första rummet : andra rummet :: tredje rummet : fjärde rummet

Roloff Andersson skrev emellertid av någon anledning istället:

första rummet – andra rummet = tredje rummet – fjärde rummet

Det som ser ut som minus- och likhetstecken har alltså här en helt annan innebörd. Att ställa upp talen på rätt sätt utgjorde i själva verket, enligt flera författare, räknekonstens svåraste moment. Det motsvarade vad vi idag skulle kalla att avgöra vilket räknesätt som var tillämpligt. När talen väl var uppställda återstod bara att följa räknekonstens regler. Jag skall strax ge ett par exempel på hur detta i praktiken kunde gå till.

Först skall jag emellertid beskriva en särskild teknik, som i räknelärorna kallades *Praxis Italica*. Dess syfte var att hantera de räknetekniska svårigheter som ofta uppstod på grund av att talen var stora och sorterna stod i komplicerade förhållanden till varandra. Hade man otur var inga förkortande genvägar tillämpliga – då återstod inget annat än att ta itu med vad Andersson ofta kallar ”widlyftiga” uträkningar. *Praxis Italica* var ett generellt hjälpmedel för att hantera dessa.

---

[39] Jmf. Hatami, *Reguladetri*, s. 62ff.

Praxis Italica

Redan på den sjätte av de 21 sidor som hans ”Inledning till Regula de Tri” upptar, introducerar Andersson *Praxis Italica*. Detta är en princip för att hantera sorter. Agrelius skriver att *Praxis Italica* är ”ett härligt och konstrikt Compendium Regulæ Aureæ, förmedelst hwilket man kan undwika mycken widlöftighet, och med fast ringa omak och beswär, utreda Frågorna, ehuru intricate de hälst synas”.[40] Andersson är mer jordnära i sin beskrivning, och jag skall använda den som utgångspunkt för en förklaring av vad *Praxis Italica* innebär.

Den i teorin enklaste principen för att hantera sorter är att omvandla alla tal till den minsta i frågan förekommande sorten, sedan genomföra alla beräkningar, och slutligen omvandla tillbaka till större sorter. Andersson ger följande exempel: Antag att ett Skålpund av en viss vara kostar 3 Riksdaler och 24 Schillingar. Vad kostar då 8 Skålpund? Detta motsvarar i termer av *Regula de Tri* att vi i andra rummet har 3 Riksdaler och 24 Schillingar och i det tredje har 8 Skålpund, vilket i algebraisk notation motsvarar ekvationen:

$$\frac{1}{\text{3 Riksdaler 24 Schillingar}} = \frac{\text{8 Skålpund}}{x}$$

För att utföra denna beräkning skulle man nu kunna uttrycka de 3 Riksdalerna i den mindre sorten Schillingar (1 Riksdaler = 48 Schillingar), vilket ger 168 Schillingar i den första nämnaren och multiplicera detta med 8, vilket ger 1344 Schillingar. Detta belopp måste sedan förkortas till riksdaler genom att divideras med 48, vilket slutligen ger 28 riksdaler som svar.

Praxis Italica går ut på att man istället för att uttrycka alla storheter i termer av den minsta sorten, genom hela talet räknar i delar (i ”part”) av den största. I detta exempel skulle man därmed, istället för att uttrycka de 3 Riksdalerna till Schillingar, utnyttja att 24 Schillingar är en halv riksdaler, vilket ger uträkningen:

$$8 * 3 \text{ Riksdaler} + 8 * \frac{1}{2} \text{ Riksdaler} = 28 \text{ Riksdaler}$$

Här slipper man det stora mellanledet uttryckt i den mindre sorten, samtidigt som man slipper den avslutande förkortningen: ”Och hwem finner icke, att detta sättet medförer mindre möda”, frågar Andersson retoriskt.[41] Emellertid kräver uppenbarligen Praxis Italica ett gott handlag med bråk. Andersson skriver: ”[För att] wäl och fort kunna practice räkna, fordras”:

---

[40] Agrelius, *Institutiones arithmeticae*, s. 214.
[41] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 83.

> 1:o Att fermt multiplicera sammanblandade Tal, så att man kan t.ex. säga: 7 gånger 14 Schillingar är 98 eller 2 Riksdaler och 2 Schillingar, utan att räkna det afsides med griffel.
>
> 2:o Att wäl dividera in mente (i tankarna) med ett Tal, så wäl sammanblandade som simpla Tal.
>
> 3:o Att följa en wiss och säker methode, så att i händelse man räknar felaktigt, man wisst wet att felet icke består i sättet, utan i Talen.[42]

Den förmåga Andersson beskriver här involverar dels en förmåga att snabbt och säkert tillämpa räknekonstens algoritmer, dels en förmåga att komma ihåg och dra sig till minnes fakta rörande sorter. Båda dessa förmågor var centrala för ett behärskande av räknekonsten.

Praxis Italica illustrerar hur räknelärorna mycket tydligt tar sikte på det praktiska räknandet. De är fyllda av olika typer av hjälpmedel. Reglerna kan ses som sådana hjälpmedel, liksom gångertabellen och tabeller som beskriver sorternas förhållanden till varandra. I avsnittet om *Praxis Italica* presenterar Andersson ytterligare ett antal tabeller, vars syfte är att underlätta ”tagandet i part”. Först en ”Tabula Multiplicationis Major”, multiplikationstabellen från 11 till 20 (vilken givetvis samtidigt är en divisionstabell). Sedan en ”Tabula Reductionis”, som visar hur 1-9 Schillingar omvandlas till Runstenar (1 Schillingar = 12 Runstenar) samt hur 1-9 Riksdaler omvandlas till Schillingar (1 RB = 48 Sch) enligt följande:[43]

12 rst	=	1 Sch	48 Sch	=	1 RB
24	=	2	96	=	2
36	=	3	144	=	3
48	=	4	192	=	4
60	=	5	240	=	5
72	=	6	288	=	6
84	=	7	336	=	7
96	=	8	384	=	8
108	=	9	432	=	9

[42] Ibid. Det Andersson menar är alltså att man, om man ser att man fått fel svar, måste vara säker på att detta beror på att man helt enkelt *räknat fel*, och att felet inte ligger i att man missförstått hur algoritmerna man använder fungerar – dvs. glömt bort hur man hanterar lån i subtraktion eller dylikt.

[43] Ibid, s. 85: ”rst” är en förkortning av Runstenar, ”Sch” står för Schillingar och ”RB” står för Riksdaler (Banco).

Om denna tabell skriver Andersson

> Nyttan af denna Tabell wisar sig straxt uti Regula di Tri, der sammanblandade Tal merändels i alla Exempel antingen multipliceras eller divideras, eller ock begge tillika; och emedan man, så ofta görligt är, så lagar, att man ej har mer än en siffra att multiplicera eller dividera med, som i det högsta är 9, kan man genom tillhjelp af denna Tabula, sedan den är wäl fästad i minnet och lärd utantill, reducera i tankarna, och således långt fortare, än om man hwarje gång skulle göra det afsides med en griffel.[44]

Slutligen presenterar Andersson ett antal ”Tabulae Practicales” vilka anger hur ett visst antal av en mindre sort kan beskrivas som en summa av delar av den närmast större sorten.[45] Dessa tabeller skulle man lära sig utantill och de utgjorde tämligen intrikata hjälpmedel för hanteringen av sorter enligt *Praxis Italica*.[46] *Praxis Italica* är med andra ord ett redskap för att, med de till buds stående medlen, det vill säga huvudet och en griffel, lösa den typ av räkneproblem som faktiskt uppkom i praktiken. Algoritmerna, tabellerna och reglerna hänger samman på ett systematiskt sätt. Tas någon av dem bort, blir de övriga tämligen oanvändbara. Man har ingen praktisk nytta av addition och subtraktion av bråk, om man inte kan hantera de många sorterna. Kunskap om omvandling mellan sorter är inte praktisk användbar utan praktisk färdighet i att kunna multiplicera och addera, och så vidare. Detta är högst väsentligt då man jämför räknekonsten med det som senare skulle bli skolmatematik.

Tillämpningar av *Regula de Tri*

Såväl Roloff Anderssons, som alla andra räkneläror, avslutas med en lång rad ”tillämpningar” av *Regula de Tri*. Dessa utgjorde räknelärornas huvudsak. Johan Gräns, som var en av de sista svenskar som författade en räknelära relativt trogen genren, beskriver i sin räknelära dessa räknesätt på följande sätt:

> Genom Regula de Tri upplösas en oändelig mängd af frågor, som upstå i Handel och allmänna lefwernet. [...] Af de flere **händelser** til hwilka denna Regel lämpas, upkomma de flere namn eller titlar under hwilka den utöfwas. Namnen härleda sig från sjelwa räkningens egenskap, men

---

[44] Ibid.

[45] Att använda denna tabell utgjorde i själva verket såväl den stora fördelen, som den stora svårigheten, med *Praxis Italica*.

[46] I avsnittet om *Praxis Italica* blir det tydligt hur Agrelius och Anderssons framställningssätt skiljer sig åt. Andersson har betydligt mer löpande text än Agrelius. Agrelius låter tvärtom sin framställning kretsa kring kommenterade exempel. Andersson presenterar ofta sitt material i form av tabeller. För att förklara *Praxis Italica* använder Agrelius istället ett grafiskt tämligen intrikat sätt att redovisa hur uträkningarna i praktiken går till.

> icke från räknesättet, som i hwad händelse som hälst proportionalitet blir detsamma. Således förekommer at lära **Intresse-Räkning, Rabatt-Räkning, Thara-, Bytes-** och **Wrak-Räkning, Winst-** och **Förlust-Räkning, Sällskaps-Räkning m. m.** Och ehuru olika upgifterna til sin natur kuna wara, komma de dock deri öfwerens, at de alla kunna uplösas genom Regula de Tri.[47]

Räknesättens namn låter oss i många fall – men inte alltid – ana vilken typ av uträkningar det är fråga om. Avsnitten är utformade som recept. De inleds med en kort förklaring av när räknesättet är tillämpbart. Sedan följer löpande text och kommenterade exempel vilka beskriver räknesättets användning. Till exempel är ”Regula Qvaestionis Inversa” en regel för att hantera frågor om ”sådana ting, af hwilka Mindre fordrar Mera, och Mera fordrar Mindre, och således tyckes wara stridande mot Regula de Tri Directa”.[48] Ett långt avsnitt i Anderssons räknelära handlar om ”Intresse-räkning”, det vill säga olika typer av ränteberäkningar.

Många av de tillämpningar på *Regula de Tri* som ingår i såväl Agrelius' som Anderssons räkneläror finns även med i *Treviso-aritmetiken* från 1478. Mer specifikt ingår i denna bok (i översättning till svenska): Tararäkning, Bolagsräkning, Bytesräkning och Alligationsräkning.[49]

Låt mig ta räknesättet Bolagsräkning som exempel för att illustrera räknelärornas inflytande över den senare skolmatematiken. Detta räknesätt kallades ursprungligen ”regula societatis”[50] och beskriver hur man (enligt räknekonstens principer) skall räkna om ett antal personer satsat pengar i ett gemensamt ”bolag” och detta bolag efter en tids verksamhet skall lösas upp. Tanken är att personernas ursprungliga satsningar definierar deras respektive andelar i bolaget och att de, när bolaget löses upp, skall få ut pengar motsvarande dessa andelar.[51] Detta räknesätt kom under 1700-talet att få den

---

[47] Gräns, *Underwisning uti Räknekonsten*, s. 148. I innehållsförteckningen till Anderssons räknelära nämns följande räknesätt: Regula Qvæstionis Inversa, Regula Dupla Directa & Regula Dupla Inversa, Intresse-Räkning, Rabatt-Räkning, Terminers Reduction, Thara-Räkning, Baratto-eller Bytes-Räkning, Winst och Förlust, Commissions-Räkning, Regula Societatis, Om Arf-Delning, Fatorie- eller Factors-Räkning, Skepps-Parters Räkning, Hafverie- eller Sjö-Skadas Räkning & Assecurance-Räkning, Falisements- eller Banqueroute-Räkning, Regula Alligationis, Beskickningsräkningar i guld, silver och tenn, Regula Falsi, Regula Cæsis eller Virginum, Cambio-Conto eller Wäxelräkning. Till dessa kommer en rad särskilda fall med eget namn, som inte fått plats i innehållsförteckningen.

[48] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 158. Det typiska exemplet på detta räknesätt är följande: antag att 3 arbetare kan gräva ett dike på 5 dagar. Hur lång tid tar det då för 8 arbetare gräva ett motsvarande dike? Här fordrar *fler* arbetare *mindre* tid – alltså är Regula Qvaustionis Inversa tillämplig.

[49] Swetz, *Capitalism and arithmetic*, s. 224.

[50] Till exempel i Agrelius, *Institutiones arithmeticae.*

[51] Antag att A satsat 5 000 kronor och B satsat 10 000 kronor. Eftersom 5 000 är en tredjedel av 15 000 kan man då säga att A äger en tredjedel av bolaget, medan B äger två tredjedelar. Då bolaget skall lösas upp är det, eftersom det gått med vinst, värt 300 000 kronor. Då skall, enligt de antaganden som ekonomiska villkor etc som räknekonsten implicerar, A få en tredjedel av 300 000, dvs 100 000 kronor och B två tredjedelar av 300 000 dvs 200 000 kronor.

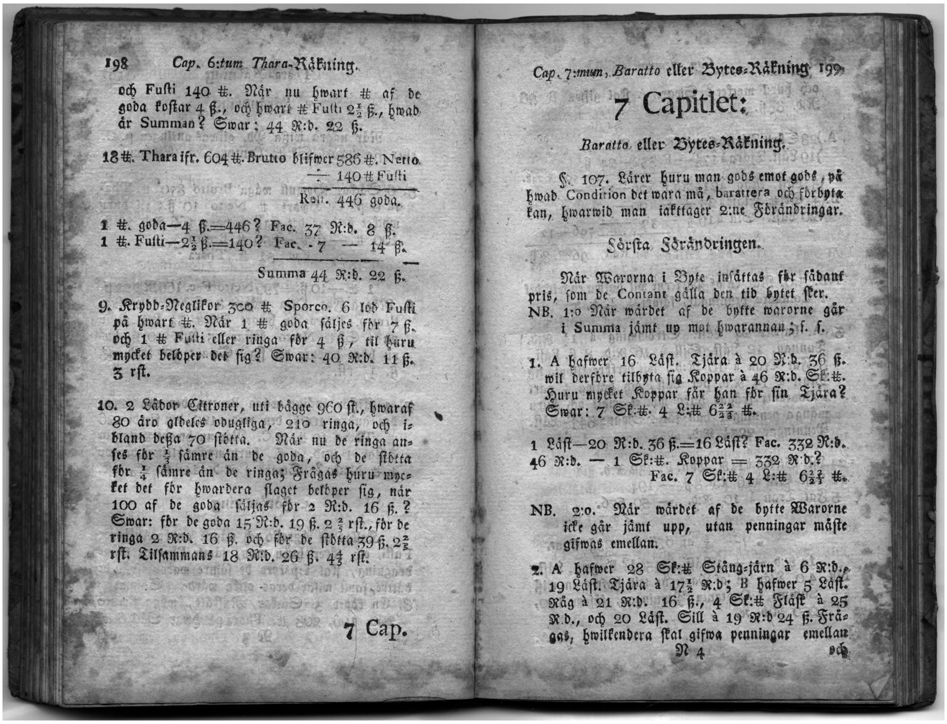
svenska beteckningen "bolagsräkning". Under 1800-talet tog många läroboksförfattare fasta på vad de förmodligen uppfattade som det väsentliga i räknesättet och döpte om det till "delningsräkning".

Det fascinerande är att läroböcker så sent som på 1950-talet – en period då många av de läroböcker som användes utgjorde mer eller mindre bearbetade nyutgåvor av böcker författade på 1890- eller ibland till och med 1880-talet – ofta hade "bolagsräkning" eller "delningsräkning" som överskrift på något av bokens avsnitt. Och även i läroböcker från denna tid där dessa rubriker inte var utsatta, döljer sig räknesättet inte desto mindre garanterat i många av de övningsuppgifter som då utgjorde läroböckernas huvudsakliga innehåll.

För att ta ett annat exempel sträcker sig det tolfte kapitlet i Anderssons räknelära över arton sidor och handlar om "Beskicknings-Räkningar uti Guld, Silfwer och Tenn".[52] Här blir det särskilt tydligt att Anderssons ambition sträcker sig betydligt längre än till att förmedla räknetekniker. Avsnittet tycks nämligen vara tänkt att fungera som en handbok för beskickning (det vill säga en handbok i sammansmältning av metaller för produktion av mynt). I ett flertal tabeller redogör Andersson för de olika myntslagens innehåll av olika metaller och de processer genom vilka man förändrar dessa halter. *En* aspekt av dessa processer utgörs av aritmetiska operationer, men Anderssons redogörelse för själva manipulationerna av tal – enligt *Regula de Tri* – tar här betydligt mindre plats än beskrivningen av allt det andra som måste kännas till för att dessa manipulationer skall vara möjliga att utföra.

Uppslaget i Anderssons räknelära nedan ger en känsla för vilken typ av frågor som räknesätten besvarade. Till vänster syns sista sidan på kapitlet om "Thara-Räkning", vilken "Lärer hur många skålpund för korgar, Fat, Säckar, etc. hwaruti Waror är inpackade, skola afkortas".[53]

[52] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 242–260. Även detta räknesätt kan för övrigt följas fram till mitten av 1900-talet.
[53] Ibid, s. 199.



198 Cap. 6:tum Thara-Räkning.

och Fusti 140 ℔. När nu hwart ℔ af de goda kostar 4 ß., och hwart ℔ Fusti $2\frac{1}{2}$ ß., hwad är Summan? Swar: 44 R:d. 22 ß.

18 ℔. Thara ifr. 604 ℔. Brutto blifwer 586 ℔. Netto.
÷ 140 ℔ Fusti
Rest. 446 goda.

1 ℔. goda—4 ß.=446? Fac. 37 R:d. 8 ß.
1 ℔. Fusti—$2\frac{1}{2}$ ß.=140? Fac. 7 — 14 ß.
Summa 44 R:d. 22 ß.

9. Krydd-Neglikor 300 ℔ Sporco. 6 lod Fusti på hwart ℔. När 1 ℔ goda säljes för 7 ß. och 1 ℔ Fusti eller ringa för 4 ß., til huru mycket belöper det sig? Swar: 40 R:d. 11 ß. 3 rst.

10. 2 Lådor Citroner, uti bägge 960 st., hwaraf 80 äro aldeles odugliga, 210 ringa, och ibland dessa 70 stötta. När nu de ringa anses för $\frac{1}{3}$ sämre än de goda, och de stötta för $\frac{1}{4}$ sämre än de ringa; Frågas huru mycket det för hwardera slaget belöper sig, när 100 af de goda säljas för 2 R:d. 16 ß.? Swar: för de goda 15 R:d. 19 ß. $2\frac{2}{5}$ rst., för de ringa 2 R:d. 16 ß. och för de stötta 39 ß. $2\frac{2}{5}$ rst. Tilsammans 18 R:d. 26 ß. $4\frac{4}{5}$ rst.

7 Cap.

Cap. 7:mum, Baratto eller Bytes-Räkning 199

7 Capitlet:

Baratto eller Bytes-Räkning.

§. 107. Lärer huru man gods emot gods, på hwad Condition det wara må, barattera och förbyta kan, hwarwid man iakttager 2:ne Förändringar.

Första Förändringen.

När Warorna i Byte insättas för sådant pris, som de Contant gälla den tid bytet sker.
NB. 1:o När wärdet af de bytte warorne går i Summa jämt up mot hwarannan; s. s.

1. A hafwer 16 Läst. Tjära à 20 R:d. 36 ß. wil derföre tilbyta sig Koppar à 46 R:d. Sk:℔. Huru mycket Koppar får han för sin Tjära? Swar: 7 Sk:℔. 4 L:℔ $6\frac{22}{23}$ ℔.

1 Läst—20 R:d. 36 ß.=16 Läst? Fac. 332 R:d.
46 R:d. — 1 Sk:℔. Koppar = 332 R:d.?
Fac. 7 Sk:℔ 4 L:℔ $6\frac{22}{23}$ ℔.

NB. 2:o. När wärdet af de bytte Warorne icke går jämt upp, utan penningar måste gifwas emellan.

2. A hafwer 28 Sk:℔ Stång-järn à 6 R:d., 19 Läst. Tjära à $17\frac{1}{2}$ R:d; B hafwer 5 Läst. Råg à 21 R:d. 16 ß., 4 Sk:℔ Fläsk à 25 R:d., och 20 Läst. Sill à 19 R:d 24 ß. Frågas, hwilkendera skal gifwa penningar emellan

N 4 och

Figur 1. Det sjunde kapitlet i Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica*, vilket handlar om ”Baratt-” eller ”Bytesräkning”, kan tjäna som illustration av de många tillämpningarna av regula de tri som alltid kommer sist, eller nästan sist, i räknelärorna. Bytesräkning, skriver Andersson, ”Lärer huru man gods emot gods, på hwad Condition det wara må, barattera och förbyta kan”. Det handlar med andra ord om hur priser skall sättas då varor byts mot varor: I Anderssons första exempel, tjära mot koppar.[54]

Uppslagets högra sida inleder ett avsnitt om ”Baratto eller Bytes-Räkning”, vilket användes för att räkna på byten av varor. Andersson delar in detta räknesätt i två ”förändringar”. Den första gäller då ”Warorna i Byte insättas för sådant pris, som de kontant gälla den tid bytet sker”. Denna förändring delar Andersson i sin tur in i tre fall, varav vi ser de första två på sidan 199. Jag skall här använda det första av dessa fall för att lite mer detaljerat beskriva hur *Regula de Tri* kunde användas. Detta fall beskriver hur man gör: ”När wärdet af de bytta warorne går i Summa jämt upp mot hwarannan”. Han förklarar med hänvisning till följande exempel:

[54] Ibid, s. 198–199.

> 1. A. hafwer 16 Läst. Tjära à 20 RB 36 Sch will derföre tillbyta sig Koppar à 46 RB Skeppundet. Huru mycket koppar får han för sin Tjära? Swar: 7 Skeppund 4 Lispund $6\frac{22}{23}$ Skålpund.
>
> 1 Läst - 20 RB 36 Sch = 16 Läst Fac. 332 RB.
> 46 RB - 1 Skeppund Koppar = 332 RB
> Fac. 7 Skeppund 4 Lispund $6\frac{22}{23}$ Skålpund.[55]

I den första radens uträkning – där det som ser ut som ett minustecken och ett likhetstecken här markerar de olika rummen – räknar Andersson ut hur mycket A:s 16 Läster tjära är värda. Eftersom det tal som står i första rummet är en etta, hör detta *Regula de Tri*-problem till en särskild grupp som Andersson kallar ”Multiplikations-Exempel”.[56] Det som skall göras är därför helt enkelt att multiplicera 20 Riksdaler 36 Schillingar med 16, vilket ger 332 Riksdaler. Den andra radens *Regula de Tri* uttrycker att vi vet att 1 Skeppund koppar kostar 46 Riksdaler och undrar hur många Skeppund vi då får för 332 Riksdaler (vilket vi från den första radens uträkning vet att A:s tjära är värd). Svaret har Andersson utan kommentarer uttryckt i lämpliga sorter.

Räknelärornas realism

Låt mig avsluta denna redogörelse för räknelärornas innehåll med en diskussion av en fråga som senare kom att stå nära centrum av den skolmatematiska diskussionen: frågan om *realism*. Den kritik som riktades mot räknelärorna – och i synnerhet Agrelius *Institutiones Arithmetica* – gällde bland annat bristande realism. I Anderssons bok kan man, angående ”delningsräkning” läsa att:

> De exempel en del Arithmetici pläga här, under särskilt förändring införa, äro mindre rimliga och förekomma aldrig i Praxin, ty det är besynnerligt sagdt, att twå göra Compagnie, A i 6 och B. i 9 månader. Men om flere äro i Sällskapet och endera antingen dör bort eller eljest will skilja sig deirifrån, eller ock någon annan will efter en tids förlopp träda i Sällskapet, göres då alltid afräkning, och liksom ett nytt Compagnie begynnes; sammaledes efter det ock, när en eller flere i Compagniet efter någon tid will öka sina insatser med större eller mindre Summor.[57]

Här kritiserar alltså Andersson Agrelius för att han beskriver fall som i praktiken aldrig uppstår. Att Agrelius gör detta kan förklaras av att hans exempel snarare syftar till att illustrera av vad man *kan* göra, än att beskriva

[55] Ibid, s. 198-199.
[56] Ibid, s. 100.
[57] Ibid, s. 217. Detta sätt att förhålla sig till genren kritiskt utgör ytterligare ett exempel på hur Andersson relaterar till en jämlik läsare.

vad man faktiskt i praktiken *gör*. Andersson ser inte värdet med den typen av exempel. Ett annat område där Andersson kritiserar Agrelius bristande realism rör ”fördubblade bråk”. Ytterst motvilligt och mycket kortfattat redovisar Andersson hur man räknar med sådana bråk. Han anser nämligen att de ”äro mindre nyttiga än konstiga”.[58] Han visar i två exempel hur de ”med Regula de Tri tracteras” och skriver sedan i en ”nota”:

> Att fylla papperet med flere sådana exempel, anser jag så mycket mindre nödigt, som de sällan förekomma, och will dessutom hänwisa den till Agrelius, som åstundar blifwa en konstig Räknemästare. Jag håller mig endast wid det nyttig, hwatill mitt uppsåt är att wisa genast wägen och lättaste sättet, det jag (oförgripligen att säga) tror mig redan till en del fullgjordt, och hwad som brister skall härefter följa.[59]

Andersson vill, liksom Johan Gräns, en annan författare, hålla sig till det som är ”nyttigt” och utesluta allt annat. Gräns skriver i sitt förord:

> Som mit syftemål warit at afhandla hwad som egentligen til Handels- och Hushålls-Räkning hörer, så har jag utlämnat alt som jag ej funnit dermed äga nära gemenskap, emedan jag tillika ansett utan ändamål, at fylla papperet med uplösning af frågor som sällan i utöfning förekomma. Endast det nödwändiga och nyttiga har warit mit föremål.[60]

Här syns två avgränsningar. Dels gentemot sådana delar av räknekonsten som Gräns menar inte hör till hans ämne (uppenbarligen till exempel progressioner och rotutdragning vilka tas upp i många räkneläror men inte av Gräns), dels gentemot frågor som kan besvaras med räknekonstens tekniker, men som *de facto* inte förekommer i praktiken.

Med dessa synpunkter från Andersson och Gräns som utgångspunkt, förstår jag räknekonsten som först och främst ett system av tekniker för att hantera praktiskt räknande, så som det faktiskt utfördes. Det faktum att räknelärorna uppenbarligen inte alltid motsvarade detta ideal kommer att diskuteras nedan (s. 14ff). Bortser vi tillfälligt från detta kan man säga att *praktiken* bestämde räknelärornas innehåll. De är, kan man säga, strukturerade med utgångspunkt från det praktiska räknandet.[61] Närheten till praktiken bestämde även vad som ansågs nödvändigt för att behärska räknekonsten. Den höga graden av realism gällde med andra ord inte bara den kontext den

---

[58] Ibid, s. 153–154.
[59] Ibid, s. 155.
[60] Gräns, *Underwisning uti Räknekonsten*, Auctorns företal.
[61] Typiskt är i detta avseende att Agrelius utgår från olika typer av sorter i sin klassificering av olika tillämpningar av *Regula de Tri* i hela tal. Han har rubriker som ”Om Alnar och dess Mått”, ”Om Öl och Win-Mått” och ”Om Tunne-Gods”, Agrelius, *Institutiones arithmeticae*, s. 150–194. Under var och en av dessa rubriker går han igenom ett flertal olika sätt att räkna med just den sort det då är fråga om.

räknande befann sig i, utan också den räknande själv. Man behövde känna till räknekonstens regler, identifiera de många förändringar som reglerna innefattade och ha en mängd tabeller ”wäl fästad[e] i minnet och lärd[a] utantill”.[62]

Ett problem jag nämnde inledningsvis, men sedan inte berört i min redogörelse för räknelärornas innehåll, är nödvändigheten av att skilja mellan å ena sidan räknelärornas beskrivningar, och å den andra hur man i praktiken räknade. Jag skall avsluta kapitlet med en diskussion av detta problem.

Räknelärornas användning

Det är alltså nödvändigt att skilja mellan räknekonsten i egenskap av praktik och räknelärorna i egenskap av böcker som utgav sig för att beskriva denna praktik. Med utgångspunkt från dagens skolmatematik är det lockande att betrakta räknelärorna som läroböcker. I själva verket är det dock långt ifrån klart hur böckerna i praktiken användes, det vill säga vilka som köpte dem, vilka som läste dem och i vilket syfte de blev lästa. Det är varken säkert att de frågor räknelärorna beskriver faktiskt förekom i praktiken eller att de besvarades med hjälp av de metoder räknelärorna beskriver. Det är en fundamental skillnad mellan att författa böcker och att räkna, och även om mycket talar för att många av räknelärornas författare också var skickliga räknemästare, måste räknelärornas innehåll i stor utsträckning förstås som variationer på ett *litterärt* tema.[63] Att en bok innehåller en viss bild av räknande kan med andra ord inte förklaras med hänvisning till att man då boken skrevs räknade på ett visst sätt. Vi måste behandla räknekonstens beskrivningar med försiktighet.

Delvis användes räknelärorna säkert inom ungdomsundervisning, i anslutning till lärlingsutbildning och för självstudier.[64] Av titlarna kan man utläsa att de författades för detta ändamål, men även, som Andersson skriver i titeln till sin *Arithmetica Tironica*, till ”Allmänhetens” tjänst. Johan Gräns skriver i förordet till sin *Underwisning uti Räknekonsten*:

> Öfweralt har jag sökt möjligaste tydlighet, hwarföre jag ock föreställer mig, at en hwar med någorlunda urskillning begåfwad, kan genom efterföljd af hwad i Boken föreskrifwes, inhämta det nödwändigaste af denna kunskap, utan annan Lärmästares tilhjelp.[65]

---

[62] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 85.
[63] Angående att räknelärornas författare var räknemästare, se Eves & Eves, *An introduction to the history of mathematics*, s. 267–268.
[64] Ibid, s. 268; Swetz, *Capitalism and arithmetic*, s. 19–24.
[65] Gräns, *Underwisning uti Räknekonsten*, s. 2.

Även om denna ambition inte är alltid är explicit är den typisk för räknelärorna. Inför de grupper av övningsexempel som finns i Anderssons bok brukar det dessutom ofta stå något i stil med:

> Härefter följa några blandade Öfnings-Exempel, som hwar och en sjelf kan öfwa sig uti, att känna hwad slags exempel det är, och till hwilken förändring hwart och ett hörer. Den som will hafwa flere, kan sjelf formera sig så många och sådana han behagar.[66]

Övande behövs, menade Andersson alltså, men han överlät åt läsaren att avgöra hur och i vilken omfattning det skulle övas. Andersson uttrycker för övrigt på flera ställen i sin räknelära ett motstånd mot trenden att placera in fler uppgifter i räkneböckerna.[67]

Med utgångspunkt från mina övergripande syften finns anledning att i någon mån vidga perspektivet på räknelärornas möjliga användningsområden. Den franske historikern Luce Giard skriver att boktryckarkonsten mot slutet av 1500-talet hade gett upphov till nya litterära genrer, bland annat en typ av böcker vilka, snarare än att göra anspråk på att säga något nytt, utgjorde en sorts samlingar av vetande. En ny sorts författare, som ägnade sig åt ”sifting, quoting, compiling and combining the writings of others for the benefit of their readers”, tog i och med detta plats på scenen. I deras böcker, fortsätter Giard, samlades all möjlig sorts vetande, gärna i kombination med ord lånade från latinet och grekiskan för att få det hela att framstå som lärt och märkvärdigt.[68] Deras funktion var dubbel: dels att visa upp författarens lärdom, dels att ge läsaren möjlighet att visa upp något motsvarande.

I viss mån träffar denna karaktäristik de svenska räknelärorna, särskilt vad gäller deras obligatoriska och ofta omfattande uppräkning av tillämpningar av *Regula de Tri*. Denna uppräkning framstår som en *samling av recept*, utan inbördes ordning (de är till exempel inte ordnade efter växande teknisk svårighet). I *Science and the Secrets of Nature* ger historikern William Eamon ytterligare en infallsvinkel till den litteratur Giard beskriver. Eamon tar fasta på att författarna till dessa böcker ofta ville göra gällande att de blottlade olika typer av hemligheter: om matlagning, hantverk, medicin, alkemi, och så vidare. Det rörde sig här om ”handböcker” med vars hjälp – påstod författarna – vem som helst kunde få tillgång till sådant praktiskt kunnande som tidigare varit förbehållet specialister. Eamon skriver att 1500-talet ”saw the publication of compendiums of almost every specialized field of knowledge”.[69] Produktionen av böcker inom genren *books of secrets*, som

[66] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 123.
[67] Se även sidorna 11, 22, 26, 19, 31, m.fl.
[68] Luce Giard, ”Remapping knowledge, reshaping institutions” i Stephen Pumfrey, Maurice Slawinski & Paolo Rossi (eds.), *Science, culture and popular belief in renaissance Europe*, Manchester, 1991, s. 26–27.
[69] William Eamon, *Science and the secrets of nature: books of secrets in medieval and early modern culture*, Princeton, 1994, s. 273.

Eamon kallar den, ”was eagerly exploited by a host of surgeons, empirics, and self-styled 'experimenters', who toward the century's end began producing dozens of little booklets of secrets for ordinary people”.[70] Dessa böcker var författade för en då kraftigt växande grupp människor som var allt annat än förmögna men inte desto mindre läskunniga. Böckerna var en sorts skräplitteratur, spelande på folks förhoppningar. Flera av dessa böcker blev mycket populära. Eamon skriver:

> Many of the sixteenth-century books of secrets continued to be published down through the eighteenth century: the last edition of Alessio's Secreti was published in 1780. [...] During the Enlightenment, however, the descendants of the professors of secrets were increasingly marginalized as the professional scientific community shored up its borders against charlatans, 'crackpots', and intruders.[71]

Vad Eamon skriver pekar mot att räknelärorna, vilka även de kom att kritiseras under upplysningen, har något viktigt gemensamt med dessa *books of secrets*. Inte minst gäller detta Agrelius *Institutiones Arithmetica*.[72]

Något som utöver ovanstående indikationer väcker frågan om räknelärornas användning är deras konstans över tid. Till skillnad från 1400- och 1500-talets böcker om till exempel läkekonst, bevarades räkneläran som genre relativt opåverkad av teknik och vetenskap under såväl 1600-talet som 1700-talet. Klart är att samhället förändrades radikalt mellan 1400-talet och 1700-talet och sedan än mer under 1800-talet. Det verkar otroligt att samma typ av frågor behövde besvaras i det borgerliga livet under denna långa tidsrymd. Att nya typer av räkneböcker, vilka frångick räknelärornas mönster, började publiceras under 1700-talet, talar även det för att samhällslivet då hade förändrats på ett sätt som fick räknelärornas framställningar att i mångas ögon framstå som ett arv från det förgångna.[73]

I det följande skall vi se att de läroböcker i räkning som tog form under 1800-talet i stor utsträckning lånade både sin form och sitt innehåll från räknelärorna. Räknelärorna utgör därmed en av skolmatematikens viktigaste utgångspunkter. Mot bakgrund av det ovanstående måste vi dra slutsatsen att den därmed inte utgick från hur man vid någon viss tidpunkt *i praktiken*

---

[70] Ibid, s. 234. Böckerna var en del av ett under denna tid vaknande intresse för det praktisk livets kunnande, ett intresse som inom idéhistorien framförallt förknippas med Francis Bacon.
[71] Ibid, s. 357.
[72] Frans Hultman skriver träffande nog i sin ”Svenska aritmetikens historia” från 1870-talet att Agrelius i sin räknelära framstår som ”ett märkvärdigt underdjur i afseende på lärdom” (*Tidskrift för matematik och fysik*, 1871, s. 224).
[73] Här är det dock viktigt att skilja mellan den kritik som riktades mot räknelärorna med utgångspunkt från den nya matematiska vetenskapen, och kritik som utgick från det praktiska räknandet. Som exempel på den senare sortens kritik kan tas den i Johan Bergmarck, *Svensk räkne-bok, eller et sådant räknesätt, hvarigenom alla...hushåldnings-mål kunna...vederbörligen utredas*, Stockholm, 1755. Den vetenskapliga matematikens kritik mot räknelärorna diskuteras i nästa kapitel.

räknade, utan från en litterär genre vars relation både till räknekonstens tradering och till dess praktik var allt annat än enkel.

Praktiken är räknekonstens måttstock

Relativt klart är att räknelärorna var skrivna för att läsas, i motsats till att användas som utgångspunkt för undervisning. Vad gäller räknelärornas läsare, så som de implicit framträder i räknelärornas text, var de kort sagt kompetenta vuxna som i stor utsträckning kunde reda sig i livet redan innan de läste räkneläran i fråga. Signifikativt för den relation mellan författare och läsare som räknelärorna konstituerar är att Roloff Andersson explicit ursäktar sig för att han på en punkt valt en till synes ologisk ordning på stoffet han presenterar. Han tar sig tid att motivera varför han gjort som han gjort och hoppas på förståelse. Det är därmed tydligt att han riktar sig till vad som i huvudsak är en jämlike. Läsaren framstår som en person vilken uppenbarligen ännu inte behärskar räknekonsten, men som inte desto mindre skulle kunna behärska den, genom mer eller mindre träget arbete.

Räknekonsten syftar inte till att komplettera, eller på något radikalt sätt förändra sin läsare. Detta påpekande är motiverat dels med tanke på senare ambitioner inom skolmatematiken, dels med tanke på det mål som undervisning i vetenskaplig matematik skulle leda till, något jag skall diskutera i nästa kapitel. Studier i matematik kom nämligen, från och med 1600-talet, att tillmätas en rad betydelser som sträckte sig långt utöver det praktiska räknandet, till exempel att bibringa adepten en förmåga att tänka logiskt och en förmåga att se verkligheten ”som den är”.

Räknelärorna sökte istället ett sorts erkännande hos sina läsare. Läsaren betraktades givetvis inte som fullärd, men det räknelärorna försöker förmedla är, kan man säga, externt i förhållande till läsaren som subjekt. Man kan här tala om att i en oproblematisk mening ”lära sig något”, snarare än att – som det senare blir fråga om – låta sig transformeras genom övning.

Räknelärorna var inte skrivna för *barn*. Detta var dock tydligen inte självklart för dem som använde räknelärorna i undervisningssammanhang. Angående ett enligt honom effektivt sätt att öva division skriver Andersson:

> Att bruka detta sättet med ett ungt barn, som först börjar dividera, är ej rådligt. Det är wäl, om det kan begripa divisionen efter det sätt, som förut lärdt är. Men den som will blifwa en snäll Practik-Räknare, måste häruti öfwa sig ganska wäl [...][74]

Stycket är typiskt för den inställning till läsaren som genomsyrar Anderssons *Arithmetica Tironica*, nämligen respekt kombinerat med uppriktighet rörande vad som krävs (övning, memorering) för att man skall lära sig att bemästra räknekonsten.

[74] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 86.

Ett sätt att fånga skillnaden mellan räknekonsten och skolmatematiken är att ta fasta på det mål som eftersträvas. Som jag beskrivit i min teori förhåller sig skolmatematiken till två olika typer av mål, vilka befinner sig på olika nivåer: på ett diskursivt, imaginärt plan, eftersträvas kunskaper i termer av matematiska begrepp. På en *symbolisk-mekanisk* nivå kretsar skolmatematiken istället kring prestationsmätningar. Som bland andra Lave, Walkerdine och Dowling påvisat, gör detta skolmatematiken i stor utsträckning självrefererande, det vill säga: den strävar mot ett mål som den själv konstituerar och som står under dess egen kontroll. Samtidigt uppfattar den givetvis inte sig själv på detta sätt. Istället ser den matematiken som sin måttstock då den jämför sig med det jag kallar matematikens insida.

I fråga om räknekonsten går det inte att skilja mellan dessa två nivåer. Det som eftersträvas är en förmåga att prestera, men det är inte räknekonsten som definierar vad som utgör en god prestation. Det finns därför inget utrymme för de kunskaper som utgör skolmatematikens förbindelselänk mellan skolan och världen utanför skolan. Räknelärorna förhåller sig istället direkt till den praktik som skall hanteras. För räknekonsten existerar helt enkelt inte något sådant som *mätning* av förmåga. Tvärtom förutsätts att det svar som produceras genast tas upp i en social praktik vilken utgör svarets måttstock. Därför är det inom räknekonsten oväsentligt både hur man får fram sitt svar och på vilket sätt man lärt sig tekniken för att få fram det. Det viktiga är att svaret är rätt, att man kan vara säker på att det är rätt, och att det kan produceras inom en rimlig tid. Om man trots detta vill tala om kunskaper, måste man konstatera att dessa i fråga om räknekonsten utgör något tämligen privat, vilket i sin tur kan knytas till den respekt jag nämnde ovan, för den som är i färd med att lära sig.

Låt mig mot bakgrund av denna jämförelse framkasta en hypotes, inspirerad av den franske filosofen Jacques Rancière: räknekonsten, med sina mekaniska algoritmer och minneskunskaper har inte konstituerats som orsaken till skolmatematikens misslyckande på grund av sin egen bristfällighet, utan för att den utgjorde (och fortfarande utgör) ett hot mot de sociala funktioner som skolmatematiken sattes att fylla. Om den, som jag försökt troliggöra ovan, faktiskt *fungerar* – det vill säga att det går att lära sig räkna i vuxen ålder, genom att läsa, tänka, memorera och öva efter eget huvud – utgör den ett hot mot behovet av lärare, behovet av undervisning, behovet av tid, behovet av en riktig metod och inte minst behovet av en teori om eleven och dess kunskaper.[75] Räknekonsten, med sitt myller av tabeller, regler, fall och genvägar, kan ses som stor genväg, vid sidan om den universella matematiken, från en okontrollerbar uppsättning utgångspunkter, till en lika okontrollerbar uppsättning slutstationer.

[75] Jmf. Jacques Rancière, *The ignorant schoolmaster: five lessons in intellectual emancipation*, Stanford, Calif., 1991.

Skolmatematikens kännetecken är att den fyller en rad sociala funktioner som inte har någonting med varken räknekonst eller vetenskaplig matematik att göra och för att kunna fylla dessa funktioner måste den göra elevernas rörelse endimensionell, till en rörelse längst endast *en väg*. Bara på så sätt kan den tid det tar att nå målet ställas under systematisk kontroll; bara på så sätt kan man jämföra hur långt olika eleverna har kommit och mäta deras avstånd från varandra. Den följande historiska redogörelsen handlar i stor utsträckning om skapandet av denna väg. Jag skall börja med att beskriva det möte mellan räknekonsten och den vetenskapliga matematiken som i Sverige ägde rum under 1700-talet.

6. Matematiken

Det universella, allmänna och tidlösa hade ingen plats i räknelärorna.[1] Just dessa egenskaper kom emellertid, från och med slutet av 1500-talet att förknippas med det som då var på väg att bli den matematiska vetenskapen. Denna vetenskapliga matematik kan ses som ett andra ursprung till skolmatematiken. Den hade sin källa i antikens Grekland, men kom till Sverige som en nyhet i början av 1700-talet. Denna import resulterade i ett möte mellan räknekonst och matematik vilket utgör huvudtemat för detta kapitel.

Först skall jag emellertid berätta om hur matematiken under detta skede vävdes samman med en rad religiösa och filosofiska tankesystem. Syftet med detta inledande avsnitt är att ge historiskt stöd framför allt åt den del av min teori om skolans matematik som säger att det ”inte finns något bakom” den växlande uppsättning egenskaper som tillskrivs matematiken i den skolmatematiska diskursen (se ovan s. 14). Avsnittet är nästan uteslutande baserat på sekundärlitteratur och kretsar kring vad matematiker och naturfilosofer – de flesta verksamma utanför Sverige – skrivit om matematiken. Att jag valt att ha med det i avhandlingen beror framför allt på att den litteratur jag här utgår från spelat en viktig roll för att forma min egen förståelse av matematiken, och mer exakt för att lösa upp bilden av matematiken som något som finns ”där ute”, bortom det som sägs om den. I det skede jag redogör för syns nämligen hur matematiken *får* mening och värde genom att knytas till en disparat uppsättning tankesystem vars relation till den matematiska vetenskapen är tämligen indirekt. Man ser att dessa system fyller en politisk funktion, för att legitimera en rådande ordning eller i en kamp för att förändra. Man ser också hur de förändras över tid, parallellt med samhället de är en del av. Därmed tydliggörs, menar jag, en väsensskillnad mellan å ena sidan matematiken i egenskap av instrumentellt användbara tekniker och resultat vars innebörd bara ett litet fåtal insatta kan förstå, och å andra sidan det matematiken får *representera* inom religion och filosofi, det vill säga matematiken i egenskap av något icke-matematiker tror på och hänvisar till.

Merparten av kapitlet utgörs sedan av en beskrivning av det möte mellan den vetenskapliga matematiken och räknekonsten som i Sverige ägde rum under 1700-talet. Som vi såg i förra kapitlet kontrasterar de värderingar och

[1] Toulmin, *Kosmopolis: hur det humanistiska arvet förfuskades.*

det tänkesätt som genomsyrar räknelärorna ganska skarpt mot den vetenskapliga matematiken, åtminstone så som vi förstår den idag. Likväl gjordes under 1700-talet flera försök att anpassa dem till varandra. Resultatet blev en sorts hybrider vilka lånade drag både från räknekonsten och från matematiken. Dessa utgjorde ett viktigt led i rörelsen mot 1800-talets skolmatematiska läroböcker, och jag kommer därför att beskriva dem relativt ingående.

Kapitlet avslutas med några reflektioner kring relationen mellan matematiken och tänkandet. Här knyter jag an till avslutningen i det föregående kapitlet om räknekonsten, med syfte att tydliggöra skillnaden mellan räknekonsten och matematiken. För om räknekonsten hade fokus på praktiskt räknande och lät detta räknande värderas utifrån sin instrumentella effektivitet, fokuserade 1700-talets vetenskapliga matematik tvärtom det abstrakta och rationella tänkandet, vilket värderades med utgångspunkt från matematiken själv.

Den matematiska diskursen

Mellan sekelskiftet 1600 och sekelskiftet 1700 tog matematiken plats som en central del av tankesystem förknippade med naturen, samhället, Gud och människan. Från att kring mitten av 1500-talet i första hand ha betraktats som en samling praktiskt användbara tekniker,[2] kom matematiken under 1600-talets lopp att allt mer allmänt betraktas som en vetenskap med stort värde.

Vid början av 1500-talet dominerades vetenskapen av den aristoteliska naturfilosofin och enligt Aristoteles skall vetenskapen förklara naturen genom att klarlägga vad saker *är* och vad som är deras essentiella ”orsaker”.[3] Geometrin och den uppsättning beräkningstekniker vilka betraktades som matematik på 1500-talet ansågs inte kunna ge denna typ av kunskap, så även om matematiken betraktades som en vetenskap, värderades den inte lika högt som filosofin.[4] Den aristoteliska naturfilosofin brottades emellertid med problem. Den syftade till att nå fram till säker kunskap, men många hade vid

[2] Vars olika grenar hade olika status, se Biagioli, ”The social status of italian mathematicians, 1450–1600”.

[3] Stephen Gaukroger, *Explanatory structures: a study of concepts of explanation in early physics and philosophy*, Brighton, 1978, s. 83.

[4] Relationen mellan matematik och filsofi var tämligen komplex, och framställningen här är en förenkling. För en grundlig redogörelse se Peter Dear, ”Jesuit mathematical science and the reconstitution of experience in the early secenteenth century”, *Studies in History and Philosophy of Science*, vol. 18, nr 2, 1987; Peter Dear, *Mersenne and the learning of the schools*, Ithaca, N.Y., 1988; Peter Dear, ”From truth do disinterestedness in the seventeenth century”, *Social Studies of Science*, vol. 22, nr 4, 1992; Peter Dear, *Discipline & experience: the mathematical way in the scientific revolution*, Chicago, 1995; Gaukroger, *Explanatory structures.*

denna tid, delvis på grund av det tumult som orsakades av reformationen, börjat tvivla på att sådan kunskap över huvud taget var möjlig.[5] Av åtminstone två skäl kom matematiken i detta sammanhang att framstå i mer positiv dager än tidigare: *För det första* argumenterade tidens matematiker för att matematiken kunde erbjuda just den typ av säkra sanningar som filosoferna inte kunde nå fram till. Det gick inte, menade man till exempel, att tvivla på att vinkelsumman i en triangel motsvarade två räta vinklar. Detta faktum ansågs ha avgörande betydelse i förhållande till tidens brännande frågor angående religion och Guds existens. Man menade att matematikens sanningar så att säga tvingade förnuftet till tro – för när man väl förstod ett matematiskt bevis var det omöjligt att tvivla. Denna matematiska tro, vilken band förnuftet genom den "uppenbarelse" det innebär att plötsligt förstå ett matematiskt bevis, relaterades till det religiösa tvivlets problem. Man menade att arbete med matematik, genom vilken man fick *vana att tro*, skulle göra det lättare att tro – även på Gud.[6]

För det andra menade man att matematiken möjliggjorde en sorts medelväg, mellan den totala skepticismens handlingsförlamning och de höga sanningsanspråk filosofin uppenbarligen inte klarade av att leva upp till. Med matematikens hjälp kunde man nämligen på ett systematiskt sätt helt enkelt beskriva naturen – snarare än att försöka förklara den i termer av "orsaker". Vi tar idag för givet att matematik kan användas för att beskriva naturen, men då var detta en nymodighet. Man kallade kombinationen av matematik och naturfilosofi för "fysiko-matematik". Denna kom att utgöra det första steget mot dagens matematiserade naturvetenskaper.[7]

Vad man bör notera är att inget av dessa två argument för matematikens värde knyter an till möjligheten att – på räknekonstens vis – besvara frågor som uppstår i det praktiska livet. Argumenten handlar om matematiken som en möjlig väg till säker kunskap och matematiken som redskap för att beskriva naturen.

Utan att gå in på detaljer kan man säga att matematiker inom Jesuitorden vid denna tid drev en sorts kampanj med syfte att stärka matematikens ställning.[8] Förutom de två ovanstående argumenten för matematik, talade de även om matematikens praktiska nytta. Det historiska avståndet till trots kan man se flera likheter mellan denna kampanj och hur skolmatematikens företrädare talar om matematiken idag. Jag skall illustrera detta med två citat.

---

[5] Richard Henry Popkin, *The history of scepticism: from Savonarola to Bayle*, Oxford, 2003, s. 3.

[6] Kanske överbetonar jag den betydelse som tillskrevs vanan. Mitt resonemang är här framför allt baserat på Joan L. Richards, "God, truth, and mathematics in nineteenth century England" i M. J. Nye, J. Richards & R Stuewer (eds.), *The invention of physical Science: intersections of mathematics, theology and natural philosophy since the seventeenth century*, Dodrecht, 1992.

[7] Dear, *Discipline & experience*, s. 168. Intressant är att de två argumentationslinjerna flöt samman i det att man menade att säker kunskap faktiskt var möjlig rörande den matematiserade beskrivningen av verkligheten, eftersom den var en mänsklig konstruktion.

[8] Dear, *Mersenne and the learning of the schools*, s. 43–45.

Det första är hämtat från en text publicerad 1534, författad av matematikern Joan Lluís Vives och lyder:

> For geometry are developed optics or perspective, and architecture, and the art of measurement, all of which have great usefulness in ordinary life for protecting our bodies; for from geometry we proceed to all measurement, proportion, movement and position of heavy weights, whether regarded as moveable or fixed at the moment, or as immoveable. Then follows the study of how to measure fields, mountains, towers and buildings. How great comfort does architecture bring us in our dwellings! How greatly perspective assists in the observation of pictures![9]

Mitt andra exempel är hämtat från en text av Christopher Clavius som jag nämnde i förra kapitlet. Ungefär 50 år efter Vives skriver han:

> Mathematics teaches poets about the rising and setting of the stars; teaches historians the situation and distances of various places; teaches logicians [and?] analytici examples of solid demonstrations; teaches politicians truly admirable methods for conducting affairs at home and during war; teaches physicists the manners and diversity of celestial movements; of light, of colors, of diaphanous bodies, of sounds; teaches metaphysicians the number of the spheres and intelligences; teaches theologians the principal parts of the divine creation; teaches jurists and canonists calendrical computation, not to speak of the services rendered by the work of mathematicians to the state, to medicine, to navigation, and to agriculture. An effort must therefore be made so that mathematics will flourish in our colleges as well as the other disciplines.[10]

I andra sammanhang skrev Clavius att studenter ”needed to be persuaded 'of the utility and necessity of these mathematical disciplines' and should be shown that 'philosophy and the mathematical sciences are joined, as indeed they are'; the [philosophers], meanwhile, must be prevented from criticizing mathematics as of being of no value”.[11] Om studenterna inte av sig själva insåg matematikens nödvändighet borde de, menade Clavius, övertalas. Och filosoferna borde hindras – oklart hur – från att smutskasta matematiken, något de tydligen inte drog sig för att göra.

Här framgår, menar jag, en skillnad mellan å ena sidan matematiken i egenskap av räknekonst, och å den andra matematiken som något att tala om och tro på. Det står klart att hänvisningar till matematik, för Vives och

---

[9] Joan Lluís Vives (1534), *De tradendis disciplinis*, bok 4, kapitel 5, citerad i Ibid, s. 43–44. Joan Lluís Vives (1492–1540) var en valensisk humanist och matematiker.

[10] Christopher Clavius (1586), *Ratio studiorum et institutiones scholasticae Societatis Iesu per Germaniam olim vigentes collectae* citerad i Ibid, s. 45. Christopher Clavius (1538–1612) var en tysk astronom och matematiker.

[11] Ibid.

Clavius, utgjorde en del av en social strategi. De kämpade för att matematiken skulle få en stärkt ställning, på grund av att även deras egen sociala ställning därmed skulle stärkas. Därför sade de att matematik utgjorde en förutsättning för sådant som: *optik*, *perspektiv*, *arkitektur*, *byggnadskonst*, *krigföring*, *astronomi*, *antalet "sfärer och intelligenser"*, *den gudomliga skapelsen*, *juridik*, *"kalendariska beräkningar"*, *medicin*, *navigering* och *jordbruk*. Min tes är att denna sociala dimension, det vill säga den funktion som själva hänvisningen till matematik fyller – vilken normalt uppfattas som helt extern i förhållande till själva matematiken – tvärtom är intimt sammanvävd med det vi uppfattar som matematikens essens. Klart är att vetenskaplig matematik är något annat än räknekonst och att denna skillnad började framträda tydligt från och med slutet av 1500-talet. Skillnaden består i att matematiken uppfattas som en självständig existens, bortom tecken och symboler vilka tycks blott representera matematiken, medan räknekonsten tvärtom är "profan" och inget mer än tabeller och regler. Det i matematiken som tycks ligga bortom, utgör, menar jag, ett sorts objektivt korrelat till den plats matematiken har i retorik som Vives och Clavius. Enkelt uttryckt talar de om matematiken på ett sätt som antyder att den är väldigt speciell och bidrar därmed till att *göra* den speciell.[12]

När vi läser ordet "matematik" i citatet från Clavius ovan, är vi, menar jag, allt för snabba med att tro oss förstå vad han syftar på. I ett första steg måste vi påminna oss om att det är stor skillnad mellan det sena 1500-talets matematiska vetenskap och den matematik vi har idag. I ett andra steg bör vi dessutom inse att denna frånvaro av vetande – som för de flesta är uppenbar då det gäller 1500-talet – faktiskt även gäller vår egen tids matematiska vetenskap. Det är inte bara så att vi anakronistiskt läser in vår tids matematik i Clavius text – *vi vet inte ens vad det är vi då läser in!* Slutsatsen måste därför bli att det som gör att matematiken känns så välbekant i jämförelse med allt det andra som Vives och Clavius talar om, inte har någonting att göra med att den matematiska vetenskapen har någon sorts oföränderlig kärna eller liknande, vilket skulle göra det Clavius talade om och det vi talar om idag till "samma sak". Det konstanta ligger tvärtom på hänvisningens nivå, i själva ordet "matematik" och den plats det intar i texterna. Det är där vi känner igen oss.

Matematiken och naturen

Inledningsvis var de matematiker som argumenterade för matematikens värde inte särskilt angelägna om att förena sin matematiska vetenskap med naturfilosofin. Naturfilosofin drogs med sina problem och det var därför bara en fördel för matematikerna att framställa sig som något annat, självständigt.[13]

---

[12] Se ovan s. 67ff och nedan s. 358ff.

[13] Dear, "Jesuit mathematical science", s. 165–166.

Citaten ovan utgör exempel på detta sätt att framställa matematiken som nyttig – utan ontologiska anspråk. Under 1600-talets lopp om emellertid matematiken att närma sig naturfilosofin, samtidigt som synen på båda förändrades på ett genomgripande sätt. Jag skall nu berätta lite om denna process.

Under 1500-talets lopp blev det allt vanligare att förstå naturen som en maskin eller mer specifikt som ett urverk. Historikerna talar om att en mekanisk världsuppfattning vid denna tid bredde ut sig. Detta fick bland annat omvälvande konsekvenser för synen på relationen mellan naturen och Gud. Snarare än sekularisering innebar det mekaniska synsättet att gränsen mellan det heliga och det profana suddades ut, och att naturfilosofi och teologi flöt samman. Historikern Amos Funkenstein skriver att: ”Never before or after were science, philosophy and theology seen as almost one and the same occupation”.[14] I och med detta kom även synen på matematiken att förändras, för det var just i denna sammansmältande rörelse, som vetenskapen om naturen blev matematisk.

Åsikterna om vilken roll matematiken borde spela som delar av den mekanistiska världsbilden gick isär under 1600-talet. Jag skall här förenklat dra en gräns för detta historiska skede vid publikationen av Newtons *Principia* 1687, som sedan kom att dominera scenen.[15] Innan dess kan man översiktligt skilja mellan två riktningar inom naturfilosofin representerade av René Descartes i Frankrike och Robert Boyle i England.[16] Givet denna indelning får vi tre olika sätt att förhålla sig till matematiken: Descartes', Boyles och Newtons. Jag skall här beskriva dem var och för sig. Newton, som behandlas sist, kommer emellertid att få lite större utrymme än sina två föregångare, under rubriken ”Matematiken och Gud”.

Descartes' matematik

Descartes satte stor tilltro till matematiken som redskap för att förklara vad som händer i naturen.[17] Hans matematiska förklaringar var kvalitativa och uttryckta i text läsbar även utan djupare kunskaper inom matematik. Han menade att naturen uteslutande bestod av ”korpuskler” – små (icke observerbara) partiklar vars egenskaper bestämdes deras ”storlek, form, uppbyggnad

[14] Funkenstein, *Theology and the scientific imagination*, s. 3. Även Steven Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, Stockholm, 2000, s. 51.

[15] Denna indelning ligger i linje med den distinktion Kuhns gör – mellan ”klassiska” och ”baconianska” vetenskapliga traditioner – i ”Mathematical vesus experimental traditions in the development of physical science”, återgiven i Thomas S. Kuhn (ed.), *The essential tension*, Chicago och London, 1977, s. 58.

[16] René Descartes (1596–1650) är i matematiska sammanhang bland annat är känd för det cartesiska koordinatsystemet. Robert Boyle (1627–1691) var naturfilosof i England och är idag kanske mest känd för Boyles lag som säger att volymen hos en gas är omvänt proportionell mot trycket. Isaac Newton levde mellan 1643 och 1727.

[17] Se Dear, *Discipline & experience*, s. 212.

och rörelse".[18] Dessa partiklar, vars inbördes relationer han ansåg var helt mekaniska, använde Descartes för att förklara naturens observerbara egenskaper. Väsentligt här är att Descartes varken ägnade sig åt att konstruera matematiska modeller för att, till exempel, göra prediktioner, eller värdesatte de matematiska teknikernas instrumentella användbarhet. Det viktiga för honom var att *förstå*, och man kan säga att han i detta syfte använde matematiken, i kombination med sina korpuskler, som en förklaringsmodell.

Ett tydligt exempel på hur Descartes använde matematiken i sina förklaringar är följande citat hämtat från en text där Descartes beskriver sin teori om blodomloppet. Efter att i helt kvalitativa termer ha beskrivit hur blod transporteras från venerna till artärerna, hur det värms och kyls, etcetera skriver han:

> För att för övrigt de som inte känner till den matematiska bevisföringens styrka och är ovana vid att skilja de sanna grunderna från de sannolika inte skall utan prövning ge sig till att förneka det som här blivit sagt, vill jag göra dem uppmärksamma på att den rörelse som jag just förklarat följer av organens blotta anordning som man kan se i hjärtat med blotta ögat, vidare av den värme som man kan känna med fingrarna, och av blodets natur som man kan få kunskap om genom erfarenhet, lika nödvändigt som en klockas rörelse följer av kraften, läget och former hos dess lod och hjul.[19]

Matematiken används här som en retorisk resurs i ett sammanhang som vi idag knappast skulle förknippa med matematik. Descartes talar om *kraften* i matematiska bevis. Denna kraft åberopar han i argumentationen för sin teori om blodomloppet. De som känner till matematikens kraft och därför kan skilja sanna orsaker från blott troliga kommer, menar han, inte att ha några svårigheter att se att hans teori är riktig.

Descartes insisterande på att naturen måste förklaras med hjälp av korpuskler och matematik låter sig lätt tolkas i termer av mitt teoretiska ramverk. Den mekanistiska naturfilosofin tog plats som en ersättning av en naturfilosofi huvudsakligen inspirerad av Aristoteles. Aristoteles menade att naturen väsentligen *är* så som den ter sig för en människa med sunt förnuft under gynnsamma förutsättningar (inte mörkt, inte dimma, etcetera).[20] Mot detta ställde Descartes en natur som bara kan förstås av den som behärskar matematiken och som förstår hans korpuskulära teori. Vad han gör kan med Dowling beskrivas som en rekontextualisering av naturen i termer av den korpuskulära teorin. Istället för att säga att opium får oss att somna för att

[18] Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, s. 58.
[19] René Descartes, *Valda skrifter*, Stockholm, 1953, s. 60. Angående Descartes vetenskapliga metod se John A. Schuster, "Cartesian method as mythic speech: a diachronic and structural analysis" i John A. Schuster & Richard R. Yeo (eds.), *The politis and rhetoric of scientific method*, Dodrecht, 1986.
[20] Gaukroger, *Explanatory structures*, kapitel 4.

den har en sömngivande förmåga, sa han att opium har en korpuskulär mikrostruktur som påverkar vår fysiologiska struktur på ett sådant sätt att vi somnar. Han introducerade ett nytt sätt att tala och menade att detta beskrev hur verkligheten *är*.[21] Han introducerade en ny *bild* av verkligheten, knuten till den framväxande vetenskapen i egenskap av social institution.[22] Vad vi ser här är, menar jag, hur matematiken, i egenskap av ideologisk fantasi *knuten till vetenskapen*, med ett antal hundra år föregår dess funktion i förhållande till skolan. Den självklarhet varmed matematiken idag framträder som central (inom vetenskap, teknik, etcetera) måste, menar jag, ses som intimt förbunden med den centrala plats bland andra Descartes gav matematiken i sin naturfilosofi.

Boyles matematik

Robert Boyle representerade i motsats till Descartes en ambition i linje med Francis Bacons, att undvika spekulationer kring *varför* och istället utvidga kunskapen om naturen genom insamling och dokumentation av *fakta*.[23] För att förstå de uttryck denna ambition tog sig hos Boyle krävs en liten bakgrund rörande tidens föreställningar rörande å ena sidan vetenskaplig kunskap och å andra sidan (vardaglig) tro.

En avgörande aspekt av den förändring av synen på vetenskap som ägde rum under 1600-talet handlade om vad som betraktades som en legitim grund för kunskap. Ian Hacking, och senare bland andra Peter Dear, har pekat på att kunskapen – vetenskapens objekt – under 1500-talet ansågs vara väsensskild från allt det som kunde observeras i den fysiska verkligheten.[24] Dessa observationer utgjorde föremål för diskussion, tyckande och åsikter.

---

[21] Angående rekontextualisering, se Dowling, *The sociology of mathematics education*, s. 136–137. Liknande idéer, om hur vetenskapen i stor utsträckning kan ses som övertygande sätt att tala om naturen, finns i Paul K. Feyerabend, "Classical empiricism" i Robert E. Butts & John W. Davis (eds.), *The methodological heritage of Newton*, Oxford, 1970 och i Schuster, "Cartesian method as mythic speech: a diachronic and structural analysis". Exemplet med opium har jag hämtat från Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, s. 65. Descartes är säkert en av de Kuhn syftar på när han säger att naturfilosofins utveckling under första halvan av 1600–talet snarare bestod i ett man såg på naturen på ett nytt sätt än att man lärde sig mer om den ("Mathematical vesus experimental traditions in the development of physical science", s. 46).

[22] Om Decartes egentligen inte tillför något nytt i sina förklaringar är en viktig fråga vad det var som gjorde dem så övertygande. Ett grundligt svar presenterar vetenskapshistorikern John A. Schuster i hans ovan nämnda artikel "Cartesian method as mythic speech: a diachronic and structural analysis". Schuster argumenterar för att anledningen till att Descartes syn på vetenskap – i synnerhet hans metod – fick så stor genomslag var att den erbjöd ett sätt för naturfilosoferna att tala om och förstå sin egen verksamhet som rationell.

[23] Angående Boyles relation till matematiken se Steven Shapin, "Robert Boyle and mathematics: reality, representation, and experimental practice", *Science in Context*, vol. 2, 1988 och Steven Shapin, *A social history of truth: civility and science in seventeenth-century England*, Chicago, 1994, s. 310–322.

[24] Ian Hacking, *The emergence of probability: a philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference*, London, 1975, s. 18–31. Relationen mellan erfarenhet och vetenskap utgör temat för Dears två böcker *Mersenne and the learning of the schools* och *Discipline & experience*.

Hur ”säkra” dessa observationer än tycktes vara, kunde de dock inte ta steget till att utgöra vetenskaplig kunskap. Enligt den aristoteliska synen på vetenskap, var nämligen vetenskaplig kunskap något man nådde fram till genom deduktion och genom att beskriva verkligheten med hjälp av rätt begrepp.[25] Åsikter, å andra sidan, kunde vara mer eller mindre troliga. Hacking skriver:

> The limit of increasing probability of opinion might be certain belief, but it is not knowledge: not because it lacks some missing ingredient, but because in general the objects of opinion are not the kinds of propositions that can be objects of knowledge.[26]

Den för oss kontraintuitiva konsekvensen av denna distinktion var att praktisk erfarenhet – en konkret upplevelse av att naturen uppfört sig på ett visst sätt vid en given tidpunkt – vid denna tidpunkt inte ansågs kunna bidra till vetenskaplig kunskap. Du kan ha sett något eller hört något – och med detta som utgångspunkt tro det ena eller andra; men andra människor hade kanske sett andra motsägande saker. Personliga erfarenheter av naturen ansågs därför höra till det blott troligas domän. Vetenskapen handlade delvis om naturen, men den erfarenhetsmässiga grunden för denna vetenskap var, i linje med Aristoteles, hur naturen uppförde sig ”för det mesta”, inte hur den betedde sig – eller än värre genom trixande kunde fås att bete sig – vid ett eller annat enstaka tillfälle. Man räknade tvärtom med att naturen ibland betedde sig märkligt. Detta kunde förklaras till exempel med hänvisning till någon typ av gudomligt ingripande – det ansågs inte sprida något ljus över hur naturen *är*.[27]

Peter Dear har i en rad böcker och artiklar beskrivit hur detta sätt att tänka om världen successivt förändrades under 1600-talet. Framför allt i England tog en ny naturfilosofi form i vilken tvärtom erfarenheter av naturen och mer specifikt *experiment* gjordes till den vetenskapliga kunskapens grundval.[28] Detta fick avgörande konsekvenser för synen på matematikens plats i förhållande till vetenskaplig kunskap om naturen.

Denna bakgrund är nödvändigt för att förstå varför Boyles ståndpunkt faktiskt var att man, om möjligt, borde undvika matematik i vetenskapliga sammanhang. Han tillhörde dem som i skarp kontrast mot den aristoteliska vetenskapsteorin ansåg att vetenskaplig kunskap borde betraktas som ständigt provisorisk och att den borde vara förankrad i experiment. Men fortfarande influerad av den aristoteliska vetenskapsfilosofin såg han det som mycket

---

[25] Hacking hänvisar här till Thomas Aquinas (*The emergence of probability*, s. 20).
[26] Ibid, s. 22.
[27] Dear, ”Jesuit mathematical science”, s. 145.
[28] Se Shapin, ”Robert Boyle and Mathematics”; Shapin, *A social history of truth* och Steven Shapin & Simon Schaffer, *Leviathan and the air-pump: Hobbes, Boyle, and the experimental life: including a translation of Thomas Hobbes, Dialogus physicus de natura aeris by Simon Schaffer*, Princeton, N.J., 1985.

viktigt att så många som möjligt kunde utföra och förstå dessa experiment. I detta perspektiv framstod den matematiska formalismen som problematisk eftersom den var svårbegriplig och därmed stängde ute en mängd människor från att ta del av naturvetenskapens resultat.[29] Detta problem togs på allvar inte minst eftersom många menade att den tidigare naturfilosofins ofta diagnostiserade sjukdom härrörde från dess överdrivet privata eller individualistiska karaktär.[30] Vetenskapen borde, menade Boyle, vara ett civiliserat samtal om naturen fokuserat på observationer och experiment.

Boyle såg som sin huvudsakliga uppgift att bekämpa dogmatism. Av denna anledning betonade han alltid vikten av försiktighet, att undvika spekulation och överdrivna anspråk. Boyle menade att matematik i och för sig kunde vara ett användbart redskap i vissa sammanhang, men att man måste akta sig för att förväxla matematikens idealiseringar med hur verkligheten faktiskt *är*.

Jag vill här lyfta fram Boyle som ett alternativ till den idé, vilken senare kom att bli dominerande, som säger att verkligheten till sin essens har en matematisk struktur. Det väsentliga är här att matematiken hos Boyle inte fungerade som en *representant* på samma sätt som den tidigare hade gjort för matematikerna Vives och Clavius, och som den senare skulle göra för Newton och än senare inom den skolmatematiska diskussionen. I linje med den analys av Boyles naturfilosofi som Steven Shapin gör i *A social history of truth* vill jag här knyta an till mina teoretiska resonemang rörande matematiska kunskaper som *fetisch*, det vill säga som representant för sociala relationer.[31] Faktum är nämligen att Boyles idéer om vetenskapen som ett civiliserat samtal om naturen, var intimt sammanvävd med tidens skarpt segregerade Engelska samhälle. Det samtal Boyle talade om var därmed inte ett offentligt samtal, i bemärkelsen att det var öppet för *alla*. Tvärtom var det ett samtal inom en liten autonom grupp. Inom detta begränsade sammanhang restes och försvarades anspråk på sanning, ofta med explicit hänvisning till de talandes personliga egenskaper som "gentlemen". Här framträder alltså det sociala oförmedlat av det mellanled som matematiken (som jag skall visa) senare kom att utgöra. Boyle behövde inte matematiken (i egenskap av representant), eftersom han och hans kollegor kunde upprätthålla sin autonomi på andra sätt. Det finns kanske anledning att poängtera att det alternativ som Boyle representerar därmed inte skall förstås som i någon mening "bättre". Vad det tydliggör är hur matematikens plats är förbunden med ett sätt att organisera den sociala verkligheten.

Boyles ideal och den praktik genom vilken han och hans anhängare försökte realisera det kontrasterar skarpt mot Newtons sätt att förstå naturfilosofins metod. Newton hade inget till övers för Boyles anspråkslöshet rörande matematiken och den vetenskapliga kunskapens natur. Han menade

[29] Shapin, *A social history of truth*, s. 335–337; Shapin, "Robert Boyle and Mathematics".
[30] Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, s. 114.
[31] Se s. 75ff ovan.

tvärtom att verkligheten *är* en maskin som låter sig beskrivas med hjälp av matematik. Hur denna maskin fungerade beskrev han 1687 i sin *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*.

Matematiken och Gud

Newtons *Principia* kan å ena sidan sägas fullborda det förlopp som ägde rum under 1600-talet. Å andra sidan markerar detta verk inledningen på en ny era, som i vissa bemärkelser – jag tänker här framför allt på det intima bandet mellan matematik och religion, allra mest påtagligt i England, men tydligt även i Sverige – skulle sträcka sig ända fram till slutet av 1800-talet. Newton uttryckte förnöjsamhet över naturens outgrundlighet.[32] I motsats till Boyle och Descartes såg han inte naturen som något alla borde kunna förstå. Flera av hans samtida anklagade honom också för att *återinföra* ”ockulta principer” i naturfilosofin.[33]

I Newtons naturfilosofi är frågor rörande epistemologi, ontologi och religion sammanvävda. Jag skall här först ta upp frågor rörande epistemologi, sedan religion, och slutligen knyta Newtons idéer till mitt teoretiska ramverk i ett försök att förklara varför de fick så stort genomslag, trots att så få förstod vad de i en matematisk mening handlade om. *Principia* hade nämligen ingen större spridning. I sin helhet lästes den förmodligen av färre än hundra personer, och av dessa var det bara en handfull som hade förutsättningar att förstå innehållet.[34] Inte desto mindre kom denna bok, tillsammans med sin författare Newton, att bli föremål för vad som närmast kan beskrivas som en kult.[35] I linje med resonemangen jag förde i teoriavsnittet kommer jag att argumentera för att det faktum att den matematiska grunden för Newtons naturfilosofi låg bortom de flesta människors förståelsehorisont, inte alls utgjorde något hinder för dess spridning. Tvärtom kan man se Newton som ett paradigm för det förhållningssätt till matematiken vilket sedan dess blivit typiskt, nämligen att matematiken för det stora flertalet, just genom sin obegriplighet, blir ett föremål för (blind) tro.

Epistemologi

Newtons matematiska naturfilosofi förde med sig en förskjutning av vad det innebar att förklara ett naturfenomen. Descartes och hans anhängare ville att naturen skulle gå att förklara i sin helhet med hänvisning till mekanistiska principer. Detta synsätt innebar till exempel att Newtons gravitation inte utan vidare kunde accepteras. Även om man kunde konstatera att Newtons beskrivning till exempel av planeternas rörelser var riktig på en deskriptiv

[32] Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, s. 165.
[33] Ibid, s. 71.
[34] Ibid, s. 130.
[35] John Gascoigne, ”From Bentley to the victorians: the rise and fall of British newtonian natural theology”, *Science in Context*, vol. 2, nr 2, 1988, s. 221.

nivå, innebar inte detta att den därför också måste betraktas som ett stycke bra naturfilosofi. Enligt deras kriterier hade han nämligen inte *förklarat* varför de rör sig på detta sätt. Johann Bernoulli, en av tidens främste naturfilosofer, skrev:

> Some may be surprised that I am bold enough to introduce celestial whirlpools at a time when many philosophers, particularly the English, consider them pure chimeras and only mention them with contempt. The learned *Company*, to which I submit my thoughts, will judge whether it is right to condemn a system built upon clear and intelligible principles and replace it by one that rests upon principles of which we can form no idea. It seems to me that in physics this is a sufficient reason to reject such a system, even if it were so well devised that it accounted for all the phenomena.[36]

Här framgår väldigt tydligt skillnaden mellan Descartes klara och tydliga idéer, vilka enligt honom borde ligga till grund för vetenskapen, och Newtons ideal i vilket outgrundlighet hade en given plats. Frågan gällde vad som skulle räknas som meningsfull vetenskaplig kunskap. För Newton räckte en matematisk modell. Descartes ville att matematiken också skulle vara begriplig. Hans ideal var Euklides *Elementa* som jag skall säga mer om strax (s. 14). I dessa böcker kan man följa den exakta kunskapens konstruktion genom en följd av begripliga steg. Den nya matematik som Newton använde för att beskriva naturen framstod för cartesianerna istället snarast som en teknik, användbar för att lösa problem och beskriva, men något helt annat än en grund för kunskap. De såg naturfilosofins utveckling i Newtons händer som en teknikens triumf på förståelsens bekostnad.[37]

Den epistemologiska frågan hänger intimt samman med frågan om vad det är som skall förklaras, det vill säga vad verkligheten *är*. Många av dem som riktade kritik mot den matematiserade naturfilosofin menade till exempel att det var meningslöst att, som Newton och andra, försöka uppnå matematisk precision i beskrivningar av verkligheten.[38] Denna ståndpunkt illustreras av följande citat från en text av naturfilosofen Louis Castel, där han argumenterar för en åtskillnad mellan geometri och fysik:

---

[36] Johann Bernoulli (1742), ”Nouvelle pensées sur le système de M. Descartes,” i *Opera Omnia*, III, s. 133–134, citerad i William R. Shea, ”The unfinished revolution: Johann Bernoulli (1667–1748) and the debate between the cartesians and the newtonians” i William R. Shea (ed.), *Revolutions in science: their meaning and relevance*, Canton, MA, 1988, s. 75. Johann Bernoulli (1667–1748) är en av många matematiker i släkten Bernoulli. Han verkade huvudsakligen i Schweiz och var under en tid matematikern Leonhard Eulers (1707–1783) lärare.

[37] Michael S. Mahoney, ”Changing canons of mathematical and physical intelligibility in the later 17th century”, *Historia Mathematica*, vol. 11, 1984, s. 421. Se även John Pappas, ”L'Esprit de finesse contre l'esprit de géometrie: en débat entre Diderot et Alembert”, *Studies on Voltaire and the eighteenth century*, vol. 86, 1972 och Gringas, ”What did mathematics do to physics?”, s. 385.

[38] Gringas, ”What did mathematics do to physics?”, s. 389.

> Geometry is geometry only through the abstract simplicity of its object. Only that makes it certain and demonstrative. The object of physics is much vaster. That is what makes it difficult, uncertain and obscure. But this is essential to it: one is not a better physicist because one is the best of geometers.[39]

Liksom Robert Boyle tillhörde Castel dem som inte såg naturen som i sig matematisk. Tvärtom menade han att matematiken var ett språk med vars hjälp man i och för sig kunde beskriva en idealiserad värld, men att denna värld måste skiljas från den faktiskt existerande. I detta perspektiv betyder inte det faktum att en beskrivning är matematisk att den också är sann, utan tvärtom att den omöjligt kan vara sann, eftersom den handlar om något annat än verkligheten.[40] Newtons perspektiv var det motsatta, nämligen att beskrivningar av verkligheten måste ha en matematisk form för att kunna vara sanna, eftersom verkligheten till sin essens är matematisk.

Religion

Newtons matematiska principer utgjorde ingen fullständig förklaring av tingens ordning.[41] Men istället för att förstå denna teoriska lucka som en brist, såg man den som en öppning för religionen. ”One of the most distinctive features of British intellectual life in the eighteenth century, and in much of the nineteenth”, skriver historikern John Gascoigne, ”was the extent to which science was seen to be allied to the cause of religion”.[42] Newtons *Principia* utgjorde till stor del utgångspunkten för denna förening. Newtons ståndpunkt var nämligen att:

> This most elegant system of the sun, planets, and comets could not have arisen without the design and dominion of an intelligent and powerful being. [...] He rules all things, not as the world soul but as the lord of all.[43]

Newtons naturfilosofi gav stöd åt vad man kallar en voluntaristisk uppfattning om Gud, det vill säga en tro på att Gud kontinuerligt griper in i världens förlopp. I samma utsträckning som man blev övertygad om att Newtons matematiska beskrivningar var riktiga, var man mer eller mindre tvungen att också acceptera Guds ständiga ingripande som ett vetenskapligt

---

[39] Père Louis Castel (1743), *Vrai système de physique générale de M. Isaac Newton. A la portée du commun des physiciens*, s. 304, citerad i ibid s. 401. Bernard Louis Castel (1688–1757) var en fransk matermatiker, från 1703 medlem i jesuitorden.

[40] Shapin, ”Robert Boyle and Mathematics”.

[41] Newton kunde (bland annat) inte förklara den till synes perfekta balansen mellan gravitationskraften och planeternas banor (Gascoigne, ”From Bentley to the Victorians”, s. 222).

[42] Ibid, s. 219.

[43] Isaac Newton, *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*, Berkeley, Calif., 1999 [1687], s. 940.

faktum.[44] Detta passade kyrkans män ypperligt, och det togs i England för givet att naturfilosofins uppgift var att stödja kristendomen. I och med detta kom naturfilosofens roll att i stor utsträckning överlappa med prästens: prästerna hade monopol på legitim tolkning av Skriften, det vill säga den aspekt av Newtons system som matematiken inte gjorde reda för. Naturfilosoferna fick ett motsvarande monopol på att tolka naturen.[45]

Denna arbetsdelning fick betydande konsekvenser för hur man i England på 1800-talet talade om värdet av matematiska studier. Att förstå naturen – det vill säga att förstå dess matematiska essens – kom nämligen (bland mycket annat skall sägas) att betraktas som ett sätt att lära känna Gud. Historikern Joan L. Richards förklarar att idéerna som länkar samman kunskap om naturen med kunskap om Gud fick ett inflytelserikt uttryck i John Lockes *Essay concerning human understanding* från 1690. Locke menade att även om Guds existens är ”the most obvious truth that reason discovers”, så måste vi ändå försöka härleda – deducera – denna existens från någon del av vår intuitiva kunskap, på samma sätt som vi måste härleda matematiska sanningar, även om vi vet att de är sanna. Det Locke beskriver är, kan man säga, skillnaden mellan att utgå från att matematikens sanningar faktiskt är sanna (något icke-matematiker ofta är hänvisade till att göra), och den upplevelse av sanning som följer av att faktiskt förstå ett matematiskt bevis. Skillnaden ligger i själva upplevelsen, och det var genom denna upplevelse som matematiken och Gud kopplades samman. Locke menade att upplevelsen av en matematisk sanning var av samma slag som upplevelsen av Guds existens.[46] Det var enligt honom en upplevelse av begränsning, av bävan.

Matematikens insida och utsida

Låt mig nu knyta denna beskrivning av Newtons naturfilosofi till mitt teoretiska ramverk. Vi kan, menar jag, i Newtons naturfilosofi se upprättandet av en *gräns* mellan det som jag i min teori beskrivit som matematikens insida respektive utsida. I teoriavsnittet talade jag om insidan och utsidan av skolans matematik. Här är det istället fråga om två sidor hos (det som var på väg att bli) den vetenskapliga matematiken. Gränsen mellan dessa två sidor hänger samman med upplevelsen, hos de som endast ser matematikens utsida, av att denna utsida döljer något annat, outgrundligt. Gringas citerar en Ernst Brücke, som skriver om ”those wonder-working symbols whose brief rhetoric speaks more convincingly to the mind than the tongue of Cicero or Demosthenes”.[47] Citatet illustrerar sambandet mellan att inte veta och matematikens övertygande kraft som jag talade om i mitt teoriavsnitt (se ovan s. 14ff).

[44] Bilden jag målar upp är något förenklad. Jmf. Sven-Eric Liedman, *I skuggan av framtiden: modernitetens idéhistoria*, Stockholm, 1997, s. 66–67.
[45] Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, s. 160.
[46] Richards, ”God, truth, and mathematics”, s. 51–52.
[47] Gringas, ”What did mathematics do to physics?”, s. 397.

Vid den tid det här är fråga om, kan gränsen mellan matematikens två sidor knytas till upprättandet av en motsvarande social gräns. Gringas skriver att: ”during the eighteenth century a boundary was slowly being established between those who were technically competent to discuss physical problems and those who were accustomed to explaining the 'causes' of phenomena in verbal terms”.[48] Det var, skriver Gringas, själva rätten att uttrycka en åsikt om naturen, som matematiseringen av naturfilosofin kom att begränsa:

> The outsiders, having to content themselves with a superficial understanding of what was really going on, could no longer be considered legitimate active participants and contributors to a now esoteric (as opposed to exoteric) field of knowledge.[49]

Gringas resonemang är inspirerat av Pierre Bourdieu och med honom kan man säga att gränsen mellan matematikens två sidor kom att motsvara den mellan insidan och utsidan av det vetenskapliga fält som nu var på väg att ta form. För agenterna inom detta fält framstod matematiken som en rik, användbar och föränderlig uppsättning tekniker och resultat (jmf. s. 14 ovan). Från utsidan framstod den tvärtom som outgrundlig, men samtidigt laddad med potential och mening. I linje med mitt teoretiska ramverk, kan man säga att matematiken här kom att fungera som en representant för sociala relationer. Den fick en gräns i det sociala rummet att framstå som förankrad i ett universellt och evigt objekt, och därmed som meningsfull och legitim.

Den sociala funktion matematiken på detta sätt (givetvis i varierande utsträckning) kom att spela under 1700-talet, satte i stor utsträckning villkoren för tidens undervisning i elementär matematik. I motsats till undervisning i räknekonsten, vars mål var praktiskt behärskande, kom nämligen undervisningen i matematik att handla om gränsen mellan matematikens insida och utsida – antingen att tränga igenom den eller, oftare, att lära sig, som Bourdieu skulle ha uttryckt det, känna igen den och erkänna den – från utsidan.[50] Jag skall strax återknyta till den specifikt svenska matematiska

---

[48] Ibid, s. 388.

[49] Ibid, s. 393.

[50] En intressant diskussion av fenomenet, dock inte specifikt knuten till matematik, finns i Sarfatti Larson, ”In the matter of experts and professionals, or How impossible it is to leave nothing unsaid”. Den kan vara värt att nämna att det fortfarande finns ett levande motstånd mot föreställningen att naturen är till sin essens matematisk. Dess främste representant idag är troligtvis vetenskapsteoretikern Nancy Cartwright. I sin *How the laws of physics lie* presenterar hon argument inte helt olika de som anfördes mot Newton. Matematiken bör, menar Cartwright, betraktas som en teknik. Det hon vänder sig mot är att de enklaste matematiska ”naturlagarna”, vilka de facto stämmer sämst med hur verkligheten faktiskt är, framställs som fundamentala sanningar om verkligheten, enligt principen: ju enklare matematisk formulering, desto mer ”sann”. Cartwright menar att vår moderna syn på vetenskap karaktäriseras av ett bortseende från att naturlagarna faktiskt inte utgör, och inte kan utgöra, exakta beskrivningar av verkligheten. Hennes viktigaste bok är *How the laws of physics lie*, Oxford, 1983. Hon för liknande resonemang i *The dappled world: a study of the boundaries of science*, Cambridge, 1999.

diskussionen. För att denna skall bli begriplig är det dock nödvändigt att först säga några ord om den tyske filosofen Christian Wolffs syn på matematiken.

Christian Wolffs matematik

Christan Wolff konstituerade i sitt metafysiska system den matematiska metoden som grunden för all mänsklig kunskap. Han framställde den som ett slags universalrecept; den gemensamma nämnaren för alla vetenskaper.[51] Han menade liksom Newton att världen var i sig matematisk och att den matematiska metoden därför var det bästa sättet att få kunskap om denna värld.

Liksom Newton ville Wolff visa hur naturfilosofin gav stöd åt den kristna tron. Hans metafysik utgjorde vad man kallar en rationell teologi.[52] Denna kunde delas in i ontoteologi, kosmoteologi och fysikoteologi. Alla dessa grenar av den rationella teologin gick ut på att bevisa Guds existens. Ontoteologin syftade till att argumentera för Guds existens som ”the absolutely supreme being” genom endast rationell logisk analys. Kosmoteologin gick istället ut på att argumentera för Guds existens med utgångspunkt från vårt kosmos så som det faktiskt är (”the contingency of the world”). Inom Fysikoteologin, slutligen, byggde argumentationen för Guds existens på någon viss given del av kosmos (till exempel en snigel eller en sten). Fysikoteologin utgjorde därmed en länk mellan metafysik och fysik.[53] Utgångspunkten för fysikoteologin var att Gud är en sorts hantverkare och att man med utgångspunkt från verklighetens fulländning kan dra slutsatser om denne hantverkares egenskaper. Wolff startade med sitt verk *Vernüfftige Gedancken von den Absichten der natürichen Dinge* (1724) en våg av just fysikoteologi i Tyskland. Det skrevs böcker som argumenterade för Gud med utgångspunkt från vackra och invecklade företeelser i naturen som: tulpanen, rosen, gräset, elden, vattnet, snön, stenen, insekten, snigeln, gräshoppan, fisken, plantan, biet och fågeln.[54]

---

[51] Tore Frängsmyr, John L. Heilbron & Robin E. Rider, *The quantifying spirit in the 18th century*, Los Angeles, 1990, s. 34.

[52] William Clark, ”The death of metaphysics in enlightened Prussia” i William; Golinski Clark, Jan och Schaffer, Simon (ed.), *The sciences in enlightened Europe*, Chicago & London, 1999, s. 432–35.

[53] Ibid, s. 433.

[54] Ibid, s. 434. Euler, tidens mest framstående matematiker, ägnade stor energi åt att plocka sönder Wolffs metafysik, något Wolff tycke var både sorgligt och onödigt. Matematiker borde, menade Euler, ägna sig åt matematik, inte metafysik. Detta innebär emellertid inte att han, eller någon annan vid denna tid eller senare, skulle ha varit i någon mening ”fria” från metafysiska antaganden, se Clark, ”The death of metaphysics in enlightened Prussia”, s. 443. Euler var snarast cartesian, i opposition mot både å ena sidan Wolff och å andra sidan Newton. I Shea, ”The unfinished revolution: Johann Bernoulli (1667–1748) and the debate between the cartesians and the newtonians” finns en spännande redogörelse för argumentationen mellan cartesianer och newtonianer angående planeternas rörelser. Samma typ av meningsskiljaktigheter berörs även i Gringas, ”What did mathematics do to physics?”.

Den av Wolffs böcker som tycks ha haft störst inflytande i Sverige är hans *Auszug aus den Anfangs-Gründen aller Mathematischen Wissenschafften.*[55] Denna boks struktur säger något viktigt om den roll matematiken och den matematiska metoden spelade för Wolff. Här följs nämligen aritmetik av trigonometri och geometri, och sedan: mekanik, hydrostatik, verometrik, hydraulik, optik, catoptrik, dioptrik, perspektiv, astronomi, geografi, kronologi, knomonik, artilleri, fortifikation, byggkonst och slutligen algebra. Uppräkningen syftade till att täcka in hela tidens naturvetenskap. Verometrik är till exempel läran om luftpumpar, den typ av maskiner som Robert Boyle är mest känd för. Detta avsnitt innehåller en beskrivning av hur man bygger en luftpump. Beskrivningen är, liksom alla andra beskrivningar i denna bok, framställd i termer av satser och bevis. Till formen följer den Euklides *Elementa*. Det var på detta sätt som den matematiska metoden i Wolffs system utgjorde en sammanbindande länk mellan det vetenskapliga vetandets alla områden. Man kan säga att Wolff tog upp Boyles naturfilosofi, vilken var i grunden experimentell och därmed bara indirekt relaterad till den euklidiska geometrin och rekontextualiserade den i termer av vad han uppfattade som den matematiska metoden.

Den matematiska diskursen i Sverige

Den svenska matematiska diskursen var alltså under första halvan av 1700-talet influerad av den Christian Wolff och hans metafysiska system, i vilket matematiken var intimt sammanvävd med vad han menade var verklighetens gudomliga essens.[56] Till detta kom ett mer allmänt inflytande från England, där Newtons *Principia* hyllades som en vetenskaplig garant för den kristna religionens anspråk på sanning. Vid sidan om denna sammanvävning av matematik med religion, sågs matematiken som praktiskt nyttig i flera avseenden och det var dessa mer jordnära anspråk som tog störst plats i den svenska diskussionen.

Jag skall här begränsa mig till texter författade av Anders Celsius, Mårten Strömer och Fredric Palmqvist.[57] De var alla verksamma i Uppsala och var alla vad vetenskapshistorikern Tore Frängsmyr kallar wolffianer.[58] Denna avgränsning innebär att min redogörelse inte är representativ för Sverige som helhet. Å andra sidan tycks det i stor utsträckning ha varit genom Uppsala och wolffianismen som matematiken, i den bemärkelse som beskrivits ovan,

[55] Christian Von Wolff, *Auszug aus den Anfangs-Gründen aller Mathematischen Wissenschafften: zu bequemerem gebrauche der Anfänger auf Begehren verfertiget*, Franckfurt und Leipzig, 1743 [1713].

[56] Tore Frängsmyr, *Wolffianismens genombrott i Uppsala: frihetstida universitetsfilosofi till 1700-talets mitt*, Uppsala, 1972.

[57] Anders Celsius (1701–1744) var astronom men är idag mest känd för sin temperaturskala. Mårten Strömer (1707–1770) var också han astronom, medan Fredric Palmqvist (1720–1771) var matematiker. De var alla verksamma i Uppsala.

[58] Frängsmyr, *Wolffianismens genombrott i Uppsala*.

importerades till Sverige: Mårten Strömer skrev den första (och särklassigt mest inflytelserika) översättningen av Euklides *Elementa*.[59] Celsius författade den första "matematiserade" räkneläran.[60] Fredric Palmqvist skrev den första bok på svenska som uteslutande handlade om algebra.[61] Det finns därför skäl att ägna särskild uppmärksamhet åt argumenten som just dessa män anförde till matematikens fördel och mer allmänt åt den wolffianska diskurs som fördes i Uppsala vid denna tid. Översiktligt kan man i denna diskurs särskilja tre olika sätt att argumentera för värdet av matematiska studier.

1. Matematiken var nyttig i sig

För det första argumenterade man (liksom tidigare Vives och Clavius) med hänvisning till matematikens nytta för vetenskaperna och det praktiska livet. Fredric Palmqvist höll 1754 ett *Tal Om Mathematiska Vetenskapernas nytta i allmänna lefvernet*.[62] I talet går han igenom det "praktiska lefvernets" olika sidor. På ett sätt typiskt för den matematiska diskursen beskriver han det praktiska livet som till sitt väsen matematiskt och menar att det därför kan förbättras med hjälp av matematik. Han skriver:

> Ty, om vi icke ägde en säker kunskap uti den delen, som kallas *Vulgaris-Arithmetik*, huru skulle en Regering eller dess ombud veta, när en undersåtare ärlagt den skatt, som honom vederbör? Huru skulle Köpare och Säljare kunna med godt samvete skiljas ifrån hvarandra? Huru skulle en Handlande veta tillståndet och nyttan af sin handel, så väl i anseende til honom sjelf, som i anseende til dess fädernesland. Huru skulle en, som styrer och uppehåller många arbetare, kunna döma, hvad fördel hans myror draga til honom och til hans fädernesland?[63]

Det som gör det möjligt för en regering att veta om undersåtarna erlagt rätt skatt, för köpare och säljare att med gott samvete att skiljas från varandra och så vidare är, enligt Palmqvist, matematiken. Samma tankegångar kommer till uttryck i förordet till Mårten Strömers översättning av Euklides *Elementa*. Den inleds med följande mening:

> En stor del af Krigsvetenskapen i våra tider, Seglations- Bergs- och Landtmätare-vetenskaperna, med flere, grunda sig på Mathematiska principer; och således måste de, som med ämbetens bestridande härvid

[59] Strömer, *Euklidis Elementa* [1744].

[60] Anders Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-konst, Til En Grundelig Inledning För Swea-Rikes Ungdom Utgifwen af And. Celsius Mathes. Prof. wid Kongl. Acad. och Secret. wid Kongl. Wetensk.Societ. i Upsala*, Upsala, 1741 [1727].

[61] Fredric Palmqvist, *Inledning til algebra (I–II)*, Stockholm, 1748.

[62] Palmqvist, *Tal, om mathematiska vetenskapernas nytta i allmänna lefvernet.*

[63] Ibid.

> hafva at beställa, vara uti Mathematiken förfarne, om de skola grundligen förstå det, som til deras göromål hörer.[64]

Liksom Vives och Clavius skriver Strömer att de praktiska vetenskaperna är grundade på matematiska principer och att det därför bara är genom matematiken som man kan förstå dem ordentligt.

2. Matematiska studier befrämjade förmågan att ”tänka redigt”

För det andra menade man att matematikstudier befrämjade förmågan att ”tänka redigt”. Inom den matematiska diskursen intog förståelse en särskild plats. Att förstå matematik innebar inte (enbart) att behärska ett visst matematiskt stoff. Förståelse flöt samman med en mer allmän förmåga att tänka. Tanken som ofta kom till uttryck var att *övande* på matematik skulle leda till två sammanhängande men väsentligen olika mål: å ena sidan till ett behärskande av matematiken, å andra sidan till ett formande av själva förmågan att tänka. ”Ingen lär väl neka”, skrev någon av wolffianerna i Uppsala, ”at de härlige mathematiske wettenskaper äro kiällan och uhrsprunget til alla ädla kunskaper och öfningar”, och att man med matematikens hjälp kan uppöva tankeskärpan, ”ungefär som man stärker sin kropp med 'exercitier'”.[65]

Hur man såg på denna sida av matematiken framgår tydligt i texten *Samtal emellan en Herre och en Fru om geometriens nytta för unga studerande* från 1743.[66] Intressant är att denna text är utformad som ett bemötande av en skepsis inför matematiken, vilket utgör en påminnelse om att matematik vid denna tid var en nyhet och inte som idag hade en given plats i samhället. Texten är ett samtal mellan en Fru och en Herre. Dessa talar om fruns man och hennes son. Sonen har tydligen blivit tvungen att läsa matematik i skolan. Mannen motsätter sig detta, medan frun är försiktigt positiv till matematiken. Herren fungerar som matematikens talesman.

Texten inleds med en redogörelse för mannens skepsis. Frun rapporterar att han talat om det ”fåfänga” i att ”plåga [sonen] med trianglar och cirklar, samt annat grillerväsende”, att mannen fruktar att matematiken skall göra sonen ”förvirrad” snarare än klokare.[67] Till detta lägger Frun erfarenheten av ett möte men ”en viss Mathematicus”, vilken tydligen var ”något underlig”.

---

[64] Mårten Strömer, *De Sex Första Jämte Ellofte och Tolfte Böckerna Af Euclidis Elementa, eller grundeliga inledning til geometrien, til Svenska ungdomens tjänst utgifne af Mårten Strömer, För detta Astronomie professor i Uppsala, och Ledamot af Kongl. Vetensk. Acad. i Stockholm och Societ. R. Lit. et Scient. i Uppsala.*, Stockholm, 1800 [1744], s. 2. Bortsett från en viss modernisering av stavningen är förordet i upplagan tryckt 1800, den jag använder, identiskt med det i första upplagan från 1744.

[65] Frängsmyr, *Wolffianismens genombrott i Uppsala: frihetstida universitetsfilosofi till 1700-talets mitt*, s. 65.

[66] Anonymous, *Samtal emellan en Herre och en Fru om geometriens nytta för unga studerande*, Stockholm, 1743.

[67] Ibid, s. 3–4.

Mannen menade givetvis att detta borde ses som ett tecken på matematikstudiernas negativa effekter. Frun menade istället att detta nog inte borde läggas matematiken till last, utan kanske berodde på att han ”suttit för mycket inne i enslighet och speculerat på sina figurer; hvarutaf han blifvit ovan at umgås med annat folk”. Intressant nog ser man här ett uttryck för en stereotyp bild av matematiker som lever vidare än idag. Fruns fråga är emellertid: Varför är geometri ”nödig för unga studerande”?[68]

Av svaret framgår att argumentationen för studier av matematik vid denna tid hade en tydlig udd riktad mot de klassiska språken. Det borde räcka, säger nämligen Herren, att man lärde sig läsa ”en latinsk bok”, och för detta behöver man inte ”upoffra hela sin bästa ungdomstid, som nu gemenligen skier, utan i det stället kunde man lära monga nödiga och nyttiga vetenskaper”.[69] Samtalet leder sedan in på en jämförelse mellan matematik och logik. Argumentet går här ut på att logiken i och för sig innehåller bra regler, men att dessa regler endast utgör så att säga objekt för tänkandet, och att man därför ”vid monga tilfällen aldrig komma ihog dessa reglor; utan giöra som oftast falska slutsatser: taga saken på galen fot, och invekla det ena med det andra i största confusion”.[70] Det som behövs är istället en övning i att tänka och det är exakt det som matematiken erbjuder. Genom att studera Euklides *Elementa* skaffar man sig, menar Herren, ”en habitude, at sluta förnuftigt om all ting”.[71]

En liknande jämförelse mellan matematik och logik kommer till uttryck i förordet till Anders Celsius *Arithmetik eller Räkne-Konst.* Celsius skriver först att de som ”med tiden tänker tiena sitt Fädernesland” bör se till att han ”förwärfvar sig en färdighet i förståndet” genom att ta del av en ”grundelig wetenskap”. Vad man då först tänker på är, tror Celsius, en ”Logica eller Förnufts Lära”. Men även om en sådan i och för sig föreskriver kloka ”reglor och maximes” så är detta, menar Celsius, likväl till föga nytta. För det som krävs är ”en habitus eller färdighet, at skilja det wissa från det owissa”, och en sådan kan man bara förvärva genom ”stadig öfning och practicerande af de reglor, som Förnufts Läran gifwer wid handen”, det vill säga av flitigt studerande av matematiken. På så sätt vänjer man sig ”wid klara och tydeliga begrep eller definitioner”.[72]

3. Matematiska studier ledde till sedlighet och en förmåga att skilja rätt från fel

För det tredje argumenterade man för matematikstudier med hänvisning till dess moraliska effekter. Även om den förmåga att ”tänka redigt” som matematiken skulle bibringa sina adepter i första hand sågs som ett sorts epistemologiskt försprång i förhållande till dem som inte kände till

[68] Ibid, s. 4.
[69] Ibid, s. 6.
[70] Ibid, s. 12.
[71] Ibid, s. 13.
[72] Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-Konst*, förord.

vetenskapernas och praktikernas underliggande principer, hängde den även samman med frågor rörande moral och etik. Celsius talar om att ”ställa sina tankar efter en förnuftig ordning” och att ”finna en smak och nöje i demonstrationer”. På så sätt hoppades han att de skulle bli ”sedigare och dygdigare”.[73] Celsius talar även om matematiken i termer av sanning. Matematiken, eller mer exakt matematikerna, har nu, menar han, ”lika såsom borttagit det medfödda täckelset för våra förstånds ögon”, så att vi nu med våra ”uptäkta ögon se sanningen klarare uti de saker, som ännu äro af ovissheten förmörkade”.[74] Detta hoppas han skall leda till att ”de andra vetenskaperna” skall bringas till större visshet, och inte minst:

> at intet så monga stridigheter i bland de Lärda skulle upkomma: intet så monga ogrundade inkast giöras emot sanningen: intet höras så monga beropa sig allenast på auctoritet, utan att tänka sielfva efter, om det är sant eller osant, hvad en annan sagt eller skrifvit [...][75]

Här finns med andra ord ett explicit budskap rörande social ordning. Man skall, skriver Celsius, ”tänka själv”.[76] Väsentligt är emellertid att detta självständiga tänkande skall vara ett resultat av övande på matematik. Matematiken konstituerar enligt Celsius själva förmågan till självständighet och med denna kan man uppenbarligen inte ta matematiken som objekt för sitt tänkande. Den självständighet som Celsius hoppas skall leda till att ”intet så monga ogrundade inkast giöras emot sanningen” skall utgå från matematiken, snarare än att förhålla sig till den.[77]

Genom dessa tre typer av argument konstituerades matematiken i början av 1700-talet som ett objekt med en rik uppsättning egenskaper. Väsentligen importerades detta objekt till Sverige från övriga Europa. Annorlunda var det med räknekonsten, som vid 1700-talet kom till uttryck genom en i viss mån autonom svensk litterär genre. Av denna anledning kan man i Sverige säga att ett *möte* mellan matematiken och räknekonsten ägde rum under 1700-talet. Jag skall nu gå vidare genom att beskriva några av de uttryck som detta möte tog sig.

---

[73] Ibid, s. 2–3.
[74] Ibid, s. 3.
[75] Ibid.
[76] Ibid.
[77] Denna syn på sanning kan kontrasteras mot den som beskrivs i Shapin, *A social history of truth.* Shapin beskriver hur frågan om huruvida något var sant i 1600-talets England var sammanvävd med frågan om vem det var som påstod att det var på ett visst sätt. Sannolikt var det en sanningsdiskurs liknande den Shapin beskriver, som Celsius vände sig mot. Till saken hör att matematik inte värderades särskilt högt i de sociala kretsar Shapin fokuserar.

Mötet mellan räknekonsten och matematiken

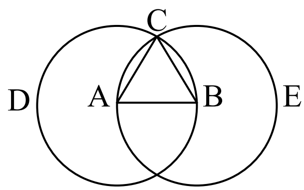
Vad fick den syn på matematiken som hörs hos Celsius, Strömer och Palmqvist för konsekvenser för matematikundervisningen i Sverige? Som nämnt ovan översattes Euklides *Elementa* till Svenska 1744 av Mårten Strömer. Detta hängde emellertid inte bara samman med ett ökat intresse för euklidisk geometri. Under inflytande av Wolffs metafysik gjordes också flera försök att "förbättra" de svenska räknelärorna genom att passa in dem i det euklidiska framställningssättet. Jag skall här börja med att säga något som Strömers euklidesöversättning, för att sedan ta mig an de nya "förbättrade" räknelärorna.

Strömers *Euklides Elementa* (1744)

Strömers översättning av Euklides *Elementa* börjar med 35 definitioner. Därefter följer tre "postulater", vilka i princip säger vad man kan göra inom det system som beskrivs – till exempel "At utdraga en gifven rät linea ända rätt fram, så långt man behagar".[78] Bokens inledning avslutas med tolv "axiomer" vilka är påståenden som måste tas för sanna utan bevis – till exempel att "De som äro dubbelt så stora som et och samma, eller lika stora, äro sins emellan lika stora".[79] Därefter följer det första av Euklides "problem", vilket lyder: "At på en gifven rät determinerad linea rita up en liksidig triangel".[80]

Jag skall nu presentera en ganska detaljerad beskrivning av Euklides lösning av detta problem. Med detta vill jag nå ett specifikt mål, nämligen att – i mycket liten skala – ge det som ovan omtalats som den vetenskapliga matematiken ett konkret innehåll. Jag vill visa vad eleverna ansågs behöva *göra* för att bibringas förmågan att till exempel "tänka redigt". Låter man detta vara osagt tror jag risken är stor att man missförstår skillnaden mellan räknekonsten och den vetenskapliga matematiken som en skillnad mellan något man gör och något som hör till tänkandets värld. Genom att redogöra för ett av den euklidiska geometrins bevis, vill jag visa att även bevisföring är något man *gör*. Vad som skiljer den euklidiska geometrin från räknekonsten är därför inte så mycket att räknekonst är något man gör medan geometri är något man tänker, som att den euklidiska geometrins handlingar tillmäts en särskild betydelse, nämligen som avspeglingar av en viss sorts värdefullt tänkande. Låt mig således börja med att återge Strömer lösning av problemet:

[78] Strömer, *Euclidis Elementa*, s. 6.
[79] Ibid.
[80] Ibid, s. 8.



Låt AB vara en gifven rät linea som är determinerad: Det begäras at en liksidig triangel måtte upritas på AB.

Tag A för medelpunkt och rita en Cirkel DCB, hvars peripherie går genom B, a tag sedan B för medelpunkt och rita en Cirkel ACE genom A, a och drag så ifrån den punkten C, hvarest bägge Cirklarna råkar hvarandra, til A och B tvänne räta lineer CA, CB; b Så är ABC den begärte triangelen.

a. 3. postul
b. 1. postul.
e. 15 defin.
d 1. axiom.

Ty, efter A är medelpunkten til Cirkelen DCB, så är AC lika stor med AB, c och efter B är medelpunkten til Cirkelen ACE, så är CB lika stor med AB: c altså äro bägge lineerna AC och CB lika stor med en och samma linea AB; derföre måste de ock vara sins emellan lika stora d Och således äro alla tre sidorna uti triangelen ACB lika stora.[81]

Vad som händer här är inte särskilt komplicerat. Först upprepas själva problemet, nämligen att rita upp en liksidig triangel på en given rät "determinerad" linje. En determinerad linje är en linje som har en begränsad längd. För att göra detta börjar man med att rita en cirkel med medelpunkt i A, med en radie lika stor som den linje man hade från början. Att man *kan* göra detta beror på att postulat nummer tre lyder: "At taga hvad punkt man vil til medelpunkt, och rita en Cirkel, hvars peripherie går genom hvad punkt man vil".[82] Att det är detta postulat som använts i detta första steg i konstruktionen markerar Strömer med ett litet "a" som hänvisar till den lilla tabellen till vänster. Sedan gör man samma sak med den andra slutpunkten av linjen, dvs. B. Slutligen drar man "tvänne räta lineer" från den punkt där cirklarna skär varandra (dvs. i C) till slutpunkterna av den linje man hade från början. Detta är möjligt på grund av postulat 1, som lyder "At, ifrån hvad punkt man vil, draga en rät linea til hvad punkt man vil".[83] Att detta postulat använts markerar Strömer med ett litet "b".

När nu denna konstruktion är gjord återstår att bevisa att den triangel man fått verkligen är liksidig. Vad är då en liksidig triangel? Definition 24 lyder: "Utaf tresidiga figurer, kallas den en liksidig triangel, hvars alla tre sidor äro lika stora".[84] Det som måste bevisas är därför att de tre linjerna som nu dragits verkligen är lika långa – då passar denna triangel definitionen för en "liksidig triangel". Strömer inleder beviset med att konstatera att eftersom A är i mitten av den vänstra cirkeln (cirkeln DCB) så är linjen från A till C (linjen AC) lika stor som linjen från B till C (linjen BC). Detta kan vi vara säkra på

[81] Strömer, *Euklidis Elementa*, s. 8.
[82] Strömer, *Euclidis Elementa*, s. 6.
[83] Ibid, s. 5.
[84] Ibid, s. 4.

eftersom den 15:e definitionen lyder: ”Cirkel är en platt figur, som inneslutes af en linea, hvilken kallas pheripherie eller omkrets, och är sådan, at alla räta lineer, som ifrån en viss punkt in uti figuren falla på henna, äro lika stora”.[85] Den punkt de skall falla på för att detta skall gälla är, står det i den följande definition 16 (vilken Strömer inte anser sig behöva hänvisa till), cirkelns ”medelpunkt”, och cirkeln i fråga var ju skapad med A som medelpunkt. Samma resonemang (det vill säga definition 15 och 16) tillämpat på den högra cirkeln visar att BA måste vara lika stor som BC. Nästa steg bygger på konstaterandet att AB å ena sidan, på grund av resonemanget kring den vänstra cirkeln, måste vara lika stor som AC, men att AB å andra sidan, på grund av resonemanget kring den högre cirkeln, måste vara lika stor som BC. Med andra ord är både AC och BC lika stora om AB. Men då måste de också vara ”sins emellan lika stora”, eftersom axiom ett lyder: ”De som äro lika stora med et och samma, äro sins emellan lika stora”.[86] Detta markerar Strömer med ett litet ”d”. Därmed är problemet löst. Vi har konstruerat triangeln som efterfrågades, och bevisat att denna triangel verkligen är just den som efterfrågades.

Att se matematiken i Euklides *Elementa*

Det jag vill att man skall notera är hur svårt det är att exakt säga vari skillnaden består mellan den ovanstående följden av operationer – på griffel och tavla, med papper och penna, eller i huvudet – och de operationer som beskrivs i räknelärorna. Räknelärorna beskriver hur man i en given situation skall göra för att få fram rätt svar. Någon sådan beskrivning finns inte här, men likväl är det en viss följd av operationer som krävs för att ”svaret” skall bli det som inom den euklidiska geometrin definieras som det rätta. Vad jag menar är att både räknekonsten och den euklidiska geometrin konstituerar en förmåga vilken kan förstås som i grunden *praktisk*. Det rör sig i båda fallen om ett sorts hantverk, vilket inte låter sig reduceras till innehållet i räknelärorna respektive Euklides *Elementa*. Genom övning (gärna kombinerad med förklaringar från någon som redan kan) lär man sig att ”se” hur ett visst problem skall lösas och det går inte att *säga* vari denna förmåga består. Likväl uppfattar vi en avgörande skillnad mellan räknekonsten och den euklidiska geometrin. Denna skillnad tycks likna den mellan *profant* och *heligt*. Då räknekonsten inte är något mer än praktiska instruktioner, tycks den euklidiska geometrin hänvisa till något svårgripbart annat. Och tveklöst finns det något hos Euklides som går utöver själva beskrivningarna av hur man i praktiken utför de många konstruktionerna och säkerställer att de är riktiga. Det är emellertid inte lätt att förklara vari detta andra består.

[85] Ibid, s. 3. ”Denna punkten kallas Centrum, eller medelpunkt”, står det i den följande 16:e definitionen.
[86] Ibid, s. 6.

Väsentligt för mina syften är det faktum att den euklidiska geometrin för dem som skulle studera matematik väsentligen framstod som något man gör. Undervisningen baserad på Euklides *Elementa* gick i stora drag ut på att eleverna skulle lära sig att lösa problem av samma slag som det ovanstående. Det var denna tämligen specifika förmåga som i praktiken representerade den så ofta omtalade förmågan att ”tänka redigt”.

Celsius *Arithmetica* (1727)

Nu har vi slutligen kommit till själva mötet mellan räknekonsten och den vetenskapliga matematiken. Den första av de böcker jag skall ta upp är Anders Celsius *Arithemetica eller Räkne-Konst* från 1727. Vad gäller övergripande disposition, samt även de problem som behandlas, följer denna bok räknelärorna, något som framgår av nedanstående tabell:

Tabell 1. En jämförelse mellan Celsius *Arithmetica eller Räkne-Konst* och de svenska räknelärornas typiska disposition. Den skuggade rutan i den högra kolumnen, ”Logaritmer”, finns i Celsius bok, men inte i räknelärorna.

Paragraf hos Celsius	**Räknelärornas motsvarande innehåll**
§1-§115	Numeratio
§116-§153	De fyra räknesätten i hela tal.
§154-§160	Bråk
§161-§177	Sorter
§178-§183	Decimalbråk
§184-§197	*Regula de Tri*
§198-§220	Potenser och rötter
§221-§237	Logaritmer

Framställningssättet är däremot kraftigt influerat av Wolff och den euklidiska geometrin. Boken är, liksom Euklides *Elementa*, framställd i form av paragrafer och liksom Strömers euklidesöversättning (och i motsats till räknelärorna) saknar den innehållsförteckning och är uppställd som en löpande följd av paragrafer.[87] Celsius inleder med en definition, nämligen:

> Hwart och ett ting kallas en *Enhet* (*unitas*) så wida det betracktas allenast som ett (*unum*).[88]

Därpå följer ett ”Scholion”, där Celsius förklarar att en definition är ”Ett begrep om en sak, som är så tydligt, at man der med kan skilja den ifrån alla andra ting”, och att ett ”Scholion” är en anmärkning ”som tiena til att widare förklara något närmare”. De följande 237 paragraferna har rubriker som Definition, Scholion, Hypothesis, Theorema, Corrolarium, Problema och

[87] Och för den delen inte, som i Bergmarck, *Svensk räkne-bok*, något alfabetiskt register.
[88] Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-Konst*, s. 1.

Resolution. Här ser man ett uppenbart inflytande från Wolff. Celsius' ambition var, liksom Wolffs, att systematisera räknekonsten med hjälp av den matematiska metoden.

Intressant nog innehåller inte desto mindre Celsius första 115 paragrafer en mängd satser som nästan ordagrant kunde ha ingått i till exempel Agrelius eller Anderssons räknelärор. Hit hör till exempel följande Problema:

> §113. At unämna ett tal, som är med ziffror upskrifwit.
>
> Resolution. 1. Man begynner från höger til wænster at skilja zifrorna i classer med ett *comma*, tilægnande hwar och en *class* 3 ziffror, som stå i sina tre *columner.*
>
> 2. öfwer tredie *classens* första zifra til höger sættes med Romerska zifror *ett*, öfwer femte *classens* första zifra sættes *twå*, öfwer sjunde *classens* första zifra, *tre*, och så widare öfwer hwar annan *class.*
>
> 3. De zifror, som hafwa allenast ett *comma* om sig på högre handen, næmnas ut genom tusende; men har tusende zifran et strek öfwer sig, så kallas den en *million*, har hon twænne strekar, heter hon en *billion*, 3 strekar en *trillion* etc. Sedan næmnes altid i hwar *class* zifran til höger med enklatal, den andra med tijor, och den tredie med hundrade tal. *Så ær det giort, som begærtes.*
>
> *Demonstratration* ær klar af §.§.5.8.[89]

Och precis som i räknelärorna kompletterar Celsius dessa praktiska regler med exempel. Även vad gäller storleken på det tal han använder för att exemplifiera skrivandet och utnämnandet av siffror är Celsius genren trogen – med sitt 34-siffriga tal överträffar han faktiskt räknelärorna vad gäller detta obligatoriska utnämnande-exempels storlek. Skillnaden i förhållande till räknelärorna ligger här huvudsakligen i Celsius rubricering (Problema, Resolution, Demonstration), inte i innehållet. Liksom räknelärorna beskriver Celsius hur man *gör.*

Vissa av Celsius' satser utgör algebraiska formuleringar av axiom och satser hämtade från Euklides *Elementa.* Till exempel lyder Celsius 49:e paragraf, vilken Celsius rubricerar som ett axiom: "De tal, a, b, som äro jämlika med ett och samma tal, c eller med jämlika $c = d$ äro jämlika sins emellan, $a = b$".[90] Detta kan jämföras Euklides första axiom som i Strömers översättning lyder "De som äro lika stora med et och samma, äro sins emellan lika stora".[91]

[89] Ibid, s. 42. Celsius hänvisning till §§ 5–8 syftar på förklaringen av själva talsystemet.
[90] Ibid, s. 15.
[91] Strömer, *Euclidis Elementa*, s. 6.

Allmänt kan man säga att Celsius i sin *Arithmetica* blandar räknelärornas stoff med innehåll hämtat från Euklides och säkert även från andra håll. Ibland är det fråga om regelrätta lån. Detta gäller till exempel många beskrivningar av praktiskt räknande som utan vidare kunde ha ingått i en räknelära trogen genren. Det gäller också Celsius redogörelser för många algebraiska sanningar. I andra fall är det svårare att urskilja något enskilt ursprung till det Celsius skriver. Detta gäller till exempel Celsius redogörelse för räknande med sorter.[92]

I den 184:e paragrafen kommer Celsius till *Regula de Tri*. Här syns en avgörande skillnad mellan hans *Arithmetica* och räknelärorna. Celsius ägnar nämligen blott tio sidor åt *Regula de Tri*. Han inleder med att i algebraiska termer beskriva dess principer. Detta kräver ungefär en sida. Sedan följer två exempel. Dessa syftar emellertid inte till att visa hur *Regula de Tri* kan användas i praktiken, utan till att illustrera den underliggande matematiska principen. I det första exemplet visar Celsius hur man kan ta reda på "huru monga ören gå på $\frac{3}{8}$ daler", i det andra hur man omvandlar samma $\frac{3}{8}$ daler till decimalbråk. Dessa tre paragrafer kan jämföras med räknelärornas grundliga introduktioner till *Regula de Tri*.[93]

Sedan följer Celsius motsvarighet till räknelärornas långa uppräkning av räknesätt baserade på *Regula de Tri*. Intressant är att Celsius här diskuterar exakt det problem som räknelärornas detaljerade uppdelning i de många räknesätten och de många fallen syftade till att lösa, nämligen att identifiera vilket räknesätt som skall användas. Celsius visar i ett exempel hur han tänker sig att det hela bör gå till:

> Til ex. efter waror äro proportionela emot deras wärde i penningar. Så Wille man weta när 9 alnar ut af nogon wara kosta 15 daler, huru mycket kosta då 11 alnar? hwarföre sedan man satt up teknen : :: :, så sätter man i tredie rummet det talet som är af samma slag med det som sökes, hwilket man kan finna af frågan, *huru mycket?* neml. penningar; Hwarföre 15 daler kommer at stå i tredie rummet (: :: 15 :); men de bägge talen som betyda alnar, ställas i första och andra rumet, utaf hwilka det större talet 11 bör stå i andra rummet, efter 11 alnar kosta mera än 9 alnar, och således bör det fierde talet hafwa flera daler än det tredie, så at de gifna talen stella således: 9 : 11 :: 15:, eller 3:11::5:, när man dividerat den första 9 och den tredie 15 med det allmenna största mottet 3 (§.140), hwilka ginwägar, och flera dylika man kallar *praxis italica*, efter Italienare hafwa mestadelen dem upfunnit och först brukat. När man således upstelt de 3 gifna talen, så söker man igen det fierde (§.184), som blifwer $18\frac{1}{3}$ daler, eller 18 daler 10 öre och 16 penningar (§. 186).[94]

[92] Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-Konst*, s. 85.
[93] Ibid, s. 104–105.
[94] Ibid, s. 107–108.

Flera saker kan sägas om denna redogörelse. För det första är det tydligt att detta inte är ett exempel hämtat ur praktiken. Celsius talar om ”nogon wara” och motiverar inte varför man vet hur mycket 9 alnar kostar men vill veta hur mycket just 11 alnar kostar.[95] För det andra är det intressant att Celsius här presenterar ett, åtminstone som han själv ser det, praktiskt sätt att så att säga lista ut hur talen skall placeras i uppställningen. Här är det inte fråga om någon demonstration av matematiska principer. För det tredje nämner Celsius *Praxis Italica.* I Anderssons räknelära utgör beskrivningen av denna räkneprincip ett huvudnummer. Andersson motiverar räknesättets fördelar, de svårigheter det är förknippat med, och presenterar även en rad tabeller (samt övningar och förmaningar) med syfte att bibringa läsaren en förmåga att faktiskt använda *Praxis Italica.* Celsius nöjer sig med att berätta att *Praxis Italica* är en beteckning på ett antal ”ginwägar”.

Längre fram går Celsius igenom exempel som tydligt motsvarar några av räknekonstens många räknesätt. Han nämner i och för sig vilka räknesätt det är fråga om, men poängterar hela tiden den matematiska princip som förenar dem. Paragraf 197, som avslutar Celsius avsnitt om *Regula de Tri,* lyder:

> Förutan dessa ofwan nämnde applicationer af *Regula de Tri,* så gifwas ännu oendeligen monga, som hafwa sin stora nytta så i wetenskaperna, som i allment bruk, derest hon fådt åtskilliga namn, alt efter sakerna, hwar til hon blifwit applicerad. Men hwad *Regula Alligationes, Falsi,* och flera dylika frågor, angåer, så kunna de mycket lettare genom *Algebra* uplösas.[96]

Celsius säger att de många räknesätten förvisso har sin nytta – till och med inom vetenskaperna – men presenterar *algebran* som en slags ersättning för dem. Algebran gör det möjligt, skriver han, att lösa alla de frågor som de många räknesätten behandlar. Väsentligt är dock att Celsius inte visar hur detta går till. I sin redogörelse för algebra förekommer inga frågor av det slag som inom räknekonsten skulle lösas med hjälp av *Regula de Tri,* och i paragraferna som behandlar *Regula de Tri* använder han inte algebra.[97]

Av det ovanstående framgår att Celsius *Arithmetica* innebär ett steg bort från det praktiska räknandet. Mer exakt kan man säga att Celsius bok karaktäriseras av en ambivalens i förhållande till praktiken. Han utgår från räknelärorna och i stor utsträckning bestämmer dessa vilka problem han tar upp. På en rad punkter går han dock så att säga bara halva vägen. Han tar upp sorter, men han ger inga realistiska exempel på räkning med sorter. Han har inte med några tabeller över sorternas relationer. Han nämner *Praxis Italica,*

[95] Ibid.
[96] Ibid, s. 116.
[97] De återstående paragraferna, som handlar om potenser, rötter och logaritmer, får jag anledning att återkomma till längre fram.

men ger knappast läsaren någon möjlighet att med hjälp av hans bok lära sig använda *Praxis Italica*.

Palmqvists *Inledning till Algebra* (1748)

Många av de tendenser man kan se i Celsius *Arithmetik* från 1727 kommer än tydligare till uttryck i Fredric Palmqvists *Inledning til Algebra*, publicerad drygt 20 år senare. Hos Celsius är algebra och räknekonst sammanvävda. Palmqvists bok handlar istället uteslutande om algebra, och är inte alls på samma sätt som Celsius bok strukturerad med utgångspunkt från räknelärorna.

Palmqvists algebra har tre delar, varav jag skall begränsa mig till den första. Denna är i sin tur indelad i fyra avdelningar, vilka jag kommer att gå igenom en i taget. I den första redogör Palmqvist för algebrans tecken. Hit hör plus, minus och likhetstecknen, men även rottecknet (med olika exponenter) samt hur man skriver potenser. Palmqvist beskriver även mer allmänt hur man sätter samman uttryck av bokstäver och de respektive tecknen. Avsnitt nummer två handlar sedan om bokstavsräkning.

Bokstavsräkningen

Innehållet i Palmqvists avsnitt om bokstavsräkning kom senare att spela en central roll inom skolmatematiken som inledning till skolämnet algebra. Här beskriver Palmqvist hur man "räknar" med bokstavsuttryck. Intressant nog är detta avsnitt till sin struktur mycket likt räknelärornas behandling av sorter. Palmqvist säger inledningsvis att "De quantiteter, som äro på et sätt beteknade och hvilka följakteligen föras (refereras) til samma slags enheter eller sorter, sägas vara af *ett slag*".[98] Det han syftar på kan med modern terminologi sägas vara termer med samma kombination av obekanta kvantiteter. Dessa motsvarar i detta avsnitt räknelärans sorter. "Således är", skriver Palmqvist, "$2x$ af et slag med $5x$; $4ab$ med $7ab$; $\frac{2}{3}a$ med $\frac{1}{4}a$ [men] $2x$ af olika slag med $2y$ [...]".[99]

Stort utrymme ägnar Palmqvist åt minustecknets hantering, vilket för många tydligen var en nymodighet vid denna tid. Palmqvist beskrivning av addition av "sammansatte quantiteter" är mycket lik räknelärornas beskrivning av hur man adderar tal uttryckta i flera olika sorter. Han skriver att man skall sätta "de quantiteter öfver hvarandra, som äro af *et slag* (§. 14.); sedan adderas de columnevis tilsammans efter de nys anförde reglor, ifrån hvilkendera sidan man hälst behagar". Helt i linje med räknelärornas framställningssätt skriver han sedan: "Til uplysning tjena följande exempel", varefter följer fyra exempel (vilka dock, i motsats till hur det brukar vara i räknelärorna, inte är kommenterade).[100] Tre saker kan påpekas:

---

[98] Palmqvist, *Inledning til algebra (I–II)*, s. 16.
[99] Ibid, s. 16–17.
[100] Ibid, s. 18.

För det första att Palmqvist genomgående relaterar räknandet med bokstavsuttryck till räknande med siffror, vilket han kallar ”allmän räkning”. Angående såväl multiplikation som division skriver han att man förfar ”nästan som i allmän räkning”.[101] Detta visar på det fortfarande nära bandet mellan algebran och räknekonsten. Palmqvist beskriver liksom räknelärorna hur man gör när man räknar. Skillnaden ligger i att Palmqvist behandlar bokstäver istället för siffror, med följd att de obekanta spelar en liknande roll som sorterna gör i räknelärorna.

För det andra det utrymme Palmqvist ägnar åt bestämmandet av huruvida termerna skall vara ”jakade” eller ”nekade”. Upprepade gånger presenterar han här *regler*, enligt räknelärornas mönster. Till exempel skriver han angående division:

> At här samma regel gäller för teknen, som i multiplication, härörer deraf, at genom division uplöses det, som genom multiplikation blifvit sammansatt. Ty när en jakad quantitet som nu komer at anses för en product, divideras med en quantitet, då anses den senare för en factor; är då den jakad moste den andra factoren eller den nu sökta quotienten ock vara jakad: men är han nekad, moste quotienten bli nekad; emedan producten i annor händelse ej kan vara jakad. Deremot när en nekad product divideras med en nekad quantitet, moste quotienten bli jakad; men divideras han med en jakad moste quotienten bli nekad; emedan i annor händelse producten af divisoren och quotienten, som så til värde, som teken bör vara jämlik med den gifna dividendo, ej kan bli nekad.[102]

Min poäng är att hanteringen av tecknen här utgör ett betydande problem, det vill säga långt ifrån en trivialitet, och att Palmqvist löser detta problem genom att presentera regler.

För det tredje att Palmqvists redogörelse för *division* är mycket kortfattad. Division av bokstavsuttryck blir lätt ganska trassligt i en praktisk teknisk mening. Palmqvist ägnar knappt något utrymme åt att förklara hur det går till. Han ger bara två exempel (varav det ena mycket enkelt), och dessa är inte kommenterade. Det tycks därför svårt, för att inte säga omöjligt, att faktiskt *lära sig* utföra de operationer Palmqvist beskriver endast med utgångspunkt från hans bok. Den är med andra ord skriven för att användas i en form av undervisning där ansvaret för att visa hur man räknar med bokstavsuttryck i stor utsträckning vilar på läraren.

Sammantaget kan Palmqvists avsnitt om bokstavsräkning sägas konstituera en sorts algebraisk räknekonst. Denna räknekonst kom senare att inom skolmatematiken helt enkelt kallas *algebra*. Att kunna algebra innebar därmed att kunna utföra en viss uppsättning manipulationer av bokstavsuttryck, så som multiplikation, division och rotutdragning. Att kunna detta innebar i sin tur att behärska ett system av regler. Väsentligt vad

[101] Ibid, s. 23 resp. 26.
[102] Ibid, s. 26–27.

gäller Palmqvists bok är att han *beskriver* denna algebra, men i sin bok inte gör något försök att förmedla konsten att behärska den.

Ekvationer och deras hyfsande

Tredje avdelningen av den första delen i Palmqvists algebra handlar om ekvationer och deras hyfsande.[103] Merparten av innehållet i detta avsnitt kom senare, inom skolmatematiken, att kallas *ekvationslära*. Liksom Palmqvist kom man att skilja mellan å ena sidan *algebra*, konsten att manipulera bokstavsuttryck, och å andra sidan *ekvationslära*, vilken därmed kunde betraktas som algebrans tillämpning.

Palmqvist beskriver i sitt avsnitt om hyfsning av ekvationer en mängd regler, baserade på den föregående algebran, för hur ekvationer (bestående av mer eller mindre komplicerade kombinationer av potens- och rotuttryck) kan transformeras så att, enkelt uttryckt, den variabel vars värde man söker hamnar ensam på en sida av likhetstecknet. Paragraf 56 är typisk för dessa regler:

> Om någondera termen uti en æquation består af en irrationäl quantitet, och uti den samma innebegripes æquationens rot, då böra alla de öfriga termerne af den æquationens del kastas öfver åt andra sidan, så at den irrationäla quantiteten kommer at stå ensam på en sida. (§. 51.); Sedan uphögas bägge delarne til en dignitet, hvars exponent är jämlik med den i rotemärket stående quantiteten; då en ny æquation framkomer.[104]

Utan att fördjupa mig i detaljer: Palmqvist beskriver vad man skall göra då man möter en viss typ av ekvation. Resultatet av de manipulationer som beskrivs är en ny ekvation. Denna kan sedan (förhoppningsvis) behandlas med hjälp av andra regler, tills dess att ekvationen har fått en lämplig form.

Liksom avdelningen om bokstavsräkningen konstituerar avdelningen om ekvationers hyfsande en sorts konst baserad på ett system av regler. För att knyta an till räknelärorna kan påpekas att denna konst även innefattar tabeller: Palmqvist skriver att ”När quantiteten, som skal borttagas, är uphögd til någon hög dignitet, fodras ibland en lång och vidlyftig räkning, hvilket til at hielpa, vil man här nedan föresätta formulairer, hvarefter en quantitet kan exstermineras”, varefter följer fyra vad man nu skulle kalla ”typekvationer” – rubricerade som ”Regler”.[105]

Om ekvationers bruk och nytta för att lösa aritmetiska problem

Palmqvists avdelningar om algebra respektive ekvationer leder fram till den fjärde och avslutande avdelningen i den första delen av hans Algebra. Denna handlar om ”æquationers bruk och nytta vid problemers uplösande och i synnerhet arithmetiske”. Palmqvist skriver att den begynnare som lärt sig ekvationers hyfsande nu skall få ”njuta frukten av en slik färdighet”. Det enda som nu återstår att lära sig är att ”bringa föresatta frågor eller problemer til

[103] Ibid, s. 44.
[104] Ibid, s. 50.
[105] Ibid, s. 64.

æquationer", för när så väl är gjort, så "koma de här åfvan anförde reglor til motta".[106]

Detta skulle emellertid visa sig lättare sagt än gjort. I själva verket utgör detta avsnitt hos Palmqvist en tydlig illustration av den relation mellan algebra och aritmetik som sedan kom att bli typisk för skolmatematiken. Palmqvist visar nämligen inte alls hur algebra kan användas för att, som räknekonsten, besvara frågor som uppkommer i det praktiska borgerliga livet. Istället visar han hur en sorts pseudorealistiska frågor, involverandes fragment av detta praktiska liv, kan användas för att konstruera problem som illustrerar algebrans användbarhet.[107] Följande exempel är typiska för Palmqvists framställning:

> En köpman börjar til at handla med et vist capital på det sättet, at han vi hvart års början aflägger 100 D:r til förtäring, men det öfriga ökar han årligen med en half-part; Efter 2:ne års förlopp finnes han dubbelt rikare än då han började handla. Nu frågas huru stort hans första capital var.
>
> Uti en armee finnas 3:ne folkskola, Ängländare, Holländare och Tyskar. De bägge första slagen utgöra 9 000 man, de bägge yttersta 10 000, och de bägge sista 13 000. Nu frågar huru många man äro af hvardera slaget, och huru stor hela armeen är?
>
> 400 D:r skola delas ut emellan 4. personer, af hvilka den 2:a skal ha 50 mer än den 1:a; den 3:die 60 mer än den 2:a; och den 4:de 70 mer än den 3:die. Nu frågas huru mycket hvardera får?
>
> 4 Personer hafva upgräfvit 41 000 famnar jord; nu frågas huru mycket hvardera gräfvit, när den 2:a gräfvit 4 dubbelt emot den 1:a; den 3:die 3 gånger så mycket som den 2:a; och den 4:de dubbelt emot den 3:die.
>
> 3:ne karlar A, B, och C skola upgräfva 900 cub:famnar jord. a gräfver 1 famn på 3 timar, B 3 f:nr på 8 t:mr; och C 5 f:nr på 12 t:mr. Nu frågas huru lång tid dessa karlar behöfva at conjunctim upgräfva åfvannämde 900 f:nr
>
> Ifrån en dam gå 2:ne vattuledningar, som föra vattnet af, den ena bortförer 200 tunnor i 3 timar; den andra 700 tunnor i 5 t:mr: men uti samma dam faller genom en annan vattuledning 300 tunnor i 2 t:mr. Nu frågar huru snart dammen blir aldeles uttappad, när han sättes kunna hålla 10 000 tunnor vatten?[108]

---

[106] Ibid, s. 67.

[107] Här är kanske viktigt att påpeka att intet därmed är sagt om algebrans plats i andra sammanhang, t.ex. som en del av ingenjörskonsten, den vetenskapliga matematiken och naturvetenskapen. Vad jag talar om här är algebrans relation till räknekonsten.

[108] Palmqvist, *Inledning til algebra (I–II)*, s. 72, 76, 78, 79 och 87.

Det svåra i dessa problem, liksom den förmåga som krävs för att lösa dem, är uppenbarligen en helt annan än den som står i räknelärornas fokus. Palmqvists tal är genomgående jämna, och framför allt är de aldrig uttryckta i kombinationer av olika sorter. Här behövs ingen *Praxis Italica.* Och själva frågorna är sådana som uppenbarligen aldrig uppkommer i det praktiska livet. De är konstruerade för att leda till just den typ av ekvationer som Palmqvists föregående algebra och ekvationslära kan användas för att lösa.

Till Palmqvists försvar kan sägas att han flera gånger poängterar att det i många av de problem han behandlar kan tyckas onödigt att använda algebra. Samtidigt argumenterar han dock för algebrans användbarhet med hänvisning till dess generalitet; att man, då man väl bemödat sig med att algebraiskt finna lösningen till ett problem, då på köpet får en ”regel” med vars hjälp andra liknande problem enkelt kan lösas. Palmqvist presenterar en rad tillämpningar ”i princip”, han visar att algebran kan användas för att manipulera ”verkliga” kvantiteter, men han behandlar inga verkliga problem. Han upprättar, på ett liknande sätt som Celsius, vad som skall *framstå* som en länk mellan matematiken och den praktik räknekonsten kretsar kring, men – vilket givetvis är en huvudpoäng i mitt teoretiska ramverk – länken når inte fram: länken befinner sig på bildens nivå och det är som bild den får sociala effekter.

Palmqvists *Underwisning i Räknekonsten* (1763)

Det tycks inte ha dröjt särskilt länge från det att Celsius aritmetik kommit ut och börjat användas i undervisningen vid läroverken, tills dess att man upptäckte att den hade tydliga begränsningar i egenskap av hjälpmedel för att lära eleverna att räkna. Detta framgår av förordet till Fredric Palmqvists *Underwisning i räkne-konsten* från 1763. Palmqvist skriver att Celsius *Arithmetica* ”oförnekligen [är] ett mästarstycke och ganska tjenlig för dem, som antingen tänka at öfva sig i Mathematiken, eller som åtminstone icke förfäras, då de finna storheter och deras egenskaper utmärkta med bokstäfver”, men att de som tagit sig igenom Celsius bok ”sedermera varit underkastade ett nytt arbete”, nämligen ”att lära sig huru de få och allmänna reglorne skola nyttjas och lämpas til de otaliga händelser, hvilka dageligen förefalla uti det allmänna lefwernet”. Agrelius *Institutiones Arithemtica* har inte detta problem. Palmqvist torde emellertid inte vara den enda som anse, skriver han, att reglerna i denna bok,

> fordra 1:o någon uttydning, innan de kunna begripas. 2:o Någon enklare och ordenteligare indelning, innan de kunna fattas och behållas och 3:o flera och starkare bewis, innan de kunna hållas för säkra af dem, som fått den owanan, at ej tro någon sats utan skäl och bewis, i den afsigt, at icke öfwerlasta minnet med en hop owissa satser, hwilka, ehuru sanna de äro, likwäl kunna lättare förloras, än återfinnas.[109]

[109] Fredric Palmqvist, *Underwisning i Räkne-Konsten gifwen af Fredric Palmqvist, Ledamot af Kong.Wetenskaps-Adaemien*, Stockholm, 1763 [1750], företal.

De tidigare böckerna är, skriver Palmqvist, antingen ”alt för kårta, eller alt för widlyftiga”. Här framträder explicit ganska exakt den skillnad mellan räknekonst och matematik som jag vill påvisa. Palmqvist talar om ”otaliga händelser” – vilka ”förefalla uti det allmänna lefwernet”. I räknelärornas framställningar är dessa åtskilda och beskrivs med var sina recept. Matematiken, å andra sidan, innehåller ”allmänna reglor”, vars karaktäristiska drag är algebran, och det krävs arbete för att så att säga översätta dessa reglor till det allmänna livets händelser. Även Palmqvists tredje punkt i citatet ovan visar på skillnaden mellan räknekonsten och matematiken. I räknekonsten presenteras reglerna utan bevis. Av två anledningar ser Palmqvist detta som en brist. För det första i förhållande till, som det verkar, en slags förväntan att böcker med matematiska anspråk skulle ha samma struktur som Euklides *Elementa*, med satser och bevis. För det andra på grund av att regler presenterade utan bevis skulle ta minnet i anspråk mer än regler som bevisas. Argumentet är här det sedan ofta återkommande, att regler som bevisas kan ”återfinnas”.[110]

Palmqvist skriver att han på grund av dessa skäl valt en ”medelväg”. I fråga om bevis har han följt ”Prof. Celsii method”, men när det gäller att ”wisa begynnare, huru de skola finna sig och bruka de allmänna reglorne wid enskilta händelser, då har jag nyttjat Agrelii arbete”. Det framgår av Palmqvists förord att han nu (vid dryga 40 års ålder) fått en del erfarenhet av undervisning. Med denna som utgångspunkt vädjar han till dem som skall använda boken att inte tvivla på de olika händelser som de allmänna reglerna här delats in i. ”Denna påminnelsen”, skriver han, ”har jag funnit mig föranlåten at göra, efter jag af min lilla ärfarenhet funnit de fläste begynnare hindras af denna onödiga twifwelaktigheten”. Palmqvist presenterar sin bok som en räknelära, och att den är en räknelära framgår även av att den är tryckt i frakturstil (Celsius *Arithmetik* och Palmqvists *Algebra* är tryckta i antikva). På en punkt går han emellertid utöver de traditionella räknelärornas innehåll, nämligen då det gäller logaritmer. Sist i förordet skriver han att han inte kan:

> annat än hålla denna Räkningen i högt wärde, emedan man med dess tillhjelp, kan likasom med lek swara på sådana Arithmetiska frågor, för whilkas skul man eljest woere mycket hufwudbry underkastad.[111]

Det Palmqvist skriver om logaritmräkning är intressant av flera anledningar. För det första på grund av att logaritmer hör till de moment vilka, som vi skall se, kom att uteslutas från skolmatematikens matematiska stoff. Särskilt påtagligt är detta i förhållande till problemet att dra roten och kubikroten ur siffertal. Att göra detta med hjälp av logaritmer är mycket enkelt, medan det med andra, äldre metoder, är tämligen omständligt. För det andra på grund av den typ av uppgifter som elever kom att få lösa med hjälp av logaritmer när

[110] Denna distinktion, mellan att minnas en regel och att förstå ett bevis, kom att spela en framträdande roll i den skolmatematiska diskussionen under andra halvan av 1800-talet, se nedan s. 317.
[111] Palmqvist, *Underwisning i Räkne-Konsten*, företal.

de väl tog plats inom skolmatematikens ramar mot slutet av 1800-talet. Det handlade då inte alls om att använda logaritmerna som ett redskap för att enkelt lösa annars svåra problem, utan om att, som en del av algebran, manipulera uttryck i vilka logaritm- och exponentuttryck ingick. Min poäng är att det förhållande till matematiken som *verktyg* vilket Palmqvist ger uttryck för i sitt företal, i stor utsträckning kom att gå förlorat under det att matematiken underordnades skolmatematiken.

Palmqvists *Underwisning i Räkne-Konsten* har i stor utsträckning samma struktur som Agrelius *Institutiones Arithmeticæ*. Palmqvists bok är indelad i 23 stycken. Det första handlar om ”Tal i Gemen”, och motsvarar räknelärornas numeratio. Sedan följer de fyra räknesätten i hela tal, ”Bråk i gemen”, de fyra räknesätten i bråk samt ett stycke ”Om decimalbråksräkningen”. Så långt är Palmqvist Agrelius trogen vad gäller strukturen (bortsett från avsnittet om decimalbråk). Samtidigt är inflytandet från Celsius tydligt vad gäller innehållet. Palmqvist använder tecknen för plus, minus och gånger, han skriver, om än kortfattat, om hur tal ”mäter” varandra och diskuterar liksom Celsius till exempel det romerska talsystemet. Språket är emellertid enkelt och den löpande texten tar merparten av utrymmet. Det är tydligt att Palmqvist, som han skriver i sitt förord, efter bästa förmåga försöker förmedla det han har att säga utan att begränsa sig av krav på att vara stringent och kortfattad. Han har frångått Celsius klassificering av texten i till exempel propositioner och demonstrationer.

Palmqvists redogörelse för bråk är dock huvudsakligen baserad på Celsius framställning. Han beskriver bråk i termer av proportioner och definierar i linje med femte boken av Euklides *Elementa* likhet mellan två proportioner som en *analogi*. Detta avsnitt är ett av få ställen där Palmqvist gör omfattande bruk av algebra, och den anspråkslösa rubriken till trots kan det sägas innehålla en introduktion till *Regula de Tri* baserad på vad man inom skolmatematiken senare skulle kalla *proportionslära*.[112]

Från och med Palmqvists redogörelse för ”Regula de Tri i gemen” är skillnaderna mellan Palmqvists och Agrelius framställningar större. Det sätt på vilket den avviker från Agrelius bok – vad Palmqvist valt att utesluta liksom vad han valt att lyfta fram – säger mycket om vad han så att säga gjort med räknekonsten. Förändringar utgör ett betydelsefullt steg i riktning mot

[112] Proportionslärans väsen och betydelse var en relativt central fråga i den skolmatematiska diskursen under andra halvan av 1800-talet. En rad läroböcker med proportionslära som huvudsakligt tema publicerades mellan 1850 och mitten av 1900-talet (innan den nya matematiken). Ett tidigt exempel är Anders Wiemer, *Allmän proportionslära*, Stockholm, 1850. Ett sent exempel är Harald Yngve Larson & Hans Seger, *Proportionslära, likformighetslära och planimetri*, Stockholm, 1961. Proportionsläran var ett av de skolmatematiska fenomen som träffades av den kritiska diskussionen kring sekelskiftet 1900 (och som typiskt nog levde vidare kritiken till trots). Följande kan anföras som exempel: ”[proportionsläran] är den svenska skolmatematikens allra heligaste [...] I intet annat land har i skolan så mycken tid och så mycket arbete förspillts på denna, ingenstädes ha så många kvasivetenskapliga framställningar däraf fabricerats” (Laurin, ”Om matematiken och fysiken i kommittébetänkandet”, s. 256). Eller: ”[proportionsläran är] ett slags kvasivetenskaplig lära om allmäna storheter m.m. och som hvarken pojkarna eller lärarna själfva förstå, att döma af de otaliga felaktiga läroböcker som finnas utgifna i proportionslära.” (Petrini, ”Matematiken i skolan”, s. 199).

skolmatematiken. Jag skall i det följande använda nedanstående tabell över innehållet i Agrelius *Institutiones Arithmeticæ* respektive Palmqvists *Underwisning i Räkne-Konsten* som utgångspunkt.

Tabell 2. Innehållet *i* Agrelius *Institutiones Arithmeticæ* respektive Palmqvists *Underwisning i Räkne-Konsten* från och med deras introduktion till *Regula de Tri.*

Agrelius	sidor	**Palmqvist**	sidor
Om Regula de Tri i hela Tal	44	Om Regula de Tri i gemen	6
Om Regula de Tri i Bråk	20	Om Regula de Tri simplex	23
Om Praxi Italica	55		
Om progressionibus	13		
Om Regula de Tri Conversa	8		
Om Regula Dupla	6	Om Regula de Tri Composita	19
Om Interesse	15	Om Interesse Räkning	31
Om Rebatto	7	Om Rabatt Räkning	5
Om Thara	7	Om Thara Räkning	5
Om Fusti	4		
Om Wäxel och Cassa-Räkning	7		
Om Stick och Byte-Räkning	12	Om Baratt	8
Om Factorie-Räkning	8		
Om Winst och Förlis	19		
Om Regula Societatis	22	Om Regula Societatis	21
Om Skepps-Parter	6		
Om Arf och Delnings-Räkning	21		
Om Regula Alligationis	15	Om Regula Alligationis	13
Om Regula Falsi	24	Om Regula Falsi	12
Om Regula Cesis eller Virginum	7	Om Regula Cæsi	10
Några lustige frågor	9		
Om Resolveringen [dvs. tabell över sorter]	2		
Kårt Underrättelse om Italienska Bokhålleriet	34		
Några Wäxel-Räkningar	12		
Memorial och Journal öfwer Proper-Handel	15		
		Om Logaritmer	33
totalt:	368 s.	totalt:	176 s.

En första betydelsefull skillnad mellan Palmqvists och Agrelius framställningar rör *Praxis Italica*. Detta sätt att praktiskt hantera sorter ägnar Agrelius 55 sidor och det intar en central position även hos Roloff Andersson. Palmqvist presenterar det snarast som en genväg som kräver att man direkt "ser" hur stor del ett visst antal av en mindre sort är av en större. Min hypotes är att denna förändring i framställningen av räknekonsten är signifikativ för övergången från räknelärorna som beskrivning av praktiskt räknande och därmed potentiellt en utgångspunkt för att kunna behärska denna konst, till vad man kanske här ganska träffande kan kalla en "skrivbordsprodukt", en beskrivning baserad på litterära förlagor opåverkade av författarens erfarenhet av de praktiska frågor som räknekonsten syftade till att besvara. Detta är i flera avseenden explicit hos Palmqvist: han skriver med utgångspunkt från Celsius och Agrelius, och framställningen är formad med utgångspunkt från hans erfarenhet av *undervisning*, inte från praktiskt deltagande i "det borgerliga livet".

En andra betydelsefull skillnad ligger i Palmqvists principiella särskiljande av vad som senare kom att kallas "enkel" respektive "sammansatt" *Regula de Tri*. Han utgår här från den underliggande matematiska principen, i motsats till räknelärorna, vars karaktäristiska drag är att räknesätten tvärtom särskiljs med utgångspunkt från det praktiska räknandet. Det är symptomatiskt att Palmqvists första exempel på "Regula de tri Composita" lyder: "Det kunde wara frågadt, när 2 rännor på 3 timar afföra 54 oxhufwuden watten, huru många oxhuf. kunna 5 rännor afföra på 7 timar, när hastigheten af watnet blifwer oförändrad?", det vill säga ett typiskt orealistiskt och för räknekonsten främmande problem, som hämtat hur hans algebrabok.[113] Samma sak kan sägas om de flesta exempel Palmqvist ger i detta avsnitt. De framstår som illustrationer av räknekonsten snarare än exempel på praktiskt räknande. Än mer uppenbart blir detta då Palmqvist går vidare till vad som i räknelärornas terminologi väl skulle kallas "Regula tripla". Palmqvist skriver: "När 5 arbetare göra 15 famnar på 8 dagar, då de arbeta 9 timar om dagen, huru många famnar kunna 12 arbetare göra på 6 dagar, när de arbeta 11 timar hwar dag?"[114] Exemplet talar för sig själv.

Avslutningsvis ger Palmqvist några exempel som möjligen kunde förekomma i praktiken, men min hypotes är att hans framställning inte heller i dessa fall gav något större bidrag till ett behärskande av de praktiker inom vilka räknande han beskriver ingick. Detta på grund av att Palmqvists framställning innehåller så lite information om räknandets omständigheter, till exempel rörande sorter. Palmqvists *Underwisning i Räkne-Konsten* kan i detta avseende kontrasteras mot Johan Bergmarcks *Svensk Räknebok*.[115] Denna bok

[113] Palmqvist, *Underwisning i Räkne-Konsten*, s. 165.
[114] Ibid, s. 172.
[115] Bergmarck, *Svensk räkne-bok*.

är strukturerad som ett uppslagsverk, tydligen med syfte att fungera som referens i det borgerliga livet. I jämförelse med denna mycket informationstäta bok blir det uppenbart att Palmqvists exempel hör till skolans värld, snarare än till den föränderliga och mångfacetterade verkligheten utanför skolan.

Ett sätt att beskriva skillnaden mellan Agrelius och Palmqvists framställningar av *Regula de Tri* är genom konstaterandet att Palmqvists framställning är mer schematisk. Palmqvist har med utgångspunkt från matematikens principer begränsat antalet räknesätt, vilket gör hans struktur logisk och överskådlig. I själva framställningen har han rensat bort en stor del av det ”icke-matematiska” material som fyller Agrelius bok, samtidigt som själva exemplen blivit vad man skulle kunna kalla ”typtal”: de utgör illustrationer av de idéer som utgör kärnan i de respektive räknesätten – ofta på bekostnad av själva frågornas rimlighet, till exempel i följande exempel:

> Ex. 3. Tre personer lägga penningar tillsammans til at dermed handla och winna 600 Daler. Efter sluten handel tager hwar och en både capital och winst ut, nämligen A 850, B 150 och C 1000. Nu frågas huru mycket hwar och en hafwer insatt i Capital och huru mycket han dermed wunnit?[116]

Två saker är typiska här. För det första att såväl frågan som svaret endast involverar *en* sort, och att alla komplikationer som har med sorter att göra därmed kan lämpas obeaktade av Palmqvist. För det andra att frågan är av gåt-typ – i praktiken vet man naturligtvis hur mycket man satt in. Palmqvist väljer att bortse från detta för att, skulle man kunna säga, belysa själva principen på ett mer varierat sätt än som annars varit möjligt.

Matematiken och tänkandet

Som vi såg inledningsvis i det här kapitlet, hade den vetenskapliga matematiken då den tog plats i Sverige redan under ett drygt århundrade laddats med en mängd betydelser. Väsentligt vad gäller dess roll i undervisningssammanhang är att den konstituerats som något som finns, så att säga svävandes ovanför de sociala sammanhang inom vilka den användes eller mer allmänt antogs utgöra en verkande kraft.

Detta satte agendan för matematikens roll som undervisningsämne. Matematiken kom från och med nu att fungera som det inskjutna mellanled jag talade om i avhandlingens första del (s. 14 och 14). Istället för att syfta direkt mot bemästrande av en viss uppsättning praktiska sammanhang, tog undervisningen sikte på det universella objekt som matematiken kommit att

[116] Palmqvist, *Underwisning i Räkne-Konsten*, s. 234.

utgöra, för att *genom* matematiken bibringa adepterna en förmåga till praktiskt bemästrande.

Denna skillnad hänger samman med ståndpunkten att handling är, eller bör vara, förankrad i tänkande och mer specifikt rationellt tänkande. Undervisning i matematik syftade till att forma förmågan att tänka. Fokus försköts därmed från det praktiska handlandet till ett tänkande som antogs föregå detta handlande. Skolmatematiken har från första början sagt sig syfta mot praktiskt nyttiga kunskaper, men endast delvis, och den har alltid varit benhårt övertygad om att detta mål bara kan nås via matematiken och tänkandet.

Denna förskjutning hänger i sin tur samman med den omvända relation mellan människan och matematiken som är karaktäristisk för skolmatematiken. Räknekonsten utgör relativt oproblematiskt något man lär sig och som sedan kan användas för att besvara en viss typ av frågor. Ser vi räknekonsten som tillämpad matematik utgör matematiken i detta fall ett verktyg i människans tjänst. Vetenskaplig matematik betraktades i allmänhet inte som ett sådant verktyg. Syftet med matematiska studier var tvärtom att låta sig påverkas av en matematik som antogs vara större än och föregå människan.

Det är i detta ljus man skall förstå den tendens till minskande realism som utmärker Celsius och Palmqvists räkneböcker. De tog inte längre praktiken för given som utgångspunkt. De såg den tvärtom som något som kunde och borde förbättras, med hjälp av den universella matematiken. Räkneuppgifterna syftade därför inte så mycket till en inskolning i praktiken sådan den faktiskt råkade vara, som till en inskolning i ett matematiskt sätt att se och förstå denna praktik som skulle göra det möjligt att förändra den i riktning mot ett matematiskt ideal.

Matematiken är sin egen måttstock

Räknelärorna beskrev, som sagt ovan, med stor precision räknande så som det i praktiken gick till.[117] Det var med utgångspunkt från praktiken som det avgjordes vem som var en skicklig räknemästare. Celsius och Palmqvist betraktade istället praktiken från avstånd. För dem framstod det praktiska räknandet snarast som en bild, möjlig att förändra och förbättra. Undervisningens mål försköts därmed från det kompetenta deltagandet i praktiken, till det kompetenta betraktandet.

Övning på matematik fick därmed en ny innebörd. Snarare än att vara en väg mot ett visst praktiskt bemästrande, blir det en väg mot ett sätt att se och tänka, men – och detta är min poäng – detta sätt att se och tänka kunde inte bedömas och värderas från någon punkt utanför själva de matematiska

[117] Eller hade gått till vid någon given tidpunkt, eller skulle kunna ha gått till – det väsentliga är här framställningens detaljerade och realistiska form.

studierna. Det rätta blev därmed, på ett helt annat sätt än då det var fråga om räknekonst, bestämt reflexivt, genom matematiken. Matematiska studier, av till exempel Euklides *Elementa*, skulle leda till att man lärde sig tänka rätt. Men vad är tecknet på att man kan tänka rätt? Givetvis att man behärskar Euklides *Elementa*. Matematiken blev därmed sin egen måttstock.

I fråga om räknekonsten var det oväsentligt hur man lärde sig räkna, och hur man i praktiken räknade; vilka tabeller man memorerat, vilka genvägar man kände till, och så vidare. Räknandets resultat koncentrerades i själva svaret, vilket bedömdes från en position utanför räknekonsten. Annorlunda blev det givetvis inom den typ av matematiska studier som Strömer, Celsius och Palmqvist bidrog till att introducera. Nu hamnade själva övandet i fokus, eftersom det kom att framstå som en rörelse mot bättre tänkande – en rörelse som måste ha rätt riktning och rätt hastighet. Detta övande var intimt sammanvävt med formen på de svar som skulle presteras (jag syftar här i synnerhet på den euklidiska geometrins bevisföring). De matematiska studierna blev därmed en helhet, sammanbunden av matematiken.

Väsentligt i sammanhanget är att den kompetens som Celsius, Strömer och Palmqvist hade och behövde för att kunna använda och skriva om matematik såväl förvärvats som uttryckts inom en akademisk värld. Deras böcker var bokstavligt talat skrivbordsprodukter. Sannolikt gällde detta även många räkneläror, men i fråga om räknekonsten föreställer jag mig åtminstone att dess behärskande också krävde praktiskt erfarenhet. Matematiken upprättar tvärtom en tydlig relation mellan å ena sidan producenter och å andra sidan konsumenter av matematisk kunskap. Och att producera matematisk kunskap kräver ingen erfarenhet av praktiker utanför skola och akademi. Enligt de egenskaper man tillskrev matematiken var den så att säga nyttig i sig själv, till sin natur. Även om böckerna handlade om matematikens praktiska ”användning” är det tydligt att själva matematiken existerade på ett avstånd från praktiken. Och detta faktum – vilket som jag visat framträder tydligt i Celsius och Palmqvists böcker – motsvarades av ett socialt avstånd: Celsius och Palmqvist deltog inte i den typ av praktiker som räknelärorna beskriver.

Den nya typ av orealistiska exempel och övningsuppgifter som vid denna tid tog plats i böckerna utgjorde en aspekt av detta fenomen. De syftade inte till att visa hur man räknar, utan till att illustrera matematikens principer. Räknelärornas exempel illustrerar hur man med räknande kan besvara olika frågor som man möter i det ”borgerliga livet”; de är strukturerade med utgångspunkt från det sammanhang inom vilka frågorna uppkommer och de handlar därmed i stor utsträckning om något annat än räknande. Den nya typen av exempel handlar tvärtom väsentligen om matematik. De innehåller samma termer som räknelärorna, men dessa termer är här strukturerade med utgångspunkt från matematiken. Man kan säga att dessa exempel illustrerar matematikens tolkningsföreträde inom de områden från vilka exemplens terminologi hämtas. Exemplen uttrycker matematikens bild av verkligheten.

Viktigt att komma ihåg är emellertid att denna bild i det svenska 1700-talet hade en högst begränsad räckvidd. Det var ännu få individer som ”såg” den fysiska och sociala verkligheten som förankrad i matematiska principer. Matematiska kunskaper utgjorde ingen allmänt gångbar form av symboliskt kapital. Ett viktigt steg mot en förändring av detta togs kring sekelskiftet 1800. Då, närmare bestämt 1792, bildades kungliga krigsakademin på Karlberg utanför Stockholm.[118] Inom denna institution spelade undervisning i matematik en central roll. Denna matematikens nya roll fick en rad konsekvenser för de böcker i vilka matematiken presenterades, vilka nu allt mer kom att bli renodlade läroböcker anpassade för en viss undervisningspraktik. Om detta handlar nästa kapitel.

[118] Om detta kan man läsa i Esbjörn Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning: Kungl. krigsakademien mellan åren 1792 och 1866*, Uppsala, 2005.

7. Skolan

I det förra kapitlet berättade jag om hur en ny matematisk diskurs tog plats i Sverige under första halvan av 1700-talet. Dess karaktäristiska drag var en argumentation för vetenskapens och matematikens mångfaldiga nytta. Denna diskurs var en del av en samhällsomvandling där delvis nya sociala kategorier, genom matematiken och naturvetenskaperna, reste anspråk på rätten att säga sanningen om samhället och naturen. Argumenten för matematik hade en kritisk udd riktad mot de då dominerande universitetsämnena klassiska språk och logik. Mer nytta, menade matematikens talesmän, skulle svenska ungdomar ha av att studera matematik. Diskursen kan ses som ett försök att förknippa en specifik matematisk praktik (studier av Euklides *Elementa*, aritmetik och algebra) med vad som i tidens svenska samhälle ansågs värdefullt (praktisk nytta, krigskonst, rationellt tänkande, sedlighet). Med Bourdieu kan man säga att diskursen utgjorde ett försök att etablera kunskaper i matematik som en form av symboliskt kapital.

Retoriken till trots måste man vara medveten om att denna form av symboliskt kapital under 1700-talet hade tämligen begränsad räckvidd. Som jag påpekat angående den vetenskapliga revolutionen omfattade förändringarna i synen på vetenskapen under 1600-talet – och i stor utsträckning även under 1700-talet – ganska få individer. Det stora flertalet berördes knappast. Inte heller resulterade den nya diskursen i någon genomgripande förändring av universitetsvärldens struktur. Emellertid hade en process påbörjats genom vilken inte bara naturvetenskaperna helt skulle matematiseras – under 1800- och 1900-talen kom kunskaper i matematik allt mer att betraktas som en förutsättning för deltagande i samhällslivet över huvud. Kunskaper i matematik övergick successivt från att utgöra en *specifik* form av symboliskt kapital, knuten till enskilda samhällssfärer, till att utgöra en allmän form av symboliskt kapital knuten till staten och dess offentliga institutioner.

Det som hände var emellertid inte att matematiken gradvis tog allt större plats i den offentliga skolan. En viktig roll i rörelsen mot matematikens växande betydelse spelade istället ett antal institutioner inom vilka matematiken redan kring sekelskiftet 1800 kommit att spela huvudrollen. När matematiken senare blev ett mer centralt ämne i den offentliga skolan, lånades både form och innehåll från dessa mer specialiserade föregångare.

Syftet med det här kapitlet är att beskriva detta skede i skolmatematikens historia, då matematiken i en rad specialiserade sammanhang blir ett skolämne som i många avseenden liknar dagens skolmatematik. Utan ambition att ge en heltäckande bild kommer jag här att exemplifiera detta skede med hänvisning till: *Tripos* i Cambridge, en examensordning fokuserad på matematik vilken tog form i Cambridge under andra halvan av 1700-talet och sedan spelade en central roll inom det Engelska utbildningssystemet fram till början av 1900-talet;[1] *den franska ingenjörsutbildningen* vilken även den tog form under andra halvan av 1700-talet;[2] samt *Kungliga krigsakademin på Karlberg* i Sverige som bildades 1792 och vars verksamhet beskrivs i uppsalahistorikern Esbjörn Larssons avhandling *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning: Kungl. krigsakademien mellan åren 1792 och 1866.*[3]

Kapitlet har tre delar. Först försöker jag identifiera några gemensamma nämnare hos de tre institutionella sammanhang jag valt som exempel. Sedan beskriver jag fyra svenska läroböcker i aritmetik och algebra vilka användes vid Kungliga krigsakademin på Karlberg, och vars utformning kan förstås med utgångspunkt från det sammanhang inom vilket de användes. Slutligen ger jag några reflektioner kring betydelsen av detta skede i skolmatematikens historia. Tesen jag argumenterar för är att den form de matematiska studierna fick inom dessa institutioner, i stor utsträckning kan förklaras med hänvisning till matematikens roll som sorteringsinstrument.

De matematiska studiernas nya form

Från och med slutet av 1700-talet kom de matematiska studier som bedrevs på olika håll i Europa att förändras till följd av att man började införa skriftliga prestationsmätningar. Historikern John Gascoigne skriver angående *Tripos* i Cambridge att rörelsen från de tidigare muntliga disputationerna, till den skriftliga examensformen, skedde ”in a fit of absent-mindedness”:

---

[1] Min redogörelse för *Tripos* är baserad på följande litteratur: Richards, *Mathematical visions: the pursuit of geometry in victorian England*; Richards, ”God, truth, and mathematics”; John Gascoigne, ”Mathematics and meritocracy: the emergence of the Cambridge mathematical tripos”, *Social Studies of Science*, vol. 14, nr 4, 1984; Gascoigne, ”From Bentley to the Victorians”.

[2] Här är min framställning baserad på Alder, *Engineering the revolution*; Ken Alder, ”French engineers become professionals; or, how meritocracy made knowledge objective” i William Clark, Jan Golinski & Simon Schaffer (eds.), *The sciences in enlightened Europe*, Chicago & London, 1999; David Bien, ”Military education in 18th-century France: technical and non-technical determinants” i Monte and L. Paszek. Wright (ed.), *Science, technology and warfare: third military history symposium*, Washington, D.C, 1969.

[3] Kungliga Krigsakademin på Karlberg var en kadettskola där det utbildades officerare för hela den svenska krigsmakten. Verksamheten startade 1792 och bedrevs sedan på liknande sätt fram till 1860-talet, då formerna för svensk militär utbildning genomgick en andra stor transformation. Till krigsakademin antogs ungdomar i de yngre tonåren. På Karlberg fick dessa ägna sig åt både teoretiska studier och praktiska övningar (Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, s. 17 och 237).

> there was very little in the way of formal enactment of a new educational order as the university groped its way towards the discovery that the best way of ranking students was to subject them all to uniform written questions rather than to evaluate them by their performance in the traditional set-piece disputations.[4]

Gascoigne använder ordet ”upptäckt”, och det verkar som att det vid denna tid var fråga om något helt nytt. Tryckta problemblad förekom i Cambridge första gången 1791; första gången det gavs poäng på enskilda frågor var 1792; examensproven i sin helhet började tryckas 1827.[5] Historikern Ken Alder beskriver en ungefär samtidig process i Frankrike – där i direkt anknytning till den militära sfären.[6] Även vid krigsakademin på Karlberg förekom skriftliga prestationsmätningar i matematik.[7]

De skriftliga prestationsmätningarna ingick som en del av vad Alder, med hänvisning till franska förhållanden, kallar *meritokratiska system*. En meritokrati är, skriver han, ett system där var man hamnar på sin rätta plats.[8] Han tillägger dock att det viktiga snarare är att systemet framstår som rättvist i denna bemärkelse, än att det i praktiken lever upp till sina ideal.[9] Jag skall här förstå meritokrati i denna svagare bemärkelse, som ett system som framställer sig själv som meritokratiskt. Givet denna definition kan man säga att det meritokratiska systemet föddes under andra halvan av 1700-talet, att detta skedde ungefär samtidigt i Frankrike och England, och att Kungliga krigsakademin på Karlberg utgjorde en något senare och troligtvis långt mindre renodlad variation av samma meritokratiska tema.

De skriftliga prestationsmätningarna kom att spela en central roll i dessa system. Man kan se dem som en sorts fästningsmekanismer genom vilka matematikens högre värden knöts till enskilda individer. Karaktäristiskt nog förknippades matematiken med tämligen olika värden i England respektive Frankrike. *Tripos* i Cambridge var slutpunkten på vad som kallades ”liberal education”. Matematiken förknippades där framför allt med en allmän intellektuell förmåga. I ett vidare perspektiv förknippades matematiken även, som jag nämnde ovan (s. 14) med människans relation till Gud, och därmed indirekt till kyrkan och de konservativa värden den stod för i England vid denna tid.[10] I Frankrike förknippades matematiken istället med effektivitet

[4] Gascoigne, ”Mathematics and Meritocracy”, s. 548.
[5] Ibid, s. 552.
[6] Alder, *Engineering the revolution*; Alder, ”French Engineers Become Professionals”, s. 101–103.
[7] Denna aspekt av verksamheten står inte i fokus för Larssons undersökning, och han ger därför inga exakta upplysningar om från när och i vilken mån just skriftliga prov förekom. Det råder dock ingen tvekan om att sådana prov förekom kring sekelskiftet 1800 (Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, s. 143).
[8] Alder, ”French Engineers Become Professionals”, s. 95.
[9] Ibid, s. 99.
[10] Gascoigne, ”From Bentley to the Victorians”, s. 248; Richards, *Mathematical visions: the pursuit of geometry in Victorian England*, s. 29.

och explosivitet – utan religiösa övertoner. [11] De strikta examinationerna användes där, på ett tydligare sätt än i England, för att bryta med en traditionell ordning och för att upprätta tydliga gränser runt den militära sfären.

Gemensamt var att prestationsmätningarna kom att framstå som objektiva och exakta mätningar av i vilken mån varje enskild individ motsvarade matematiken, det vill säga, hur mycket matematik(kunnande) hon hade i sig. Därmed kunde de som administrerade dessa examinationer framställa den ordning de upprättade som naturlig och ändamålsenlig. Liksom föreställningarna om matematikens egenskaper, kunde denna sociala ordning tjäna en mångfald olika syften.

Av alla de konsekvenser som följde av de matematiska studiernas nya roll som delar av meritokratiska system, skall jag här fokusera på hur prestationsmätningarna kom att bestämma studiernas form och innehåll. I England ledde de till ett fokus på en typ av geometrisk problemlösning vilken inte kunde motiveras på något annat sätt än med hänvisning till dess tanketränande egenskaper. Den typ av förmåga som uppodlades var inte till någon instrumentell nytta, samtidigt som den saknade värde inom den vetenskapliga matematiken.[12] Även vad gäller franska förhållanden står det klart att även om matematiken motiverades med hänvisning till dess instrumentella nytta inom den militära sfären, var denna nytta i praktiken tämligen obefintlig.[13] Fokus på skriftliga prestationsmätningar kom att sätta ramarna för urvalet av matematiskt stoff, och detta på ett sätt som gick stick i stäv både med den vetenskapliga matematikens värden och det praktiska räknandets behov.

En annan typ av argument, vilka fördes fram i den Franska diskussionen parallellt med de som betonade det matematiska kunnandets instrumentella effektivitet, kan i efterhand ses ligga närmare sanningen. Alder skriver att:

> The intention was to impose a uniformity of habit and thought, instilling a solidarity that was the technicians' equivalent of esprit de corps. Mathematics was particularly well suited for this role because it

[11] Intressant nog innebar detta ett särskilt fokus inom den matematiska vetenskapen – nämligen på analys och analytisk geometri (geometri förenad med algebra), snarare än på euklidisk geometri. Den euklidiska geometrin hade stått i de militära matematiska studiernas centrum i Frankrike under hela första halvan av 1700-talet, men från och med 1760-talet hamnade den i vanrykte och beskrevs som ”ostentatious and useless”. Istället för euklidisk geometri skulle ingenjörerna studera ”the new analytical mixed mathematics”, vilken betraktades som ”open-ended and explosive”. Den blandade matematiken, där man mätte upp parametrar vilka relaterades till varandra med hjälp av matematik för att nå en ”optimal gain”, kunde associeras med ”the dynamic field tactics advocated by reformers, and with the maximizing methods of the new engineering ballistics”. Det var genom sitt behärskande av *denna* matematik som ingenjörerna kom att associeras med ”research, innovation, and a dynamic mode of thought” (Alder, *Engineering the revolution*, s. 73). Stora delar av det matematiska stoff en nutida svensk teknolog får ta sig an under sina studier har sitt ursprung i dessa kursordningar.

[12] Till exempel Gascoigne, ”Mathematics and Meritocracy”, s. 53.

[13] Alder, ”French Engineers Become Professionals”, s. 116; Bien, ”Military education in 18th-century France”, s. 59.

> impressed on students the virtues of uniformity and precision. These were the virtues that made agreement matter.[14]

Vad Alder skriver är att man i Frankrike var påtagligt medveten om att de matematiska studierna ledde till en likriktning av sättet att tänka och värdera och en vana vid att underkasta sig en högre makt. Detta var nämligen precis vad man ville åstadkomma. Den sortering prestationsmätningarna genererade var en sortering med utgångspunkt från i vilken mån lärjungarna gett sig hän åt matematiken. Den som matematiken placerade högst, var därför samtidigt den som mest fullständigt underkastat sig de matematiska studiernas ordning. Den analys av läroböcker i aritmetik och algebra som nu följer, skall förstås mot bakgrund av detta resonemang rörande de matematiska studiernas dubbla funktion av att sortera och generera erkännande av matematikens betydelse.

Läroböcker i aritmetik och algebra

Jag skall här fokusera på fyra läroböcker som användes vid undervisningen på Karlberg kring sekelskiftet 1800: två i aritmetik och två i algebra. De två tidigare författades av prosten Nils Petter Beckmarck och gavs ut 1794 (*Utkast til föreläsningar öfver Algebra*) respektive 1795 (*Arithmetik*). De två senare författades av Olof H. Forssell och utgör, som Forssell uttrycker det, "tillökade och förbättrade" utgåvor.[15] Den första av Forssells böcker som han gav ut i eget namn är *Algebra för Begynnare* från 1801.[16] Hans *Arithmetik för begynnare* kom ut 1818.[17]

En av de saker jag vill visa med min jämförelse av dessa böcker är att undervisningen på Karlberg innebar ett viktigt steg mot att aritmetik och algebra – från att ha varit å ena sidan räknekonst, å den andra en elementär del av vetenskapen – blev *skolämnen*. De anpassades till undervisningen och den roll denna undervisning spelade i ett övergripande institutionellt sammanhang och blev därmed i flera avseenden mer lika varandra än tidigare.

Intressant är att aritmetiken och algebran blev likartade skolämnen från två diametralt motsatta håll: När aritmetiken blev ett skolämne skedde detta genom att olika delar av räknelärornas innehåll skars bort, samtidigt som böckernas disposition förenklades. Algebran blev tvärtom ett skolämne genom att innehållet så att säga vecklades ut och tog form som en allt mer

[14] Alder, "French Engineers Become Professionals", s. 108.
[15] Olof H. Forssell, *Arithmetik för Begynnare. Författad och utgifven af Olof H. Forssell, Professor och Kyrkoherde*, Stockholm, 1818, förord.
[16] Olof H. Forssell, *Algebra för Begynnare. Författad och utgifven af Olof H. Forssell, Lector i Mathem. vid Kongl. Krigs-Academien*, Stockholm, 1801.
[17] Forssell, *Aritmetik för Begynnare.*

självklar följd av moment. När läroböckerna i aritmetik blev allt kortare, blev läroböckerna i algebra längre. Ganska förbluffande är att dessa två trender under 1830-talet så att säga korsade varandra: då publicerades läroböcker i aritmetik som knappast var mer än skelett, samtidigt som algebran hade växt ut till ett ämne fyllt av detaljer. Detta skall jag berätta om i nästa kapitel. Här skall jag nu redogöra för de fyra ovan nämnda böckernas disposition och innehåll.

Beckmarks *Arithmetik* (1795)

Jämför man Beckmarcks *Arithmetik* med de tidigare svenska räknelärorna ser man genast att Beckmark förskjutit fokus mot matematikens praktiska tillämpningar. Vad gäller räknelärorna kan man över huvud taget inte tala om någon tillämpning av matematiken, eftersom de som jag visat ovan inte innehåller någon uppdelning mellan matematik i egenskap av abstrakt teori och det praktiska räknandet. Den matematiska vetenskapens talesmän bröt med denna tradition genom att betona matematikens abstrakta sidor. I Beckmarcks *Arithmetik* kan man se en rörelse tillbaka mot praktiken, men nu – till skillnad från i räknelärorna – med utgångspunkt från matematiken.

Beckmark gör emellertid inte särskilt omfattande bruk av matematisk formalism. Han använder tecknen för de fyra räknesätten, samt x för att beteckna en okänd storhet, men knappast mer. Den tydligaste förskjutningen i förhållande till räknelärorna ligger istället i en rörelse från det borgerliga livets huvudsakligen ekonomiska frågeställningar till teknikens, ingenjörskonstens och naturvetenskapens frågor, rörande lantmäteri och mekanik. Beckmarck beskriver hur dessa nya tillämpningsområden kan hanteras bland annat med hjälp av decimaler och logaritmer – verktyg som spelade en mer underordnad roll i räknelärorna.

Förskjutningens omfattning skall dock inte överdrivas. Beckmarcks *Arithmetik* är i stora drag fortfarande en räknelära. Särskilt gäller detta bokens struktur. Boken inleds traditionsenligt med en förklaring av siffrorna och talsystemet. Sedan följer de fyra räknesätten i hela tal, sorttabeller, räknesätten i sorter (här följer Beckmarck Roloff Andersson, snarare än Agrelius), bråk i allmänhet och de fyra räknesätten i bråk.

Beckmarcks avsnitt om sorter sträcker sig över hela 30 sidor. Här syns att Beckmarcks framställning inte bara skiljer sig från räknelärornas genom att han i större utsträckning behandlar frågor rörande teknik och naturvetenskap. Genom det material han tar upp syns att han även i större utsträckning än räknelärorna knyter an till ett internationellt sammanhang. Han inkluderar en mängd tabeller över utländska myntsorter och mått. Över huvud taget innehåller Beckmarks *Aritmetik* tämligen omfattande tabeller. Detta visar på ett karaktäristiskt drag hos Beckmarcks bok som jag skall återkomma till, nämligen att han utsträcker matematikens räckvidd – dess tillämpbarhet – till domäner som ligger bortom räknelärornas.

Beckmark inleder sitt avsnitt om sorter med konstaterandet att man, innan man går längre i räknekonsten än till de fyra räknesätten bör ”känna, hvad slags storheter där kunna förekomma, huru de mätas, namnen på deras mått och ändtligen dessa måttens fördelningar”.[18] Typiskt är att han därefter börjar med en beskrivning av sorter som ”förekomma *i Naturen*” – något som vore räknelärornas författare främmande (de handlade ju om det ”borgerliga livet”). Han räknar sedan upp:

> *Längder*, *ytors vidd* eller Areer, *Rymder* eller kroppars solida innehåll; *Tyngder* eller vigter, hvarigenom Materiens myckenhet utrönes; *Penningar; Tid; vinklar* eller Lineers lutningar emot hvarandra; *Hastigheter; Tryknings* och *Rörelsekrafter*, och så vidare.[19]

Därefter följer en rad listor med diverse sorter: Längders mått, Areal Mått, Rymders Mått, mått för torra varor och våra varor, Vigter, Victualie Vigt, Stapelstads vigt, Upstads vigten, Bergs vigten, Tackjärns vigten, Medicinal vigten, Vigten vid Konl. Myntet och för oarbetadt Guld och Silfver, Prober vigten, Penningeräkning, Stycketalsräkning, Pappers räkning, Tidsräkning, och Romerska ziffror (!). Därefter presenterar Beckmarck åtta tabeller som visar hur svenska mått förhåller sig till diverse utländska mått. För att ge en föreställning av tabellernas omfattning återges den fjärde av dessa nedan:

[18] Nils Petter Beckmark, *Arithmetik*, Stockholm, 1795, s. 28.
[19] Ibid, s. 29.

Tabell 3. Beckmarcks "Tab IV. Som föreställer förhållandet emellan de Svenska och utländska Våtvarors Mått, uträknade i Svenska kannor".[20]

	sv. k:r		sv. k:r
Altona 1 tunna	$44\frac{1}{4}$	Hamburg 1 Åm, om	
Amst. 1 Åm Renskt		4 ankar	$55\frac{10}{33}$
och Mosel vin	$58\frac{2}{11}$	1 Far Bränvin	$82\frac{21}{22}$
1 Oxh. Franskt vin	$81\frac{2}{11}$	Lisabon 1 Pipa	$169\frac{13}{33}$
1 Pipa Spanskt och		Livorno 1 Barile Vin	$16\frac{1}{22}$
Portugis vin	$154\frac{6}{11}$	1 Barile Olja	$12\frac{5}{33}$
1 F:t Franskt Bränvin	$83\frac{1}{11}$	London 1 Tun Vin.	$364\frac{2}{3}$
1 Far Bomolja	$325\frac{10}{11}$	1 Hobshead brunt Öl	
1 Åm Lin-Hamp och		om 54 Gallons	$95\frac{13}{33}$
Ros-olja	$54\frac{6}{11}$	1 Gallon öl eller	
1 Fat Tran	$87\frac{7}{11}$	dricka	$1\frac{1}{3}$
Bourdeaux 1 Barrique		Marseille 1 Millerole	$22\frac{3}{4}$
eller Oxhufv.	$90\frac{10}{11}$	Montpellier 1 Muid	
Cadix 1 Pipa Olja	$129\frac{22}{33}$	Vin	$232\frac{5}{22}$
– 1 Botta vin	$180\frac{5}{11}$	1 Pipa Bränvin	192
Canarie Öarne 1 Pipa		Ryssland 1 Fat	$182\frac{2}{11}$
Vin	$167\frac{5}{6}$	Spanien 1 Botta	$180\frac{5}{11}$
Cetter är lika med		1 Pipa	162
Montpellier	-	Rouen 1 Barrique	$74\frac{2}{3}$
Champagne 1 Queüe	$137\frac{1}{2}$	Rostock se Hamburg	-
Dannem 1 Åm om		Toulon 1 Millerole	$24\frac{13}{33}$
4 Ankar	$57\frac{2}{11}$	Stralsund 1 Stübgen	$1\frac{1}{2}$
1 tunna i allmänhet	$50\frac{2}{11}$	Strasburg 1 Åm	$17\frac{20}{33}$
Danzig 1 Åm, om 4			
Ankar	$72\frac{1}{12}$		

Tabellen visar på omfattningen av det material Beckmark behandlar i sin bok. I detta avseende, det vill säga vad gäller rikedom på praktiskt användbara detaljer, liknar den de tidigare räknelärorna. Den tar sikte på att förmedla aritmetiken som ett praktiskt användbart redskap, snarare än som ett första

[20] Ibid, s. 41. I förbigående kan noteras att uppräkningen av utländska sorter ger en bild av vilka länder som Sverige vid denna tidpunkt (1795) hade handelsförbindelser med. Förutom den stora rikedomen på olika sorter som uppenbarligen förekom (detta är alltså bara en av åtta liknande tabeller) kan man också konstatera att trettiotredjedelar är den minsta bråkdel som Beckmarck använder.

steg mot bemästrande av den vetenskapliga matematiken. Tabellen ger också en bild av den internationella kontext som (enligt Beckmark) var relevant för de blivande svenska officerarna att känna till kring sekelskiftet 1800. Slutligen illustrerar tabellen ett faktum rörande sorträkning som jag nämnde i förbigående i kapitel 5 i anknytning till räknelärorna, nämligen att den ofta kunde leda till praktiskt svårhanterliga uträkningar. I den mån räknekonsten skulle bemästras var det ett oeftergivligt krav att kunna hantera allmänna bråk, lika mycket kring sekelskiftet 1800 som tidigare.

Regula de Tri

En skillnad i förhållande till räknelärorna, karaktäristisk för övergången från räknekonst till tillämpad matematik är att Beckmarck, innan han introducerar *Regula de Tri*, har ett avsnitt med rubriken ”Om Förhållande och Proportioner”. Detta stycke motsvarar ungefärligen Palmqvists redogörelse för bråk, men nu med en rubrik som bättre speglar innehållet. Här förenas hos Beckmarck moment från flera håll. Liksom i räknelärorna ligger genomgången nära praktiken såtillvida att Beckmarck ofta låter talen representera en sort (oftast Riksdaler). I motsats till räknelärorna nöjer han sig emellertid genomgående med att använda *en* sort åt gången i sina exempel. Detta gör att matematiken hamnar i fokus, snarare än komplikationer relaterade till sorterna. Avsnittets innehåll har i övrigt stora likheter med inledningen till Euklides femte bok. Trots att detta stycke passar bra för ett algebraiskt behandlingssätt har Beckmarck emellertid begränsat sin användning av algebra. Han använder x, men beskriver samtidigt i stor utsträckning matematiken i löpande text. Till exempel så här:

> § 93. Tvänne tal sägas hafva lika förhållande eller vara *proportionella* med 2:ne andra, när deras qvoter äro lika, eller när det första divideradt med det andra ibland de förra talen, är lika stort med det första divideradt med det andra ibland de senare talen; och tvärtom, när talen äro proportionella, så äro deras *qvoter* lika. Sålunda när $\frac{2}{8}$ är $= \frac{3}{12}$, så är 2 til 8, som 3 til 12; och när åter 2 är til 4 som 8 til 16 så är $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$.[21]

Jag tolkar detta ordrika framställningssätt som ett uttryck för en ambition att å ena sidan beskriva den ”riktiga” matematiken, men samtidigt att inte använda algebra – eftersom algebran är ett annat ”ämne” och därför behandlas i en annan bok. Att på detta sätt utforma framställningen med utgångspunkt från hänsynstaganden till matematiken i egenskap av undervisningsämne – att dela in matematiken i *kurser* – blev under 1800-talet typiskt för skolmatematiken. Beckmarks avstående från algebra i sin *Aritmetik* utgör därför ett tecken som visar vart skolmatematiken var på väg.

---

[21] Ibid, s. 90.

I linje med den vetenskapliga matematiken redogör Beckmark i sitt avsnitt om ”Förhållanden och Proportioner” på litet utrymme för principerna som ligger till grund för *Regula de Tri*. Han presenterar dem i termer av matematiska sanningar. Han bevisar dem emellertid inte, utan nöjer sig med att exemplifiera. Beckmarcks fokus är aritmetiken i egenskap av användbart redskap, inte som vetenskap. Beckmark diskuterar inte i vilken mån de resultat man får när man tillämpar dem stämmer med verkligheten.

Hans mål är istället att så långt som möjligt utsträcka aritmetikens räckvidd. Detta gör han till exempel genom att räkna upp 23 fall då han menar att *Regula de Tri* är tillämpbar. Det intressanta är att han genom denna uppräkning ringar in mängden av de uppgifter som är avsedda att lösas med *Regula de Tri* i skolan, relativt oberoende av hur praktiska situationer kan hanteras utanför skolan. Som jag berättat om ovan är *Regula de Tri* tillämpbar då två kvantiteter är proportionella mot varandra. Att detta inte gäller allmänt för de fall han räknar upp är uppenbart, till exempel i följande fall:

> 1. Varors pris eller värde är altid proportionelt emot samma varors mängd, antingen i vigt, rymd, ytor eller längd; ju större mängd i vigt etc. ju större pris.
> [...]
> 6. Bestämda arbetslöner äro altid proportionella mot arbetstidernas längd; ju större tid, ju större lön.
> 7. Verkande orsaker, *på lika tid*, äro altid proportionella mot sina Effecter eller verkningar; så at ju större verkande orsak, ju större blir effecten, och tvertom, ju större effect åstundas, ju större bör verkande orsaken vara.
> [...]
> 10. När flere orsaker på en gång äro verkande, så blir effecten altid proportionel mot producten af dessa verkande orsaker.[22]

I den sista av de här citerade punkterna är det tydligt att Beckmarck syftar på exempel avsedda att lösas med räknesättet *sammansatt Regula de Tri*, där till exempel antalet arbetare skall multipliceras med tiden de arbetar (då de i det typiska exemplet gräver ett dike). Beckmarcks uppräkning är alltså bara giltig inom en specifik institutionaliserad kontext. Den är ett hjälpmedel, men inte för att besvara det praktiska livets frågor, utan för att besvara den typ av frågor som ställs i skolan.

Typiskt för Beckmarks framställning är att han, i större utsträckning än räknelärorna, låter matematiken, snarare än den praktiska verkligheten, fungera som strukturerande princip. Detta visar sig tydligt i hans genomgång av tillämpningarna av *Regula de Tri*. I räknelärorna var dessa ordnade med utgångspunkt från praktiken, som en följd av mer eller mindre likvärdiga och i sig själva fullständiga recept för hantering av olika typer av räknefrågor. Beckmark börjar istället direkt med att skilja mellan den ”enkla” och den

[22] Ibid, s. 95–96.

”sammansatta” formen av *Regula de Tri*, och använder sedan denna distinktion i redogörelsen för de specifika ”räknesätten”. Till exempel kommer ”Enkel Intresse Räkning” före ”Sammansatt Intresse Räkning”, och ”Enkel bolagsräkning” före ”Sammansatt Bolagsräkning”. Särskilt tydlig blir matematikens strukturerande roll i det att Beckmark tar upp *alla* de möjligheter indelningsprincipen medger, även om detta resulterar i meningslösa uträkningar. Varje tillämpning av *Regula de Tri* har i en matematisk mening en enkel och en sammansatt form. Detta faktum tar Beckmark som utgångspunkt för vad som skall behandlas. Räknelärorna behandlade tvärtom bara räknefrågor som faktiskt kunde uppstå (åtminstone tyckte bland andra Roloff Andersson att de bara *borde* behandla sådana räknefrågor).

Det förtjänar dock att påpekas att Beckmarck är tämligen grundlig i sin redogörelse för det praktiska räknandet. Han är inte omständlig utan tvärtom koncis och kortfattad. Men genvägarna, de praktiska tipsen, och inte minst tabellerna, finns där. Man kan säga att han systematiserar, och kanske i viss mån schematiserar, räknekonsten. Om Celsius och Palmqvist uteslöt praktiken från sina framställningar med hänvisning till att räknekonsten (blott) är elementär matematik, så utesluter Beckmarck i viss mån praktiken genom att fokusera på räknekonsten som systematisk teknik. Räknelärornas karaktär av realistiska beskrivningar av praktiskt räknande saknas i viss mån, men av en annan anledning, och på ett annat sätt än i framställningarna som tog sikte på matematiken som abstrakt vetenskap.

Slutligen skall sägas att Beckmarck i sin korta bok ägnar relativt stort utrymme åt logaritmer. Framför allt visar han hur logaritmer kan användas – och han fokuserar på just de sammanhang där logaritmer är som mest användbara, det vill säga vid rotutdragning och potensräkning (framför allt beräkning av ”ränta på ränta”). Han redogörelse kan kontrasteras mot presentationen av logaritmer i läroböcker från slutet av 1800-talet, då logaritmräknandet transformerats till något helt annat än ett användbart redskap. Låt mig nu jämföra denna Beckmarcks *Arithmetik* med Olof H. Forssells *Arithmetik för Begynnare*, vilken kom ut drygt 20 år senare.

Forssells *Arithmetik för Begynnare* (1818)

Redan andra upplagan av Beckmarcks *Arithmetik*, tryckt 1804, uppges vara ”tillökt och förbättrad” av Olof H. Forssell. Ytterligare en förbättrad upplaga kom ut 1811, för att sedan 1818, under titeln *Arithmetik för Begynnare*, komma ut, som Forssell skriver i sitt förord, ”under sin rätta Författares namn”.[23] Forssell hade 1818 ökat bokens omfång från Beckmarcks 196 till 336 sidor. De ”förbättringar” han gjorde är, menar jag, signifikativa för det

[23] Forssell, *Aritmetik för Begynnare*, Företal.

sammanhang han skrev för. Det rör sig nämligen om vad man kan kalla en pedagogisering av aritmetiken.

Beckmarcks framställning är kort, koncis, teknisk och systematisk. Det vore ingen överdrift att kalla den torr. Forssells ändring av titeln, från *Arithmetik* till *Arithmetik för Begynnare*, ger en vink om hur innehållet förändrats. Det vore fel att säga att Forssell förenklat aritmetiken. Däremot är Forssells framställning uppenbarligen baserad på erfarenheter av den praktik inom vilken boken användes. Forssell riktar sig i sin bok inte till en läsare vilken som helst, utan till en elev (eller till en undervisande lärare som vill veta vad eleverna behöver).

Först och främst är Forssells bok längre. Mer än Beckmarck är han mån om att verkligen göra sig förstådd. Texten är framställd i form av paragrafer mellan vilka Forssell sprängt in ”anmärkningar” som ibland stäcker sig över flera sidor. I dessa anmärkningar reflekterar Forssell kring den övriga texten. Sammantaget blir resultatet något som liknar en dialog mellan den föreläsande (Beckmarck, vars tidigare framställning utgör bokens stomme) och en frågande lyssnare (Forssells anmärkningar), som behöver ytterligare förklaringar, preciseringar och exempel. Första kapitlets sjätte paragraf handlar om hur man skriver stora tal – som vi vet ett av räknelärornas obligatoriska moment. Efter själva beskrivningen av hur man *gör* detta följer en anmärkning som jag citerar i sin helhet, för att visa hur grundlig Forssell ofta är:

> Anm. När ett tal består af många siffror i bredd är det ofta ej så lätt, att vid första påseendet finna hvad värde hvar och en siffra äger ifrån den första till den sista. Dertil tjenar då följande anvisning: 1) Begynner man ifrån höger till venster att med ett komma (,) skilja siffrorna i klasser, tre siffror i hvar klass, 2) Öfver tredje klassens närmaste siffra åt höger sättes en punkt, öfver femte klassens sättes två punkter, öfver sjunde klassens tre punkter, och så vidare öfver hvarann klass. 3) De siffror, som hafva allenast ett komma framför sig till högre handen, utan punkt ofvanföre utnämnes genom *tusende*; men har siffran en punkt öfver sig, så nämnes *Millioner*, har hon två punkter nämnes *Billioner*, tre punkter *Trillioner*, fyra punkter *Qvadrillioner*, o. s. v. 4) För öfrigt utnämas siffrorna inom hvar klass på lika sätt, som när endast tre
> siffror äro skrifna i bredd. Talet:
>
> $\dddot{9}, 876, \ddot{5}43,210, \dot{1}23,456, 789$
>
> afdelas och betecknas som för ögat synes, samt utnämas sålunda: *Nie Trillioner* [...] *sju hundra åttionie.* – Med Billion menas tusen gånger tusen millioner, Trillion är tusen gånger tusen Billioner; Qvadrillion tusen gånger tusen Trillioner, o. s. v. När ordet *Milliard* förekommer, betyder det 1000 Millioner.[24]

[24] Ibid, s. 4.

Forssell blir som synes nästan omständlig i sin strävan efter tydlighet. Även om han inte (som till exempel Celsius) presenterar några matematiska bevis för räknekonstens många regler och genvägar är han inte desto mindre mån om att förklara det som Beckmarck helt enkelt bara presenterar. Ett typiskt exempel är här Forssells förklaringar till de många genvägarna för att förkorta bråk. Han inleder sin anmärkning med konstaterandet att ”orsaken till de flesta af dessa sannningar är lätt att finna”, för ett sedan inte desto mindre ägna tre sidor åt att gå igenom dem, en åt gången.

Många av Forssells anmärkningar har karaktären av goda råd. Dessa råd skiljer sig ofta (men inte alltid) från räknelärornas motsvarigheter genom att de handlar om enklare frågor, vilket är naturligt med tanke på att Forssell, som titeln anger, riktar sig till en ”Begynnare”. Intressant, särskilt i förhållande till senare läroböcker, är att han inte desto mindre tilltalar denna begynnare med betydande respekt. Att han behandlar en rad enkla frågor, innebär inte att han avstår från att behandla det som är mer komplicerat. Att läsaren uppenbarligen inte behärskar räknekonsten förknippas här inte med en allmän oförmåga att tänka.[25]

Frågan är emellertid komplicerad. Det är nämligen inte självklart för *vad* Forssells råd är goda, med andra ord i vilken riktning han med sina långa förklaringar hjälper eleverna. Frågan hänger samman med den för mina syften enskilt viktigaste skillnaden mellan Forssells *Arithmetik för Begynnare* och alla tidigare svenska böcker om aritmetik, nämligen det stora antal ”exempel för övning” som Forssell valt att inkludera i sin bok. Låt mig påminna om att Roloff Andersson, på ett tjugotal (!) ställen i sin ungefär samtidiga räknelära (från 1779), uttryckligen protesterar mot den trend han såg av att öka antalet tryckta exempel för övning i räkneböckerna.[26] Där Beckmark ger tre eller fem exempel presenterar Forssell ofta 15-25 eller ibland så mycket som 100 exempel.

För att undvika missförstånd är det emellertid viktigt att här påpeka att även räknelärorna innehöll många exempel, varav vissa, liksom de det här är fråga om, lämnades utan kommentar. I räknelärorna var emellertid exemplen på ett annat sätt än hos Forssell en integrerad del av framställningen. De fungerade som illustrationer och gav läsaren möjlighet att pröva sin förståelse. Hos Forssell är det tydligt att exemplen skall fylla en annan funktion: de skall fungera som verktyg för att lära sig. Frågan är vad man då lär sig.

Ett sätt att beskriva Forssells *Arithmetik för Begynnare* är att säga att den är anpassad till undervisningens praktik. De långa förklaringarna, liksom exemplen för övning, riktar sig till eleven för att hjälpa, men detta innebär samtidigt att läroboken blir en sorts kodifiering av de svårigheter som måste övervinnas och även hur de borde övervinnas. Min poäng är att Forssells lärobok därigenom på ett helt annat sätt än till exempel Roloff Anderssons

[25] Jmf. kapitel 6 nedan.
[26] Se ovan s. 132.

Arithmetica Tironica konstituerar bemästrandet som sådant. De tryckta övningsuppgifterna är något man gör i skolan, vilket jag tror skarpt bör skiljas från Anderssons beskrivningar av något som händer i specifika yrkespraktiker utanför skolan.

Här är det viktigt att komma ihåg att räknelärorna troligtvis i högst begränsad utsträckning användes för de självstudier de i viss mån var skrivna för. De hör till en genre vilken vi sett måste förstås som just beskrivande, eller kanske demonstrerande – av vad som är möjligt att göra. Liksom tidigare Palmqvist, omstrukturerar Forssell räknelärornas material, men till skillnad från Palmqvist strukturerar han inte om det med utgångspunkt från matematiken. Istället strukturerar han stoffet med utgångspunkt från undervisningen. Han tar räknelärornas beskrivningar av hur man gör utanför skolan, transformerar dem till något man gör i skolan och visar sedan hur man lär sig göra just detta.

Här har alltså både de praktiska komplikationer som räknelärorna beskriver och vetenskapens (svåra) formalism uteslutits. Forssell har bevarat de svårigheter som är förknippade med räknekonsten som teknik, men liksom i Beckmarcks framställning framstår denna teknik här som en systematisk helhet. I motsats till Beckmarck visar Forssell vägen mot ett praktiskt bemästrande av denna teknik. I och med detta hade ett viktigt steg tagits mot den typ av läroböcker i matematik som vi har idag.

Beckmarcks *Algebra* (1794) och Forssells *Algebra för Begynnare* (1801)

Den förändring av aritmetikens behandling som jag beskrev i förra avsnittet motsvarades av en liknande förändring rörande algebra. Jag skall här beskriva denna förändring med utgångspunkt från en jämförelse mellan Beckmarks *Algebra* från 1794 och Forssells *Algebra för Begynnare* från 1801. Tabellen nedan visar de respektive böckernas disposition.

Tabell 4. Jämförelse mellan Beckmarcks *Utkast til föreläsningar öfver Algebra* (1794) och Forssells *Algebra för Begynnare.* (1801)[27]

Beckmarcks rubriker	sidor	Forssells rubriker	sidor
Cap. 1.	3	1 Cap. Om de algebraiska Tecknen.	12
Cap. 2. Om Addition och Subtraction.	2	2. Cap. Om Addition och Subtraction.	5
Cap. 3. Om Multiplication och Division.	4	3 Cap. Om Multiplication och Division.	10
Cap. 4. Om bråk i allmänhet.	9	4. Cap. Om Bråk.	11
Cap. 5. Om decimal bråk.	6		
Cap. 6. Om digniteter.	8	5 Cap. Om digniteter och Rötter.	22
Cap. 7. Om Æquationer.	9	6 Cap. Om Equationer i allmänhet och om Enkla Equationers uplösning, som blott innehålla En obekant.	19
		7 Cap. Om Quadratiska Equationers Uplösning	11
		8 Cap. Om Equationers Uplösning, som innehålla Två eller flera Obekanta.	13
Cap. 8. Om Proportioner och Serier	15	9 Cap. Om Förhållande, Proportioner och Serier.	12
		10 Cap. Om Logaritmer.	17
		11 Cap. Om Algebras Tillämpning til Geometriska Problemers Uplösande.	44
Cap. 9. Om Problemers uplösning.	8	12 Cap. Några Arithmetiska Problemer til hvilkas uplösning Algebra lämpas.	30
Cap. 10. Om Æquationer av högre grader	8		
totalt:	80 s.	totalt:	204 s.

Beckmarcks *Utkast til föreläsningar öfver Algebra* sträcker sig över endast 80 sidor. Samtidigt behandlar Beckmarck ett tämligen omfattande stoff. Att ekvationen går ihop beror på att Beckmarck är synnerligen kortfattad. Han beskriver kort och koncist en mängd regler för hur man räknar med bokstäver. Han bevisar dem inte, han förklarar inte varför de ser ut som de gör, han demonstrerar inte deras (eventuella) praktiska nytta. Liksom räknelärorna illustrerar han sina regler med exempel, men de innehåller ytterst sällan något annat (till exempel sorter) än den bokstavsräkning boken handlar om. Beckmarck har, kan man säga, gjort algebran till ett system av regler – och uteslutit allt annat.

I sin *Algebra för Begynnare*, som med sina 204 sidor är mer än dubbelt så lång som Beckmarcks bok, ägnar Forssell tvärtom stort utrymme åt att förklara. Väsentligt är emellertid att det han förklarar är hur man gör – han

[27] Nils Petter Beckmark, *Utkast til föreläsningar öfver algebra*, Stockholm, 1794, respektive Forssell, *Algebra för Begynnare.*

ägnar sig inte åt matematiska bevis. Om Beckmarck beskriver systemet, så presenterar Forssell en ingång till dess bemästrande. Precis som i sin *Arithmetik för Begynnare* ger han läsaren en mängd goda råd, kombinerade med exempel för övning.

Framställningssättet kan illustreras genom Forssells redogörelse för multiplikation och division. När man multiplicerar "enkla storheter" med varandra sätter man, skriver Forssell, bokstäverna bredvid varandra, "utan något tecken emellan". Han fortsätter:

> Dervid märkes endast, at de för redigheten skull vanligen sättas i samma ordning, som de äga i alphabetet; således skrifver man *ab* och ej *ba*; *acx* och ej *xax* eller *xca*; ehuru i alla fall producten blir densamma, man må sätta bokstäfverna i hvad ordning som hälst.[28]

Citatet illustrerar Forssells pedagogiska framställningssätt, där han som synes skiljer mellan det matematiska och det konventionella och ger exempel för att förtydliga vad han menar. Som ytterligare exempel kan anföras vad Forssell skriver mot slutet av sin redogörelse för division:

> Alla ofvanstående exempel äro så valde, at divisorn går jämnt up i dividenden; men sådan händer mycket sällan vid equationers handterande, der divisorn och dividenden ej bero af eget val. Vanligaste utvägen är då at genast teckna quoten som et bråk, hvaruti dividenden blir täljare, och divisorn nämnare; ty sällan vinnes någon förmon dermed, at man verkställer Division så långt som ske kan, och sedan tecknar resten som et Bråk. Likväl är för en begynnare altid rådligast at först försöka om Division kan verkställas; emedan annars kunde hända at han anser det för omöjligt som likväl låter göra sig. Kännemärket at en Division ej går jämnt up är det, at man sluteligen får något öfrigt, som ej kan divideras med divisorns första term utan at få bråk i quoten. Til vissa ändamål i den högre calculen brukar man väl, at ändå fortsätta divideringen med bråk, såsom följande exempel utvisar, då man i quoten får en såkallad *Series* [...][29]

Det Forssell leder läsaren mot här, är inte så mycket den matematiska vetenskapen som det system av regler vilket Beckmark sammanställt som utgångspunkt för undervisningen vid krigsakademin på Karlberg. Reglerna konstituerar en praktik, och Forssells bok handlar, kan man säga, om elevens möte med denna praktik. Den utgår troligtvis från Forssells egna erfarenheter av detta möte. Forssell har observerat vilka svårigheter eleverna möter, och hur de kan övervinnas. Han fyller på med de tips och goda råd som visat sig vara eleverna till nytta.

Beckmarcks bok är strukturerad med utgångspunkt från algebran som system, det vill säga med utgångspunkt från hur de många reglerna hänger

[28] Forssell, *Algebra för Begynnare*, s. 17.
[29] Ibid, s. 26.

samman. Algebran framstår i Beckmarcks bok som ett verktyg. Genom Forssells mer detaljerade rubrikstruktur framstår hans bok i högre utsträckning som en *väg*, med riktning från det enklare, till det mer komplicerade. Utgångspunkten är här med andra ord eleven, den som skall lära sig ämnet algebra. Algebran utgör fortfarande slutpunkten, men Forssells bok innehåller inte bara denna slutpunkt, utan även vägen dit.

När algebra blev ett skolämne fick den allt tydligare gränser. Att dessa gränser fortfarande för Beckmark var relativt otydliga illustreras av att han i sin bok inkluderar ett avsnitt om decimalbråk. Detta ämne låter sig inte behandlas utan användande av *siffror* snarare än de bokstäver som annars står i fokus. Forssell tar inte upp decimaler i sin *Algebra för Begynnare*, vilket pekar mot den allt tydligare gränsen mellan ”ämnena” aritmetik och algebra. Att algebran hade otydliga gränser i Beckmarcks bok visar sig även i det att han behandlar ekvationer av högre grader än två. Just andragradsekvationer kom nämligen, i Forssells och än mer i E. G. Björlings *Elementa-Lärobok i Algebra* från 1832, att utgöra algebraämnets självklara slutpunkt.[30] I och med detta kunde algebraämnet struktureras som en väg mot just de tekniker som krävs för lösande av andragradsekvationer. Det blev en ”avrundad helhet”, väl avgränsad gentemot den matematiska vetenskapen, i förhållande till vilken den förmåga att snabbt och säkert lösa andragradsekvationer vilken övades upp inför examinationerna är fullständigt irrelevant.

Forssell anför tre argument för varför han inte tar upp ekvationer av högre grad än två. För det första menar han att den som ”behöver känna sådana Equationers handterande” också rimligtvis måste antas kunna lära sig det de behöver på egen hand genom att läsa böcker på andra språk än svenska. För det andra – och detta är givetvis huvudargumentet – *fanns inget institutionellt krav* på kännedom om sådana högre graders ekvationer: ”Af Kongl. Krigs-Academiens Elever”, förklarar han i sitt förord, ”äskas icke denna kunskap”.[31] Slutligen menar han att införande av denna teori skulle göra boken dyrare än nödvändigt. Här tydliggörs hur bokens institutionaliserade användning får bestämma dess innehåll.

Intressant i detta sammanhang är även att Forssell, i motsats till Beckmarck, har med ett avsnitt om logaritmer i sin algebrabok. Det är egentligen inte svårt att förstå varför han har *med* logaritmer – de var ett relativt nytt matematiskt redskap, som (säkert med rätta) ansågs vara mycket kraftfullt. I förhållande till algebran utgjorde emellertid logaritmerna – särskilt så som de behandlades vid denna tidpunkt – ett problem på liknande sätt som decimalerna. Logaritmerna kunde nämligen knappast presenteras utan omfattande bruk av siffror. Det är i detta avseende symptomatiskt att Forssell i sitt avsnitt om logaritmer hänvisar till Beckmarcks *Arithmetik*.[32]

[30] Björling, *Elementar-lärobok i Algebra*.
[31] Forssell, *Algebra för Begynnare*, Til Läsaren.
[32] Ibid, s. 121.

Logaritmerna passar helt enkelt inte särskilt bra in i det system som algebran i vissa avseenden utgjorde redan i Beckmarcks framställning. Signifikativt vad gäller den riktning i vilken skolmatematiken vid denna tid rörde sig, är att E. G. Björling i sin *Elementar-Lärobok i Algebra* publicerad 1832 inte nämner logaritmer med ett ord.[33]

Även en annan skillnad mellan Beckmarcks och Forssells respektive böcker pekar fram mot Björlings. Forssell ägnar nämligen relativt stort utrymme åt lösning av aritmetiska problem med hjälp av algebra. Där Beckmarck nöjer sig med att presentera algebran som system, är Forssell dessutom angelägen om att, genom tillämpningar, visa hur algebran kan användas. Forssells tillämpningar av algebra har mer än tidigare svenska algebraböcker karaktär av ”matematisk modellering”. Detta så till vida att han går igenom ett mindre antal problem relativt grundligt, snarare än snabbt ta sig igenom ett stort antal enklare problem. Hans explicit uttryckta syfte är också att med hjälp av algebran ta fram ett generellt ramverk för att hantera de grupper av situationer som problemen exemplifierar. De aritmetiska problemen hämtar han från naturvetenskap, teknik och ekonomi. Karaktäristiskt är här, som vanligt när det gäller algebra, att den algebraiska behandlingen av problemen framstår som elegant och kraftfull, men att den inte visar hur problemen kan hanteras i praktiken.

Beckmarck och Forssells böcker förenas av sin ambition att utsträcka matematikens räckvidd. Hos Beckmarck syns denna ambition tydligast i hans *Arithmetik*, medan den är ett karaktäristiskt drag hos båda Forssells böcker. Forssell placerar sig, kan man säga, mellan den matematiska vetenskapen och verkligheten, och förbinder dem med varandra med hjälp av tillämpningar. Dessa är mer praktiska än de som anfördes av Celsius och Palmqvist, samtidigt som de inte är realistiska på samma sätt som räknelärornas beskrivningar.

Forssell skiljer sig från Beckmarck på så sätt att hans böcker dessutom är strukturerade med utgångspunkt från en elev som skall lära sig med hjälp av hans bok. Forssell leder eleven framåt. Min tes i detta sammanhang är emellertid att det mål han leder eleven mot är den institutionaliserade och från samhället avgränsade undervisningspraktiken. Den aritmetik och den algebra Beckmarck och Forssell konstituerar är något man *gör i skolan*. I läroböckerna framstår denna praktik emellertid som en väg mot ett bemästrande av en matematik som både är en vetenskap och praktiskt nyttig inom så gott som alla områden av den sociala och fysiska verkligheten.

[33] Björling, *Elementar-lärobok i Algebra.*

Matematikens nya gränser

Uppsalaprofessorn Mårten Strömers översättning av Euklides *Elementa,* liksom Anders Celsius *Aritmetik eller Räkne-Konst* syftade till att förmedla delar av den matematiska vetenskapen. Celsius och Strömer var båda knutna till Uppsala universitet och, liksom många andra i denna miljö vid denna tid, inspirerade av den tyske filosofen Christian Wolff. Han hade placerat den matematiska metoden i centrum för ett metafysiskt system i vilket vetenskapliga studier av naturen var intimt förbundna med religiösa frågor. Matematiken betraktades som det kitt genom vilket människan var förbunden både med naturen och med Gud. Det var denna matematiska vetenskap Celsius och Strömer – genom sina böcker författade på svenska – ville förmedla till den svenska ungdomen. Förorden till dessa böcker utgjorde en integrerad del av en övergripande matematisk diskurs där matematiken förknippades med en rad positiva egenskaper.

Rörelsen från Celsius och Strömer till Forssell och Beckmarck, går via Fredric Palmqvist, född 1720 och därmed 12 år yngre än Strömer och 19 år yngre än Celsius. Hans första arbete med läroböcker i matematik utgjordes av en bearbetning av Celsius *Arithmetik* utgiven 1741. När han sedan 1750 ger ut en egen räknebok – *Underwisning i Räknekonsten* – skriver han i sitt förord att han identifierat en brist hos alla tidigare räkneböcker, nämligen att de är ”alt för kårta, eller alt för widlyftiga”.[34] Detta såg han emellertid inte som att *allmänt* problem. Mer specifikt, skrev han om: ”Svårigheter, som [han] tyckt ligga *wår Swenska Ungdom* mycket i wägen”.[35] Med andra ord såg Palmqvist böckernas utformning som ett problem i undervisningen av ungdomar – en praktisk verksamhet han vid denna tid hade lång erfarenhet av. För att råda bot på svårigheterna försökte han nå en kompromiss mellan Agrelius detaljerade och långa utläggningar och Celsius korta, koncisa och abstrakta satser. Denna kompromiss utgjorde en anpassning till den typ av undervisning inom vilken böckerna skulle användas, dvs explicita överväganden kring eleven och undervisningen bidrog till att strukturera framställningen.

Givet denna analys blir det möjligt att se rörelsen från räknekonsten till Palmqvists räknelära som ett resultat av två på varandra följande förskjutningar – den första som ett resultat av mötet mellan räknekonsten och den abstrakta matematiken, den andra som ett resultat av en anpassning till undervisningens villkor.

Beckmarcks och Forssells böcker kan ses som en fortsättning av den utveckling som Palmqvist inledde. Deras respektive läroböcker var inte enbart inspirerade av svenska förlagor – att man inte desto mindre kan placera in dem i en övergripande trend pekar på att en liknande utveckling präglade undervisningen i grundläggande matematik även i övriga Europa.

[34] Palmqvist, *Underwisning i Räkne-Konsten,* förord.
[35] Ibid, Förord (min kursivering).

Beckmarcks och Forssells böcker är ganska olika, och man kan inte reducera dem till ”effekter” av det sammanhang inom vilket de användes. I synnerhet sticker Beckmarcks *Utkast til föreläsningar öfver Algebra* ut genom sin korthet. Samtidigt finns det en rad element i deras böcker som visar hur de, än mer än Palmqvists, är anpassade till det undervisningssammanhang de författades för.

Tydligast syns detta i Forssells böcker. Deras titlar anger att de är skrivna för ”begynnare” och de karaktäriseras av en ambition att förklara och tydliggöra. Förenklat kan man säga att om Celsius och Beckmarck genom att utesluta Agrelius långa beskrivningar av det praktiska räknandet tog ett steg mot den abstrakta vetenskapen, tog Forssell ett steg i en annan riktning genom att fylla på med en annan typ av beskrivningar – nämligen av räknandet så som det gestaltar sig i undervisningssituationen. Fokus förskjöts därmed, från vetenskapen respektive det praktiska räknandet, mot undervisningen. Forssells böcker är utformade för att understödja undervisningspraktiken – antingen i lärarens eller elevens hand. Han identifierar svårigheter och förklarar hur de kan övervinnas.

I och med detta förändrades även, menar jag, det sätt på vilket matematiken hänvisade till sina egenskaper. Från att ha varit en vetenskap förknippad med rader av egenskaper blev matematiken i större utsträckning något man *gör i skolan*, något som där antar form av ”kunskaper”.

Skolmatematikens yttre gränser

Den förskjutning mot undervisningspraktiken som jag beskrivit ovan drog emellertid inte med sig matematiken som helhet. Tvärtom ledde denna rörelse till nya gränser så att säga ”inom” matematiken. Kort sagt kan man säga att det under andra halvan av 1700-talet växande fokus på undervisningspraktiken åtföljdes av motsvarande processer av autonomisering inom andra sociala sfärer förknippade matematik. För det första skedde under denna tid en dramatisk utveckling av den matematiska vetenskapen. När böckerna anpassade för grundläggande undervisning blev enklare, blev samtidigt den matematiska vetenskapen mer abstrakt, vilket så att säga från två håll ledde till ett tydliggörande av skillnaden mellan matematiska texter avsedda för undervisning, och matematiska texter författade av och för matematiker. Man skall här komma ihåg att Celsius och Strömer, liksom även Palmqvist i sin *Algebra*, försökte täcka in betydande delar av tidens matematiska vetenskap. Någon sådan ambition hade varken Beckmarck eller Forssell.

Att denna avgränsningsprocess var ett resultat av medvetna överväganden framgår av de kommentarer angående stoffets ”övre” gränser som syns i många böcker från slutet av 1700-talet fram till mitten av 1800-talet. Man talar om vad som ”äskas” av eleverna, av vikten av att inte ”onödigtvis” fylla böckerna med matematiskt stoff som eleverna ändå inte har någon möjlighet att begripa. Böckernas pris framträder som en ny och viktig faktor.[36]

En annan gräns, som inte diskuteras av författarna men inte desto mindre kan härledas ur böckernas framställningar, är den gentemot praktikerna varifrån deras tillämpningar är hämtade. Som jag nämnt många gånger i det föregående, karaktäriseras räknelärorna av relativt detaljerade beskrivningar av en mängd praktiska situationer hämtade från det ”borgerliga livet”. Räknekonsten framträder som ett redskap för att bemästra dessa situationer. Hos Celsius kan man säga att de praktiska sammanhangen istället framträder som illustrationer av vetenskapen än som beskrivningar av den praktiska verkligheten så som den faktiskt är – beskrivningarna har anpassats till det illustrerande syftet. Hos Forssell har ytterligare ett steg tagits, så att de praktiska sammanhangen snarast framträder som redskap för att fylla undervisningspraktiken med ”innehåll”. Det handlar inte som i räknelärorna om trogna beskrivningar, och inte som hos Celsius om att illustrera abstrakta principer – snarare framträder den hela den praktiska verkligheten som ett *fält för tillämpningar*. På ett liknande sätt som i räknelärorna har Forssells lärobok i algebra en parataktisk struktur, men istället för räknelärornas serie av likartade matematiska tekniker avgränsade genom sina respektive tillämpningsområden, innehåller Forssells lärobok grupper av övningsexempel, avgränsade av den del av matematiken vars tillämpning de illustrerar – medan det praktiska innehållet inom varje grupp hämtas från vitt skilda sfärer av det praktiska livet.

Min poäng är att detta inte bara innebär att innehållet är strukturerat med utgångspunkt från matematiken snarare än den praktiska verkligheten, utan också att den matematiska undervisningspraktiken i och med detta förlorar kontakten med de praktiker den hänvisar till. Ett enkelt konstaterande är att Forssell, liksom Palmqvist före honom, tycks sakna egen praktisk erfarenhet av de praktiker han beskriver. Denna situation kan skiljas från Celsius och Strömers, vars syften var att beskriva vetenskapen. I och med att detta var deras syfte, utgjorde det faktum att deras bild av verkligheten är tämligen artificiell inte på samma sätt ett problem – deras huvudsakliga syfte var ju att beskriva den matematiska vetenskapen, inte den praktiska verkligheten. Forssells syfte är att visa matematikens ”tillämpning” genom att ge underlag för ett praktiskt ”tillämpande” av matematiken i skolan. När det gäller honom är därför bristen på realism mer problematisk. Viktigt att komma ihåg är att de områden från vilka Forssell hämtade sina tillämpningar förändrades på ett tämligen genomgripande sätt under slutet av 1700-talet och första halvan av 1800-talet. På samma sätt som när det gäller relationen till den matematiska vetenskapen kan man därför tala om ett tydliggörande av skillnaden mellan

[36] Detta gäller givetvis snarare algebran än aritmetiken. Se förorden i: Björling, *Elementarlärobok i Algebra*; Henrik Falck, *Practisk lärobok i arithmetiken med fullständig underrättelse om in- och utrikes mått, mål, vigt och mynt*, Upsala, 1830 och Forssell, *Algebra för Begynnare.*

skolans matematik och det omgivande samhället genom två motsatta tendenser: läroböckerna kom att fokusera på undervisningssituationen, samtidigt som de ekonomiska och tekniska sfärerna i samhället blev mer komplexa.

Dessa två processer av avgränsning av det matematiska stoffet måste givetvis knytas till den successivt ökande autonomin hos de institutioner inom vilka undervisningen bedrevs. Som jag beskrivit ovan kan man på ett sociologiskt plan se en rad mekanismer genom vilka den institution inom vilken undervisningen bedrevs i allt större utsträckning kom att få sätta sin egen agenda. Enkelt uttryckt kom det matematiska stoffet därmed att framställas med utgångspunkt från den funktion det skulle fylla inom denna institution.

Författaren som del av skolmatematiken

En aspekt av den grundläggande matematiska undervisningens förändring under andra halvan av 1700-talet vars betydelse jag tror inte bör underskattas rör relationen mellan författarna och deras böcker. Beckmarck skriver i förordet till sin *Utkast till föreläsningar i Algebra* att den är skriven ”på befallning”, och specifikt för att användas vid undervisningen på Karlberg.[37] Han poängterar också att boken inte innehåller något nytt. Initiativet att författa denna bok kom med andra ord inte från honom själv. Den skrevs för att fylla tämligen specifika institutionella behov.

Under 1800-talet blir detta allt vanligare och än viktigare: det var just de böcker som skrevs för att passa institutionella behov som blev populära och kom ut i många upplagor. I och med detta kan man inte bara säga att författarna blir instrument för den institution han skriver för, lika väsentligt tror jag är att författarna också kom att *se sig själva* som ett sådant instrument. Det blev vanligt att explicit motivera böckernas utformning med hänvisning till institutionen.

Man kan, menar jag, tolka detta som upprättandet av en sorts distans mellan författarens personliga övertygelser och den bok han skriver, vilken kan förklara ett drag hos de matematiska läroböckerna som blir allt mer framträdande under 1800-talet, nämligen en separation mellan den verklighet som läroböckerna utgår från och beskriver och verkligheten utanför skolan.

Låt mig illustrera detta fenomen med hjälp av *Grunderna till Arithmetiken* (1816) författad av Carl Eric Kjellin. Kjellins närmar sig undervisningen så att säga *från matematiken*.[38] Han tar inte undervisningen som utgångspunkt, utan försöker istället anpassa matematiken efter vad han tycker man kan förvänta sig av en bok ämnad för undervisning av ungdomar. Han vill, kan man säga,

[37] Beckmark, *Utkast* (baksidan av titelbladet).

[38] Carl Eric Kjellin, *Grunderna till Arithmetiken, innehållande, jemte dess Tillämpning till alla vanligen förefallande Räkningar, åtskilliga andra, Genvägar till deras förenklande, särdeles genom Decimal-Räkningen, samt Flera Reductions-Tabeller*, Stockholm, 1816.

visa hur matematiken kan komma till sin rätt. Därför inkluderar han i sin *Grunderna till Arithmetiken* en mängd stoff som inte finns i till exempel Beckmarcks *Aritmetik*.[39] ”Intet af hvad man i ett Arbete af detta slag äger rätt att fordra är förbigånget”, skriver han, men ”åtskilligt deremot, som i andra saknas, skall finnas här med intaget”.[40] Detta för att visa ”hvad tillgångar Arithmetiken i sjelfva verket äger, om man förstår att begagna den”.[41] Särskilt lyfter han fram fördelarna med decimalräkning.[42] Han lägger också stor vikt vid användandet av logaritmer. Vad som i synnerhet signalerar Kjellins distans till de institutioner inom vilka undervisningen bedrevs och till den skolmatematiska tradition som nu höll på att växa fram, är hans sätt att förhålla sig till *Regula de Tri*. Man skall, skriver han nämligen, tänka efter innan man använder *Regula de Tri*, för ”Stundom beror likväl en frågas besvarande af en sådan mängd omständigheter, att den ej kan besvaras”. Kjellin exemplifierar:

> Om någon frågade: Huru många Tunnor frukt man kan vänta sig af ett träd, hvars tjocklek och höjd vore gifna? – Så beror väl detta antal af trädets tjocklek och höjd; men det beror tillika af en mängd andra omständigheter, omöjliga att noga determinera. Det löjliga i denna uppgift består då deri, att man vill såsom enkelt behandla ett oändeligen sammansatt förhållande.[43]

Det intressanta är att denna typ av reflektioner faktiskt kom att uteslutas från diskussionen i samma rörelse som böckerna allt mer kom att utformas för att användas i speciella institutionaliserade sammanhang. Kjellin är inte, verkar det som, knuten till den institution han skriver för; han förhåller sig till två väsentligen separata entiteter: matematiken och undervisningen – det är *han* som genomför anpassningen av matematiken till undervisningen, och detta, inser han, är ett ganska riskabelt företag.

Det är inte svårt att se varför författare som (mer eller mindre) skrev ”på befallning” inte tog upp denna typ av kritiska reflektioner: de efterfrågades inte! Denna så att säga tjänstemannamässiga disidentifikation med den egna produkten spelade, menar jag, en viktig roll för formandet av skolmatematiken.

Såväl på Kungliga krigsakademin på Karlberg, i Cambridge och vid institutionerna för militär utbildning i Frankrike hördes protester mot att de matematiska studierna inte var till någon praktisk nytta.[44] Mycket talar för att en insikt om att de matematiska studierna i högst begränsad omfattning ledde

---

[39] Ibid; Beckmark, *Arithmetik (1795)*.
[40] Kjellin, *Grunderna till Aritmetiken*, förord.
[41] Ibid, förord.
[42] Ibid, s. 106.
[43] Ibid, s. 186.
[44] R. W. T. Gunter, *Early Science in Cambridge* (Oxford: Oxford University Press, 1937): 63, citerad i Gascoigne, ”Mathematics and Meritocracy”, s. 566.

fram till en praktiskt användbar kompetens var tämligen utbredd. Man visste, tror jag, att studierna hade en huvudsakligen social eller symbolisk betydelse (det vill säga att det enda som betyder något är att klara examen, etcetera). Min poäng är att denna cyniska distans redan från början speglades av en motsvarande distans i produktionsledet: inte heller läroboksförfattarna trodde – i en viss mening – på de böcker de författade.

Det till synes paradoxala är emellertid, menar jag, att denna frånvaro av tro inte utgjorde något hinder för de matematiska studiernas symboliska effektivitet. Tvärtom lämnade det på ett plan oengagerade förhållandet till de matematiska studierna (att man är skeptisk till de anspråk som var förbundna med matematiken, på dess praktiska nytta, övningarnas realism, etcetera) utrymme för just den typ av engagemang som de matematiska studiernas sociala funktion krävde, nämligen ett ägnande av tid och energi på att klara examen. Om, säg, den tid olika kadetter vid Kungliga krigsakademin ägnade åt de matematiska studierna var förbundna med deras respektive personliga tro på studiers värde, skulle den givetvis ha varierat kraftigt mellan olika individer. Men i den mån de diskursiva anspråken på matematiken kunde identifieras som självklart falska lämnade detta utrymme för ett lika självklart engagemang, fast på helt andra grunder. Det var, menar jag, just genom sådana på ett plan halvhjärtade, men på ett annat plan helhjärtade, matematiska studier som dessa studenters sociala och fysiska verklighet, så att säga bakom deras rygg, blev en matematisk verklighet. De meritokratiska systemen spelade med andra ord en viktig roll för att utsträcka matematikens *blick* (jmf. s. 14-14 ovan).

Skolmatematikens inre gränser

Den successiva avgränsningen av en särskild skolans matematik innefattade även en uppdelning av detta skolmatematiska stoff i olika ”kurser” och ”ämnen”. Det är viktigt att komma ihåg att dessa indelningar inte hade någon förankring i den matematiska vetenskapen. Detta gäller i synnerhet särskiljandet mellan aritmetik och algebra, samt uppdelningen mellan analytisk och euklidisk geometri. Tvärtom är det tämligen uppenbart hur uppdelningen av matematiken i olika ämnen hängde samman med inrättandet av examinationer: kurserna kom att utformas med utgångspunkt från den examen de ledde fram till.[45] Läroböckerna i aritmetik befriades i stor utsträckning från algebra. Logaritmer lyftes i sin tur ut från läroböckerna i algebra. Den euklidiska geometrin bevarades som en autonom helhet, fri från inblandning av algebraiska bevis.

Av central betydelse är att matematikens olika ämnen ordnades hierarkiskt. De kunde därmed konstituera en trappa från det enklare till det

[45] Att examinationerna bestämde undervisningen var något som orsakade kritik. Angående Tripos se ibid, s. 556.

mer komplicerade. Denna trappa var strukturerad med utgångspunkt både från den matematiska vetenskapen och eleven: stegen skulle följa på varandra i termer av abstraktion, men lika viktigt var att de blev successivt svårare, så att man bara kunde klara av en examen på ett visst trappsteg efter att klarat av de föregående trappstegens examinationer. Det matematiska stoffets hierarkiska struktur fungerade som ett stöd för den sociala hierarki inom vilken de matematiska studierna bedrevs. Genom de väl avgränsade matematiska kurserna och deras examinationer kunde adepternas väg från *outsiders* till *insiders* kontrolleras och regleras inom de meritokratiska systemen.

Fortfarande var det dock, vad gäller svenska förhållanden, i det närmaste bara studenterna vid Kungliga krigsakademin på Karlberg som ägnade sig åt denna typ av matematiska studier kring sekelskiftet 1800. Detta innebär att den hegemoniska fixering av betydelser som dessa studier ledde till bara hade giltighet inom en högst begränsad del av det svenska samhället. Under 1800-talets första hälft kom dock de undervisningspraktiker jag beskrivit i det här kapitlet att – i mer eller mindre modifierade former – flytta ut till andra institutionella sammanhang: till de skolor för folkundervisning som nu började inrättas, till Nya Elementarskolan i Stockholm (bildad 1828) och så småningom till läroverken mer allmänt. Denna rörelse står i fokus för nästa kapitel.

8. Skolmatematikens utgångspunkter

Kring sekelskiftet 1800 kretsade studier vid läroverket huvudsakligen kring teologi och klassiska språk.[1] Under 1800-talets första hälft restes i Sverige krav på att plats i läroverket även skulle beredas åt ”realbildande” ämnen, som moderna språk, naturvetenskap och matematik.[2] Diskussionen resulterade under första halvan av 1800-talet i en rad mindre förändringar av läroverkets organisation. Ett första större steg mot en mer betydande förändring av balansen mellan de klassiska språken och realbildande ämnen togs 1859, då en relativt detaljerad stadga beskrev hur studierna skulle delas in i två linjer: en linje för de som ”läsa klassiska språk” och en för dem som ”icke läsa klassiska språk” – senare kallad reallinjen. I huvudsak behöll sedan läroverket denna form fram tills dess att läroverket 1905 delades i realskola och gymnasium. Redan det faktum att realskolan fick namnet *real*skola visar att de realbildande studierna då fått huvudrollen, samtidigt som de studier av klassiska språk som stod i centrum kring sekelskiftet 1800, hade förpassats till läroverksstudiernas periferi.

I språkstudiernas ställe trädde matematiken in. Det första skedet av denna process kan beskrivas som en flytt av de matematiska studier som sedan 1792 bedrivits vid krigsakademin på Karlberg till en rad nya institutionella sammanhang. Esbjörn Larsson, vars redogörelse för kungliga krigsakademin på Karlberg spelade en viktig roll i det föregående kapitlet, beskriver hur studier vid krigsakademin under 1800-talets första hälft i allt större utsträckning kom att leda till karriärer utanför den militära sfären.[3] Han beskriver också hur allt fler ansökte om att få studera vid krigsakademin, något som slutligen ledde till att den elementära delen av studierna från och med 1835 förlades utanför själva krigsakademin (detta som ett försök att öka genomströmningen genom att förkorta studierna).[4] De skolor inom vilka ungdomar förbereddes för antagning till krigsakademin var bara en av flera nya typer av institutioner inom vilka det bedrevs grundläggande matematiska studier. Hit hörde även de sedan 1820 inrättade apologistskolorna samt Nya Elementarskolan i

---

[1] Läroverkskommittén, *Betänkande afgifvet den 8 december 1902 af den för utredning af vissa frågor rörande de allmänna läroverken den 26 maj 1899 i nåder tillsatta kommitté*, Stockholm, 1902, Kapitel 1: ”Historik” , s. 2.

[2] Se Niléhn, *Nyhumanism och medborgarfostran* och Wilhelm Sjöstrand, *Pedagogikens historia*, band III:2, Lund, 1966, s. 52–197.

[3] Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, s. 98.

[4] Ibid, s. 197.

Stockholm, vilken bildades 1828, med krigsakademin som förebild både vad gäller studiernas matematiska innehåll och undervisningens form (man använde nämligen växelundervisningssystemet).

Fokus i det här kapitlet ligger på vad som hände med de matematiska studierna i denna rörelse, från den specifikt militära kontexten vid krigsakademin (och sedan 1818 vid artillerihögskolan på Marieberg) till skolor som Nya Elementarskolan i Stockholm, där studierna istället syftade mot en ny typ av "medborgerlig bildning". Kronologiskt innebär detta att fokus ligger på 1830-talet och början av 1840-talet. Under detta dryga decennium publicerades en rad läroböcker som skulle få enorm betydelse för skolmatematikens fortsatta utveckling.

Matematikens rörelse från den militära sfären till läroverket, skedde samtidigt som matematiska studier tog plats i en annan typ av institutioner, nämligen folkskolorna. Detta leder till en avgränsningsproblematik som jag här skall säga något kort om. De matematiska studiernas roll i folkundervisningen utgör temat för kapitel 9 nedan. Det är emellertid inte möjligt att helt hålla isär dessa två institutionella sammanhang. Genom 1820 års skolordning hade läroverket delats upp i två slags skolor: lärdomsskolor och apologistskolor. De senares syfte var att bibringa lärjungarna "medborgerlig bildning". Konsekvensen av denna delning blev dock inte att den medborgerliga bildningen så att säga flyttade in i ett nytt läroverk. Snarare kom apologistskolorna att betraktas som en sorts folkbildningsanstalter.[5] Att apologistskolorna hade lågt socialt anseende, samtidigt som matematiska studier spelade en viktig roll som grund för ett meritokratiskt system inom den militära sfären, talar för att matematiska studier – i synnerhet studier i aritmetik – inte hade någon entydig betydelse vid denna tid. Inom vissa institutioner (till exempel på Karlberg) kunde de betraktas som första steget på en väg mot symboliskt erkännande. Vid andra institutioner (apologistskolor och folkskolor) kunde de betraktas som en "låg" form av bildning, vilken kontrasterade mot "riktiga" läroverksstudier fokuserade på klassiska språk. Det går därför inte att dra någon skarp gräns mellan matematikens – och i synnerhet aritmetikens – behandling i (enkelt uttryckt) folkskola respektive läroverk.

En viktig sida av denna avgränsningsproblematik har att göra med de inflytanden från utlandet som man kan se i den svenska diskussionen vid denna tid. Det var framför allt i Frankrike och England som matematiska studier tidigt tog plats som en grund för meritokratiska system. I Tyskland var tvärtom de klassiska språkens ställning fortsatt stark under merparten av 1800-talet. Från Tyskland kom emellertid ett annat inflytande, som inte var direkt knutet till matematiken, men som inte desto mindre fick stor betydelse för skolmatematiken. Jag syftar här på de idéer om *bildning* som tog plats i Sverige under första halvan av 1800-talet. På flera sätt kan man se

[5] Läroverkskommittén, *Betänkande*, Kapitel 1: "Historik", s. 5.

detta inflytande i den skolmatematiska diskurs jag redogör för i det här kapitlet. Men då inflytandet var ännu tydligare i fråga om folkundervisningen väntar jag med att ta upp det särskilt till nästa kapitel, där folkundervisningen står i centrum.

Nedan beskriver jag först vad som hände med aritmetiken, i dess första rörelse mot att utgöra en form av medborgerlig bildning. I princip hände då två saker: regler och övningsuppgifter placerades i studiernas centrum, samtidigt som läroböckerna i stor utsträckning befriades från löpande text. När aritmetik blev något för en bredare, ”lägre”, allmänhet, som Carl Jonas Love Almqvist uttrycker det i förordet till en av sina läroböcker,[6] kom aritmetiken definitivt att förändras från något man lär sig genom att lyssna, läsa, tänka och öva, till arbetsinstruktioner följda av noga reglerat arbete med övningsuppgifter. Signifikativt är att det var nu som övningsuppgifternas svar – facit – skiljdes från presentationen av frågorna och placerades i ett särskilt häfte. Eleverna förlorade rätten och möjligheten att själva avgöra om de räknat rätt, och läroböckerna blev i ett slag betydligt mer lika de som används i dagens matematikundervisning.

Algebrans förändring var en annan. Som vi såg i förra kapitlet blev läroböcker i algebra allt längre under andra halvan av 1700-talet och början av 1800-talet. Denna process tog nu ytterligare ett steg. I sin *Elementar-Lärobok i algebra* lade E. G. Björling ut algebran som en väg för eleverna.[7] Med hjälp av förklarande text, regler, tabeller och inte minst övningsexempel förde han dem framåt längs denna väg. Algebran som skolämne fick i och med detta skarpare konturer. Den inleddes med *bokstavsräkning*, för att så småningom leda till en förmåga att lösa *första och andra gradens ekvationer*.

Geometrin utgör här ett märkligt undantag. För även om det skrevs en rad nya läroböcker även i geometri fick inte dessa böcker på alls samma sätt som sina motsvarigheter inom aritmetik och algebra konsekvenser på längre sikt. Euklides *Elementa* – i mer eller mindre modifierade former – kom att ligga fast som utgångspunkt för grundläggande studier i geometri ända fram till den nya matematikens genombrott på 1960-talet.

Aritmetik

Bland de läroböcker i aritmetik som publicerades under 1830-talet var det särskilt en som kom att få ofantlig betydelse för skolmatematikens fortsatta utveckling i Sverige: kyrkoherden Per Anton von Zweigbergks *Lärobok i Räknekonsten med talrika öfningsexempel*.[8] Den publicerades första gången

[6] Carl Jonas Love Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, Stockholm, 1834 [1832], Företal.
[7] Björling, *Elementar-lärobok i Algebra.*
[8] Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten.*

1839, och kom sedan ut i en mängd upplagor en bra bit in på 1900-talet. För den skolmatematiska diskussionen blev den en obligatorisk referenspunkt. Den utgjorde ett paradigm för läroböcker i aritmetik under andra halvan av 1800-talet, på samma sätt som Agrelius fungerade som ett paradigm för räknelärorna under 1700-talet.

Zweigbergks bok är disponerad som en räknelära. Den inleds med ett avsnitt motsvarande ”Numeratio”. Sedan följer de fyra räknesätten i hela tal, de fyra räknesätten i bråk (och decimalbråk), *Regula de Tri* med tillämpningar, för att avslutas med några korta avsnitt om ”digniteter och rötter”.

Vad som skiljde boken från sina föregångare är den centrala plats Zweigbergk gav å ena sidan *regler* å den andra *övningsuppgifter*. Dessa två typer av innehåll dominerar Zweigbergks lärobok dels i kvantitativ bemärkelse såtillvida att reglerna och övningsuppgifterna fyller merparten av sidorna. Än väsentligare är emellertid att de utgör bokens strukturerande princip, den stomme kring vilket allt övrigt innehåll fördelar sig. Den löpande texten ingår i form av *inledningar* – före reglerna, och *anmärkningar* – insprängda mellan reglerna.

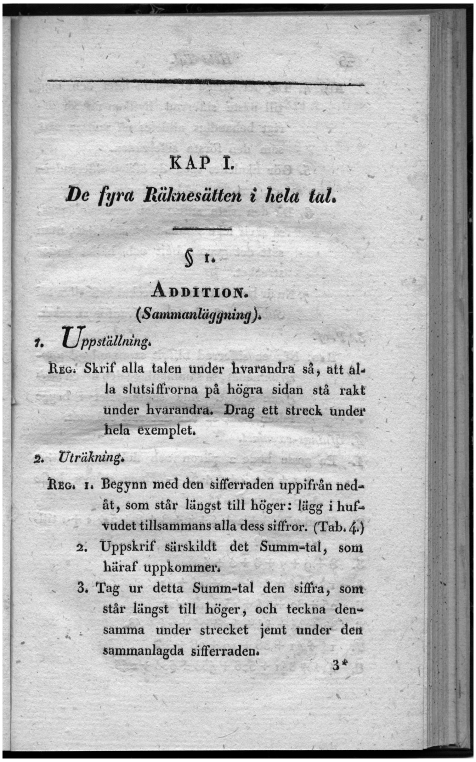
Mitt första syfte med det här avsnittet är dels att i möjligaste mån visa dels hur reglerna och övningsuppgifterna i de nya läroböckerna utgjorde en tämligen logiskt sammanhängande helhet, dels att visa hur denna helhet motiverades med hänsyn till överväganden rörande de matematiska kunskapernas natur, lärjungarnas förutsättningar och undervisningens villkor. Ett andra syfte är att i någon mån förklara varför det var just Zweigbergks bok som fick stor spridning, snarare än någon av de andra snarlika böcker som publicerades ungefär samtidigt. Min hypotes är i korthet att denna bok, genom att ha en tydlig disposition och vara synnerligen välskriven, utgjorde ett flexibelt undervisningsredskap möjligt att använda i en mängd olika institutionella sammanhang. Detta till skillnad från övriga läroböcker, vilka var mer specifikt utformade med utgångspunkt från en eller annan idé om undervisningens mål och anpassad för särskilda praktiska villkor.

Regler

En bok, vilken liksom de flesta andra *inte* kom att sätta agendan för den svenska skolmatematiken under andra halvan av 1800-talet, är Carl Jonas Love Almqvists *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik* från 1832.[9] Tillsammans med hans *Lärobok i geometrien* är denna bok ändå intressant av två anledningar: För det första på grund av att Almqvist i sina förord till dessa böcker på ett slagkraftigt sätt presenterar idéer som delades av många författare av läroböcker i matematik på 1830-talet. För det andra på grund av de utgör tämligen kompromisslösa realiseringar av dessa idéer. Almqvists

[9] Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik.*

Räknekonst innehåller nästan *bara* regler och övningsuppgifter. Figuren nedan visar en typisk sida:



KAP I.

De fyra Räknesätten i hela tal.

§ 1.

ADDITION.

(Sammanläggning).

1. *Uppställning.*

REG. Skrif alla talen under hvarandra så, att alla slutsiffrorna på högra sidan stå rakt under hvarandra. Drag ett streck under hela exemplet.

2. *Uträkning.*

REG. 1. Begynn med den sifferraden uppifrån nedåt, som står längst till höger: lägg i hufvudet tillsammans alla dess siffror. (Tab. 4.)

2. Uppskrif särskildt det Summ-tal, som häraf uppkommer.

3. Tag ur detta Summ-tal den siffra, som står längst till höger, och teckna densamma under strecket jemt under den sammanlagda sifferraden.

3*

Figur 2. Inledningen till avsnittet om addition i Almqvists *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*. Bilden visar andra upplagan från 1834.[10]

Vi ser här hur Almqvist inleder sitt avsnitt om de fyra räknesätten i hela tal med rubriken "uppställning". Det som i räknelärorna i och för sig spelar en viktig roll, får här spela huvudrollen. Och den löpande text som i räknelärorna leder läsaren framåt är här helt utesluten. Almqvist är mer extrem än Zweigbergk som, även om han placerar reglerna i centrum, inte helt uteslutit den löpande texten. Zweigbergks framställning liknar i flera avseenden Forssells på så sätt att man i hans bok kan följa en sorts dialog mellan en "föreläsande" författare, och en läsare som skjuter in frågor och kommentarer. Zweigbergk presenterar även, liksom räknelärorna, flera uträknade och kommenterade exempel. För att ge en tydlig bild av Almqvists regler – vilka kan fungera som en sorts idealtyp för det framställningssätt som

[10] Almqvist, Carl Jonas Love, Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik, Stockholm, 1834 [1832], s. 3.

är baserat på regler och övningsuppgifter – följer här ett citat av *hela* Almqvists avsnitt om multiplikation i hela tal:

1. Uppställning.
Reg. Skrif Multiplikanden ofvanför Multiplikator. Drag ett streck under hela exemplet.

2. Uträkning.
Reg. 1. Begynn på höger hand och gå allt [sic] åt venster. Tag den *första* (d.v.s. den längst åt höger varande) siffran i Multiplikator och multiplicera dermed den *första* siffran i Multiplikanden. (Tab. 7.) [en multiplikationstabell]
2. Uppskrif särskildt det Produkt-tal, som deraf uppkommer.
3. Tag ur detta Produkt-tal den siffra, som står längst till höger, och uppteckna den under strecket, rakt under den siffra i Multiplikator, hvarmed multiplierades; men, var något mera öfrigt i Produkt-talet, så behåll det i minnet.
4. Multiplicera nu med *samma* siffra i Multiplikator den *andra* siffran i Multiplikanden, och addera dertill det, som enligt Reg. 3 var behållet i minnet.
5. Af det tal, som härigenom erhålles, upptecknas åter högre siffran under strecket (och venster om den, som förut står der); men, var något mera der öfrigt, så behålles det i minnet, likasom förut.
6. På samma sätt fortfares med alla siffrorna i Multiplikanden; och, då den sista blifvit multiplicerad, nedskrifvet hela Produkt-talet.
7. Nu tages den andra siffran i Multiplikator, och dermed multipliceras åter hela Multiplikanden, alldeles på samma sätt som förut är beskrifvet om den första; hvarvid märkes, att den Produkt-rad, som nu erhålles, skrifves under den förra, men så, att *första* högre siffran i sednare Produkt-raden sättes under den *andra* siffran i förra raden.
8. Sedan alla siffror i Multiplikator blifvit genomgångna, skola lika många Produkt-rader finnas, som det är siffror i Multiplikator; och under alla raderna drages ett streck.
9. Alla Produkt-raderna adderas tillsammans: hvarvid märkes, att additionen här skall ske i den ordning raderna nu redan ega, utan omflyttning.
10. Den summa, som genom additionen erhålles, är *Produkten* av Multiplikator och Multiplikand.

3. *Prof.* (kan nytjas, sedan division inhemtats).
Reg. Dividera produkten med multiplikator: blir qvoten lika med multiplikanden, så var det rätt räknadt.

4. Öfnings-Exempel.
81. En gränd hade genom sparsamhet förvärfvat 213 R:dr; då lofvades honom att beloppet skulle gifvas 2 gånger: huru mycket fick han inalles?
82. En annan lofvade att gifva 213 r:dr 3 gånger: huru mycket blef det då?
83. 983*3.
[...]
119. 2001000598 * 73690
120. 98723456 * 7896542 [11]

[11] Ibid, s. 34–37.

Av det ovanstående framgår att Almqvists regler är synnerligen detaljerade. Med ett ord som kom att användas ofta i den skolmatematiska diskussionen under andra halvan av 1800-talet kan man säga att Almqvist gör det möjligt för sin läsare att utföra multiplikationen *mekaniskt*, utan att tänka. Multiplikation framträder här som en algoritm. Alla steg, konceptuella så väl som praktiska, är beskrivna. I en mening kan man säga att det är en sorts ”räknekonst” Almqvist konstituerar. Å andra sidan, vilket givetvis har avgörande betydelse, så innebär uteslutandet av den löpande texten – liksom uteslutandet av alla sorttabeller och andra detaljer från det borgerliga livet – att denna räknekonst i så fall inte kan sägas vara en räknekonst för det praktiska livet utanför skolan. Snarast konstituerar Almqvist en slags skolans räknekonst – en uppsättning regler för hur de räkneuppgifter man möter i skolan skall hanteras, en rik uppsättning sådana uppgifter – givetvis helt anpassade till bokens regler – samt kriterier för vad som utgör en riktig tillämpning av reglerna (nämligen facit).

Typiskt för den struktur som förenar Almqvist och Zweigbergks böcker är att reglerna kommer först och övningsuppgifterna sedan. Detta förtjänar att påpekas eftersom ordningen mot slutet av 1800-talet kom att omvändas, så att övningarna kom först och reglerna sedan (se s. 14ff nedan). Frågan om denna ordning är tämligen intrikat och den resulterade i hetsiga diskussioner på 1880-talet.[12] Alla var nämligen redan på 1830-talet tämligen överens om att övandet var det centrala och att det var detta som ledde till kunskaper, medan det faktum att man lärt sig en regel, inte kunde likställas med att ha lärt sig matematik. Men hur skulle lärjungarna kunna öva, om de inte först fick regeln? Reglerna framstod som en praktisk nödvändighet. En stor del av diskussionen under andra halvan av 1800-talet handlade om reglerna och hur de kunde undvikas. Vid sekelskiftet 1900 hade en lösning tagit form: den ”skriftliga heuristiken”. Den bestod i att man fyllde läroböckerna med ett mycket stort antal övningsuppgifter, så ordnade att svårigheterna introducerades i ytterst små steg – i idealfallet så små steg att lärjungarna leddes framåt mot allt större kunskaper, utan att någonsin se en regel innan de genom övning förstått dess tillämpning.[13]

Någon skriftlig heuristik var det inte fråga om i Zweigbergks och Almqvists böcker. Liksom räknelärorna utgick de från att man skulle lära sig regeln först. I räknelärorna åtföljdes alltid regler av kommenterade exempel, och sedan av okommenterade exempel med endast svaret tryckt vid sidan av

[12] Se Carl Alfred Nyström, ”J. E. Johanssons 'Räknelära' och folkskolekommitterades 'utvecklande metod' m.m.”, *Svensk Läraretidning*, 1888 och Carl Alfred Nyström, ”Vidräkning med kommitterade för granskning af folkskolans läroböcker”, *Svensk Läraretidning*, 1888.

[13] Ett viktigt namn i detta sammanhang är Karl Petter Nordlund, se nedan s. 317–320 samt för en intressant diskussion av Norlunds idéer: Birger Rollin, ”Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1891, och Nordlunds svar i ”Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen. Svar på Herr Rollins uppsats i Ped. Tidskrift 1891:10” och ”Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen. Svar på hr Rollins uppsats i fjärde häftet af pedagogisk tidskrift för år 1892.” båda i *Pedagogisk Tidskrift*, 1892.

frågan, för att man skulle kunna pröva sin förståelse. De "Öfnings-Exempel" som följer efter Almqvists regler var uppenbarligen avsedda att fylla en annan funktion, vilken jag strax skall återkomma till.

Zweigbergks framställning av reglerna är inte fullt lika schematisk som Almqvists. Han beskriver "Uppställningen" i löpande text, är mer utförlig i sin beskrivning av själva "reglerna" (vilka dock liksom hos Almqvist är indelade i punkter), han exemplifierar ofta, och har dessutom rader av insprängda "anmärkningar" i mindre typsnitt, som ger extra, eventuellt behjälplig information. Inte desto mindre står som sagt reglerna och övningarna i centrum även i Zweigbergks lärobok.

Varför gav Almqvist och Zweigbergk sina läroböcker i aritmetik denna säregna form? Almqvist skriver i sitt förord om "behofvet för första undervisningen i detta ämne, att ega en Exempel-bok, tillika åtföljd af korta, klara och bestämda Reglor". Renodlade "exempelsamlingar" fanns, skriver han, att tillgå. Men dessa innefattade vanligen inte regler, "emedan man ansett dem böra hemtas ur sjelfva läroboken". Problemet var att detta var lättare sagt än gjort, "emedan de i dem finnas inblandade i de vettenskapliga beskrifningarne, och stundom ej stå att redigt erhålla".[14] Uppenbarligen syftar Almqvist här på räknelärornas framställningssätt (minns att Agrelius *Institutiones Arithmetica* hade tryckts om så sent som 1798 och att sista upplagan av Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica* kom ut 1830), där reglerna, precis som han skriver, är sammanvävda med den löpande texten.[15] Vad lärarna behövde var regler och övningar – och detta var vad Almqvist i sin *Räknekonst* och Zweigbergk i sin *Lärobok*, försåg dem med.

Mer allmänt innebar detta framställningssätt en kraftig begränsning av innehållet i jämförelse med böcker som till exempel Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica* eller Forssells *Arithmetik för begynnare*.[16] Även denna begränsning finns motiverad i förordet till Almqvists lärobok. Han skriver:

> Min mening med denna riktning för läroboksskrifningen är för ingen del den, att stora djupsinniga och egentligen vetenskapliga verks utgifvande skulle vara öfverflödigt. Tvertom. Men jag tror uppriktigt, att just då man slår an den methoden, att för den lägre och talrikaste allmänhetens räkning författa skrifter, så mycket som möjligt af blott praktisk syftning, och der det låter sig göra, snarare liknande sliding rules, utan inblandning af sådant, som denna allmänhet i alla fall icke kan förstå; så skola deremot, å andra sidan, rent och på djupet gående arbeten mycket mer kunna egna sig åt theorien, oblandad och föra fram vetenskapen ett steg längre, genom att i sådant skick utgifvas till deras tjenst, hvilka uteslutande öfverlemna sig åt forskningar, och icke sträfva i det yttre lifvet. Om jag icke bedrager mig, hafva författare af

[14] Carl Jonas Love Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, Stockholm, 1837 [1832], Företal.
[15] Agrelius, *Institutiones arithmeticae*; Andersson, *Arithmetica Tironica*.
[16] Andersson, *Arithmetica Tironica*; Forssell, *Aritmetik för Begynnare*.

> förriga läroböcker förbisett denna åtskillnad mer än billigt, och man har derföre bekommit arbeten, hvarken väl inrätade för den lärde eller för den olärde. Månne icke det bästa är, att vara ganska låg, der sådant behöfves, för at i stället kunna vara rätt hög, der det skall vara?[17]

Här blir det väldigt tydligt hur läroböckernas utformning speglade den kontext inom vilken de var tänkta att användas. Almqvist skrev för ”den lägre och talrikaste allmänheten” och av denna anledning såg han sig nödgad att utesluta allt det som denna allmänhet ”i alla fall icke kan förstå”.[18] Jag tror dock att detta tämligen specifika syfte och det säregna framställningssätt det resulterade i, var en viktig orsak till att Almqvists bok inte blev särdeles populär utanför den institution för vilken den var skriven – Nya Elementarskolan i Stockholm, där Almqvist var rektor.[19] Den mångfald av sammanhang inom vilka aritmetiska studier vid denna tidpunkt bedrevs behövde en bok som innehöll mer än det skelett av regler och övningar som Almqvist erbjöd.

Ett viktigt sätt på vilket Zweigbergks lärobok kom att sätta agendan för den svenska skolmatematiken var genom den specifika uppsättning tillämpningar av *Regula de Tri* som han inkluderade i sin bok. I detta avseende skiljer sig Zweigbergks lärobok från Almqvists. Almqvist valde nämligen att helt utesluta tillämpningarna av *Regula de Tri*. Även detta motiverar han i sitt förord:

> Förf. har uteslutit alla de särskilda afhandlingar om Räknesätt, som äro en tillämpning af Regula de tri eller Proportionsläran, ehuru de annars i aritmetiska läroböcker bruka upptaga ett betydligt rum, såsom Rabatt, Baratt, Thara, Fursti, Regula soceietatis, alligationis m. m. Hvar och en, som ingår i ett yrke, der kunskap derom behöfs (i synnerhet handel), måste i alla fall enkom studera sin sak, och inhemta en närmare kännedom om dessa ämnen, än som i en lärobok för hela almänheten står att bekomma. För denna allmänhet deremot behöfvas dessa underrättelser icke, och skulle blott göra boken onödigtvis stor och dyr.[20]

Det finns anledning att lägga detta stycke på minnet. Almqvist riktar här en kritik mot vad som under resten av 1800-talet kom att utgöra den aritmetiska undervisningens stomme – tillämpningarna av *Regula de Tri*. Dessa tillämpningar fungerade, kan man säga, som scheman för matematikens tillämpning; de bestämde i vilka sammanhang och på vilka sätt som matematiken kunde tillämpas. En lockande metafor är att betrakta dessa tillämpningar som skolmatematikens motor – och därmed verkligheten som

[17] Almqvist, *Lärobok i geometrien*, Företal.
[18] Ibid, Företal.
[19] Almqvist var rektor för Nya Elementarskolan 1829–1841.
[20] Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, Företal.

ett slags bränsle vilket sögs in i läroböckerna och därmed också i klassrummen och eleverna.

Zweigbergk var i detta avseende räknelärorna relativt trogen. Man kan följa en tämligen kontinuerlig utveckling från Agrelius, via Beckmarck och Forssell, till Zweigbergk där tillämpningarna av *Regula de Tri* får en allt mer schematisk utformning. Algebra får en liten men viktig plats i framställningen, uppdelningen mellan enkel och sammansatt *Regula de Tri* får en allt mer självklar roll som strukturerande princip, antalet olika tillämpningar blir färre och de som blir kvar får en allt mer stereotyp karaktär av scheman för att generera ”verklighetslika” situationer, snarare än beskrivningar av metoder för att hantera verkliga situationer.

Det intressanta är att denna utveckling kom att avstanna efter publikationen av Zweigbergks *Lärobok*. Helt andra frågor än räknesättens eventuella bristande relation till verkligheten utanför skolan hamnade i diskussionens centrum efter 1830-talet. För läroverkets del till exempel motsättningen mellan latinet och realbildningen. Folkskolans talesmän hade för sin del fullt upp med frågor rörande skolornas ekonomiska och praktiska villkor samt ordnandet av en ändamålsenlig lärarutbildning. Det kan av denna anledning vara värt att klargöra vari de räknesätt bestod, vilka genom Zweigbergk kom att tas för givna som de aritmetiska studiernas slutpunkt. I tabellen nedan förklaras därför innebörden av de sex ”räknesätt” som hade egna avsnitt i Zweigbergks *Lärobok i räknekonsten.*[21]

Tabell 5. De tillämpningar av *regula de tri* som delvis på grund av Zweigbergks *Lärobok i Räknekonsten* kom att spela en central roll inom den svenska skolmatematiken från och med 1840-talet.[22]

Räknesätt	**Innebörd**
Intresseräkning	Motsvarar dagens procenträkning. I analogi med skillnaden mellan enkel och sammansatt *Regula de Tri* skiljer Zweigbergk mellan enkel och sammansatt intresseräkning, där den sammansatta ”uppkommer, då afseende äfven göres på den tid, Kapitalet varit utlånadt eller användt”.[23] Zweigbergk framställer intresseräkningen som en tillämpning av *Regula de Tri*, där kapitalet och tiden utgör ”orsaker” och intresset ”verkan”.
Rabatt-Räkning	Uppkommer då en person ålagts att betala en viss summa efter en viss tid, men istället betalar den genast. Han skall då nämligen få en viss ”rabatt” som motsvarar den räntevinst som betalningsmottagaren kan göra tack vare att han fått pengarna tidigare än vad som avtalats. Zweigbergk förklarar detta med hjälp av lite algebra, som emellertid sätts in i *Regula de Tri*ns övergripande ramverk av orsak och verkan: ”Således är ***k*** [den summa som genast betalas] att anse såsom orsak till ***K*** [det större belopp som enligt avtalet skulle betalas efter en viss tid], i samma förhållande som ***100*** till ***100 + tp*** [tiden gånger den procentsats

[21] Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten.*

[22] Ibid.

[23] Per Anton Von Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel*, Stockholm, 1843 [1839], s. 115.

som motsvarar räntan]".[24]

Betalningsterminers reduktion

Detta avsnitt följer i Zweigbergks bok direkt efter avsnittet om rabatträkning. Trots det för Zweigbergk inte in detta räknesätt i *Regula de Tri*ns övergripande ramverk. Istället nöjer han sig med en algebraisk förklaring av problemet, för att därefter direkt (ens utan ett kommenterat exempel!) ange tio övningsuppgifter. Antag att ett antal belopp, a, b och c, skall betalas vid olika tidpunkter, t, t', t''. Vad man söker är då, givet en räntesats p, en tidpunkt T, då hela summan kan betalas "utan att hvarken gäldenären eller fordringsägaren derpå förlorar".[25] Det hela mynnar ut i en formel för uträkning av "medelterminen", vilken motsvarar ett medelvärde av beloppen viktade med tidsintervallen tills dess att de skulle betalas.

Bolagsräkning

Kallades tidigare för regula societatis och senare allt oftare för delningsräkning.[26] Problemet som detta räknesätt löser uppstår till exempel när ett antal personer gått in med olika insatser i ett företag, och detta företag sedan skall säljas. För en rättvis fördelning av vinsten skall varje person få en del av denna vinst som står i samma förhållande till vinsten, som hans insats gjorde till summan av insatserna. Om till exempel A gick in i ett företag med 100 kronor, och B med 400, och företaget sedan säljs för 10 000 kronor, då skall A få 2000 och B 8000 kronor eftersom $\frac{100}{500} = \frac{2000}{10000}$ och $\frac{400}{500} = \frac{8000}{10000}$. Zweigbergk redogör även för sammansatt bolagsräkning. Då bolagsräkningen är sammansatt kompliceras räknandet av att insatserna har olika karaktär. Till exempel kan det handla om ett gemensamt köp av åkermark, där de olika delägarna köpt jord av olika kvalitet, som därför bidrar i olika hög grad till avkastningen. Zweigbergk skriver att "Bolags-Räkning kallas ***sammansatt***, då flera tal äro gifna, som gemensamt bestämma hvarje lotts förhållande till de öfriga. Dessa tals produkt utgör då den ifrågavarande lottens rations-tal".[27]

Alligationsräkning

Kom senare allt oftare att kallas för blandningsräkning. "Alligations-Räkning lärer att besvara sådane frågor, som kunna förekomma, då flera ämnen af olika halt eller värde hopblandas till en massa".[28] Det kan till exempel handla om att beräkna priset på en tunna, som innehåller en viss mängd vete blandad med en viss mängd råg. Till detta räknesätt för Zweigbergk även frågor rörande enskilda beståndsdelars värde eller mängd, då det totala priset är känt. Liksom när det gäller betalningsterminers reduktion bemödar sig Zweigbergk här inte om att göra *Regula de Tri* av beräkningarna, utan beskriver istället problematiken med hjälp av algebra.

Kedje-Räkning

Innebörden förklaras lättast med ett exempel: "Om 13 tunnor hvete äro i värde lika med 16 tunnor råg, men 5 tunor råg gälla så mycket som 7 tunnor korn, och 20 tunnor korn kosta lika mycket som 26 tunnor havre; huru många tunnor havre bör man då erhålla för 25 tunnor vete?"[29] Det är alltså fråga om att använda en kedja av förhållanden, för att säga något om förhållandet mellan den första och sista termen i denna kedja (i detta

---

[24] Ibid, s. 123.
[25] Ibid, s. 127.
[26] Roloff Andersson gör dessutom en mer detaljerad indelning i Skeppsdelning, Parters delning och Arvdelning (*Arithmetica Tironica*, s. 215).
[27] Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten*, s. 131 (fetstilen är Zweigbergks).
[28] Ibid, s. 137.
[29] Ibid, s. 143.

> exempel vete och havre). Detta räknesätt är en utveckling av tidigare räknelärors växelräkning. Räknesättet hade ursprungligen sin tillämpning på mynt, där det ibland inte fanns någon direkt växelkurs att tillgå eller man av någon annan anledning behövde gå vägen över andra myntsorter.[30] Tillämpningarna av kedjeräkningen är hos Zweigbergks dock i första hand hämtade från det som annars skulle kallas bytesräkning.[31]

Dessa räknesätt kom i praktiken att fungera som mallar för att ge verkligheten – framför allt samhällets ekonomiska sfär – en form som gjorde den möjlig att behandla i de skolmatematiska undervisningspraktiker som nu fick allt större spridning i det svenska samhället.

Övningsuppgifter

Zweigbergks och Almqvists böcker är utformade för en undervisning där lärjungarna först får regler som säger hur en viss typ av uppgifter kan lösas, för att sedan förses med mängd sådana uppgifter att arbeta med. Denna undervisningspraktik motiverades med hänvisning till att arbete med den typ av praktiska övningsuppgifter det här var fråga om skulle få en rad positiva konsekvenser för lärjungarna. Detta på ett liknande sätt som man tidigare argumenterat för att arbete med matematik i form av euklidisk geometri skulle få sådana konsekvenser.

I min redogörelse för dessa motiv skall jag vidga perspektivet något och även ta upp argument från några andra läroböcker. Framför allt skall jag ta upp läroböcker där inte regler – men väl övningsuppgifter – tillmättes en central betydelse. Detta gör det möjligt att ge en mer heltäckande bild av hur man vid denna tid såg på relationen mellan matematiska kunskaper och praktiskt övande.

Den enskilt viktigaste förändring som gör det möjligt att dra en skarp gräns mellan de läroböcker i aritmetik som står i fokus här och de som publicerats tidigare, är att övningsuppgifternas *facit* i de nyare böckerna skiljts från presentationen av frågorna. De placerades nu längst bak i boken, eller i ett särskilt häfte. Den första lärobok i matematik med särskilt facit jag kunnat hitta är Henrik Falcks *Practisk lärobok i arithmetiken* från 1830. I förordet till denna bok kan man läsa att:

> Bästa bruket af denna bok är visserligen, att läsaren, sedan han vid en uppgift medelst enskildt exempel rätt fattat frågans mening, då först om upplösningen rådfrågar boken, när egen uppfinning ej vill lyckas,

---

[30] Forssell, *Aritmetik för Begynnare*, s. 279.

[31] Samma typ av tillämpning återfinns t.ex. i Lithander, *Aritmetik och Euklides' Elementer*, s. 103–104. Förändringen av räknesättets tillämpning är karaktäristisk för den nya skolmatematiken: den representerar ett steg bort från praktiken – där denna form av kedjor knappast förekommer – mot en skolmatematik vars signum är uppgifter för övning. Kedjeräkningen är, tycks det mig, (som) gjord för kontruktion av övningsuppgifter.

> och blott så vida, som till densammas rigtning erfordras. Utom de anvista sätten att mångdubbla exemplen blir det för läraren lätt att af de här gifna bilda en mängd andra, till formen lika eller beslägtade. Att *svaren* på öfnings-exemplen så vid bokens *slut* i ett *serskildt Tillägg*, bör blifva ganska nyttigt.[32]

Flytten av övningsexemplens svar motiveras här med hänvisning till att ”läsaren” bör försöka lösa uppgifterna på egen hand, innan han rådfrågar boken. Av citatet framgår emellertid att boken även var tänkt att användas i en undervisningssituation, och det krävs ingen djupare analysförmåga för att inse att denna förändring av bokens struktur hänger samman med en förskjutning i synen på den matematiska undervisningens mottagare, som i och med detta fick ta mindre eget ansvar för sitt kunskapsinhämtande.

Förändringen hängde emellertid också samman med ett nytt sätt att tänka kring matematiska kunskaper i allmänhet. Man kom nämligen att tillmäta lärjungens *upptäckande* av ”de matematiska sanningarna” – upptäckande genom eget arbete – en allt större betydelse, något som givetvis understöddes av att uppgifternas svar gjordes mer svårtillgängliga.

I Falcks bok var svaren placerade sist i boken. Mer betydelsefull blev förändringen då svaren helt lyftes ur boken och placerades i ett särskilt häfte. Detta var den lösning Almqvist valt i sin *Räknekonst för begynnare* från 1832.[33] Även Zweigbergks *Lärobok i räknekonsten* har facit åtskilt från läroboken.[34] Man kan i denna förändring se hur böckernas utformning följer det sociala sammanhang inom vilket de användes. Mer specifikt kan man se en begynnande separation av räknekonstens explicita diskursiva budskap från en typ av *arbetsinstruktioner* riktade till lärjungarna, något jag skall återkomma till. Till saken hör att det vid denna tid började publiceras särskilda ”anvisningar” utformade för lärare, i vilka det bland annat beskrevs hur undervisning i matematik borde bedrivas.[35]

Alla som ägnade sig åt författande av läroböcker i matematik på 1830-talet var överens om betydelsen av praktisk övning. Detta övande motiverades på delvis olika sätt, men man kan inte se några direkta motsägelser mellan de respektive ståndpunkterna. De framstår tvärtom snarast som uttryck för en tämligen koherent gemensam grundsyn på så väl de matematiska studiernas syfte som hur detta syfte kan nås bara genom en viss typ av praktisk övning.

I författarnas förord kan man särskilja sex olika funktioner som övningsuppgifterna antas fylla: *För det första* ansågs de utgöra en nödvändig förberedelse för senare teoretiska studier. Denna funktion hänger samman med att de matematiska studierna vid denna tid utsträcktes till personer som,

---

[32] Falck, *Practisk lärobok i arithmetiken*, förord.
[33] Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik.*
[34] Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten.*
[35] Jag tänker här på Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation*; Anders Oldberg, *Praktisk handbok i pedagogik och methodik för swenska folkunderwisningen*, Stockholm, 1846 och O. E. L. Dahm, *Skolmästarkonst. Antydningar för Lärare och Skolinspektörer*, Kalmar, 1846.

både på grund av sin ungdom och sin sociala tillhörighet, inte ansågs förmögna att tillgodogöra sig den typ av ”abstrakta” undervisning som tidigare varit de matematiska studiernas kännemärke. De stod emellertid klart att de matematiska studierna för de flesta lärjungar inte skulle leda till några fortsatta matematiska studier. *För det andra* menade man därför att just detta praktiska övande skulle utgöra en god förberedelse för det praktiska livet. Bland andra Henrik Falck, som var adjunkt vid Uppsala universitet, uttryckte emellertid mer vidsträckta förhoppningar rörande det praktiska övandets möjliga konsekvenser. *För det tredje* menade han att det skulle leda lärjungarna till allmänna sanningar, vilka skulle upptäckas under det praktiska arbetets gång. Man bör observera att detta är något annat än den förberedelse för det praktiska livet som Zweigbergks och Almqvist talade om. *För det fjärde* nämns vid denna tid fortfarande den möjlighet exempel erbjuder lärjungarna att pröva om man förstått. Detta motiv fick emellertid allt mindre betydelse. *För det femte* menade man att de många tillämpningarna skulle tjäna till att illustrera matematikens räckvidd, ett mål vi känner igen från argumentationen kring undervisningen på Karlberg. *För det sjätte* menade man att övningsuppgifterna – genom sitt praktiska och omväxlande innehåll – skulle öka lärjungarnas intresse för matematik och på så sätt göra dem mer benägna att lära sig.

Låt mig anföra några citat som exemplifierar hur dessa motiv kom till uttryck. Kommendörkaptenen Abraham Wilhelm Lavén skriver i förordet till sin *Lärobok uti Mathematik* följande:

> Som det lättaste sättet att pröfva, huruvida man förstår at tillämpa sin mathematiska kunskap, består uti des användande på frågors, eller problemers, besvarande; så hafva här en stor mängd problemer blifvit anförde. Dessa problemer medföra tillika den fördel, att lärjungen ser, att den inhemtade kunskapen är af nytta; hvarigenom ock han med större håg och nöje bör söka inhemta densamma.[36]

I bokens andra upplaga skriver han att hans syfte varit att

> genom en stor mängd med omsorg valda exempel och problemer, bibringa lärjungen så väl förmåga att använda, som öfvertygelse om gagnet af den theori han inhemtat.[37]

Man kan här notera den betydelse som Lavén tillmäter övningarna både för att väcka intresse och för att illustrera matematikens användbarhet. Henrik Falck skriver i förordet till sin *Practisk lärobok i arithmetiken* följande:

---

[36] Abraham Wilhelm Lavén, *Lärobok uti mathematik: bok 1. räknelära*, Stockholm, 1842, förord.
[37] Abraham Wilhelm Lavén, *Lärobok uti mathematik.: Bok 1. Räknelära. 2:a uppl. 1. Arithmetik och algebra till läran om eqvationer; jemte kort tillägg om serier ochlogarithmer samt en tabell öfver mått, vigter och mynt*, Stockholm, 1852, förord.

> Om en Mathematisk Lärobok skall åstadkomma den förståndsbildning, man med rätta väntar af en sådan vetenskap, och derigenom förtjena sitt namn, måste hon vara *practisk*, d. ä. från enskildta exempel, hämtade ur *verkliga* lifvet och verlden, småningom leda lärjungen till mer och mer allmänna sanningar, för att sedan genom en utförligare fortsättning af dylika exempel visa dessa sanningars mångfaldiga giltighet och användning.[38]

Här ser man hur Falck tillmäter övningsuppgifterna två olika funktioner: först att leda lärjungen till allmänna sanningar, och sedan att visa dessa sanningars "giltighet och användning". Längre fram förklarar han att det måste vara fråga om att "icke så mycket *bibringa* som fast mer ur hans eget förstånd *utveckla* kunskaperna". Man kan här skönja en sorts epistemologi, där det så att säga ligger i kunskapernas natur att de måste växa fram som ett resultat av övning. Tanken tycks vara att övningsuppgifternas innehåll – det man arbetat med under kunskapernas utveckling – har en avgörande betydelse för vari de allmäna kunskaper består som man sedan når fram till. Falck talar även, liksom Lavén, om att uppgifterna "ouphörligt väcker, uppmuntrar och belönar" lärjungen för hans arbete.[39]

Mindre anspråksfull rörande övandets konsekvenser är Almqvist. Han skriver helt kort att genom övandet "inöfvas [lärjungen] praktiskt i ämnet, och kan sedan med mera lätthet emottaga och grundligt behålla de vettenskapliga förklaringar och utvecklingar, som längre fram meddelas honom".[40] Här är det alltså fråga om en förberedelse för framtida mer teoretiskt lagda studier. Zweigbergk, som i sitt förord är mycket kortfattad, skriver angående bokens utformning:

> I den öfvertygelse, att knappast någon grad af utförlighet i en Mathematisk Lärobok kan göra Lärarens biträde umbärligt för Lärjungen, har utgifvaren af *denna* till större delen inskränkt sig till at i korta reglor angifva de särskilda Räknesätten samt i bifogade anmärkningar antyda deras grunder. Det utrymme, som härigenom kunnat vinnas, har han heldre användt till ett större antal omvexlande öfnings-exempel.[41]

Om något särskilt motiv för de många övningsuppgifterna kan utläsas ur hans förord så är det att de erbjuder lärjungarna "omväxling".

Som en avslutning på min redogörelse för de aritmetiska övningsuppgifterna vill jag lägga två ytterligare funktioner till de sex som kan utläsas av hur författarna motiverade sina läroböckers utformning. *För det sjunde* är det nämligen uppenbart att en av övningsuppgifternas viktigare funktioner var att strukturera själva undervisningspraktiken. Eller enklare

---

[38] Falck, *Practisk lärobok i arithmetiken*, förord.
[39] Ibid, förord.
[40] Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, Företal.
[41] Zweigbergk, *Lärobok i räknekonstenFörord.*

uttryckt: de tjänade till att hålla eleverna sysselsatta. Denna övningsuppgifternas funktion kom att diskuteras explicit mot slutet av 1800-talet och jag kommer i min framställning att argumentera för att den hade en avgörande betydelse för läroböckernas successiva förändring mot allt fler övningsuppgifter under 1800-talets andra hälft. Man måste i detta sammanhang komma ihåg att den svenska folkskolan i stor utsträckning växte fram som sätt att möta behovet av att bemästra en framväxande arbetarklass. En av folkskolans uppgifter var helt enkelt hålla barn och ungdomar sysselsatta på en plats där de inte störde de vuxnas arbete. Det ökande antalet övningsuppgifter måste ses som ett tidigt svar på detta behov. Både Almqvist och Zweigbergk framhåller att deras böcker innehåller ”talrika” övningsuppgifter. Nedanstående tabell visar förändringen av antalet övningsuppgifter på några av läroböckernas obligatoriska moment:

Tabell 6. Antal övningsuppgifter på olika moment i några läroböcker i aritmetik från slutet av 1700-talet och början av 1800-talet.

	Förenkla bråk	**Sortomvandling**	**Intresseräkning**	**Rotutdragning**
Andersson (1779)	4	6	16	10
Beckmarck (1795)	21	7	4	10
Almqvist (1832)	62	20	40	16
Zweigbergk (1843)	140	40	50	50

Man kan här se hur antalet uppgifter ökade under första halvan av 1800-talet. I förhållande till dagens matematikläroböcker är antalet uppgifter emellertid fortfarande mycket litet. Man skall komma ihåg att var och en av dessa böcker innehöll *hela* aritmetiken. Det var inte förrän mot slutet av 1800-talet som man började dela in stoffet i olika böcker för olika ”stadier” eller ”årskurser”. Då började man också kunna räkna uppgifterna i tusental, snarare än som här i tiotal.

I förhållande till sysselsättningproblematiken blir även uppgifternas svårighetsgrad intressant, eftersom svårare uppgifter givetvis tar längre tid att lösa. Följande tabell är ett försök att uppskatta hur *svåra* uppgifterna var att lösa i några av de böcker jag tagit upp i detta och de föregående kapitlen.

Tabell 7. En jämförelse av den *sista* övningsuppgiften på avsnitten ”Division i hela tal” och ”Division av bråk” i några läroböcker i aritmetik från slutet av 1700-talet och början av 1800-talet.

	Division i hela tal	**Division av bråk**
Andersson (1779)	$124 : 165$	$389\frac{2}{3} : 45$
Beckmarck (1795)	$756984 : 932$	$1\frac{1}{4} : 1\frac{1}{8}$
Almqvist (1832)	$768099360864 : 800096$	$15\frac{9}{13} : 14$
Zweigbergk (1843)	$1024643703204000 : 1897200$	$771\frac{3}{7} : 146\frac{46}{49}$

Här syns tydligt att uppgifterna alltså inte bara blev fler, utan också svårare. Relationen mellan uppgifternas antal och deras svårighetsgrad kom även den att bli ett centralt tema för den skolmatematiska diskussionen mot slutet av 1800-talet. Att göra uppgifterna svårare visade sig nämligen vara ett föga ändamålsenligt sätt att hålla eleverna sysselsatta (eftersom de svåra uppgifterna ofta bara resulterade i att lärjungarna ville ha hjälp från läraren).

Det kan i detta sammanhang vara värt att nämna att inte alla de läroböcker vars förord jag citerat ovan lånade sig till den typ av undervisning inom vilken det var betydelsefullt att eleverna hade något att göra. Lavén var en av dem som fortfarande i stor utsträckning betraktade övningsexemplen som ett sätt att pröva sin förståelse. I linje med detta synsätt anför han, troligen frustrerad över den riktning skolmatematiken tagit i fråga om komplicerade tillämpningar av sammansatt *Regula de Tri*, endast *ett* exempel på den typ av problem som detta räknesätt löser:

> 500 man, som arbetade 12 timmar om dagen, hafva användt 57 dagar för att gräfva en kanal, 1800 alnar lång, 7 alnar bred och 3 alnar djup; huru många dagar behöfva då 860 man använda, om de arbeta 10 timmar dagligen, för att gräfva en kanal 2900 alnar lång, 12 alnar bred och 5 alnar djup, uti en jordmån, som anses 3 gånger svårare att gräfva uti; och då man tillika utrönt att de förstnämndes arbetsförmåga förhåller sig till de sistnämndes som 7 till 5? (Svar $768\frac{36}{43}$ dagar).[42]

Efter en lång och detaljerad genomgång konstaterar Lavén: ”Detta exempel, hvilket är ett bland de mest sammansatta som gerna kunna komma i fråga, torde tillräckligt visa huru dylika frågor böra behandlas”.[43] Precis som han säger tjänar detta exempel, i vilket, som vi ser, svaret på samma sätt som i äldre räkneläror och läroböcker placerats direkt i anslutning till frågan, i och för sig till att ”visa” hur dessa problem kan behandlas – det var dock till föga hjälp i en undervisningssituation där en ensam lärare hade som huvudsaklig uppgift att sätta lärjungarna i arbete.

För det åttonde är det slutligen inte svårt att se hur det ökande antalet övningsuppgifter bidrog till att, som jag nämnt i kapitel 7 ovan, förmedla en matematisk världsbild till eleverna, att utsträcka matematikens blick. En genomgång av avsnittet om sammansatt *Regula de Tri* hos Zweigbergk och Almqvist visar att uppgifterna handlade om: grävande av dike, läggande av mur, åtgång av mat, avkastning av kapital, transport av varor, produktion av brännvin, samt sömnad av kläder – för att nämna några ofta återkommande teman. Den särklassigt vanligaste typen av uppgift handlar om människor som utför någon typ av arbete tillsammans. Här är en variant hos Almqvist:

---

[42] Lavén, *Lärobok uti mathematik: bok 1. räknelära*, s. 190–191.
[43] Ibid.

> Om 4 arbetare på 5 dar afrödje och uppgräfva 460 qvadratalnar, med 9 arbetstimmar om dagen; huru många dar behöfva då 15 arbetare, att på sådant sätt uppgräfva 3 1/4 Tunnland (som göra tillsammans 45,500 qvadratalnar), när de arbeta 12 timmar om dagen?[44]

Här en snarlik uppgift hos Zweigbergk:

> Om 6 man på 3 dagar, då de arbeta 10 timmar om dagen, kunna lägga en stenmur af 20 famn. längd, 3 1/2 qvart. bredd och 1 1/4 alns höjd; huru många timmar behöfva då 10 man dagligen arbeta, för att på 7 dagar hinna fullborda en dylik stenmur af 45 famn. 1 1/9 alns längd, 1 1/8 alns bredd och 1 1/2 alns höjd?[45]

Är det inte tydligt hur matematiken i dessa uppgifter – huvudsakligen ämnade för blivande bönder och arbetare – blivit en sorts arbetets mästare? Genom arbete med denna typ av uppgifter lärde sig lärjungarna att matematiken handlar om den verklighet som de efter skolan själva blev en del av. Men den var inte till någon nytta i detta praktiska arbete. Man blev knappast bättre på att gräva diken, röja skog, mura, eller sy, genom att lösa skolans övningsuppgifter. Om det var något ”realistiskt” perspektiv som dessa uppgifter gestaltade så var den framväxande borgarklassens – som kunde betrakta arbetet på avstånd. Lösandet av dessa uppgifter blev med andra ord en övning i att betrakta arbete från ett perspektiv som är detta arbete i grunden främmande. Genom matematiken lärde sig de blivande bönder och arbetare att betrakta sin egen praktiska verklighet som en del av ett större sammanhang som inte var deras. Medan givetvis blivande borgare lärde sig betrakta det arbete de aldrig skulle behöva utföra från ett perspektiv som var just deras.

Det var ännu bara en vision, men man ser redan här hur matematiken bär på en potential att utgöra en slags gemensam samhällelig referenspunkt. En blick som bestämmer vad den sociala och fysiska verkligheten är och därmed också vem som har rätt i fråga om denna verklighet.

Algebra

I takt med att matematiska studier blev mer allmänna uppstod ett behov av ändamålsenliga läroböcker, detta såväl i aritmetik som i algebra. J. Delander skriver i förordet till sin lärobok i algebra från 1836 att hans avsikt varit att ”bidraga till afhjelpande af den ofta öfverklagade bristen på en tjenlig Lärobok

---

[44] Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, s. 106.
[45] Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten*, s. 100.

i detta ämne".[46] E. G. Björling skriver att han ursprungligen hade tänkt att hans bok bara skulle användas vid den skola där han själv undervisade (Hillska skolan på Barnängen), men att han blivit "uppmanad" att ge ut den i "allmänna bokhandeln". Björling uppger i förordet till sin *Elementar-lärobok i algebra* (vilken kom ut i tio upplagor mellan 1832 och 1877) att han på tre olika sätt velat avhjälpa brister hos tidigare läroböcker i algebra:

För det första genom att "ej andra delar af Algebran blifvit vidrörda än de, som för en grundlig undervisning uti och redig uppfattning af läran om 1:sta och 2:dra gradens aequationer erfordras; (kostnaden blir derigenom mindre, och användbarheten vid allmänna undervisningn i samma mån större)". Här syns ett av skolmatematikens kännetecken: begränsningen av stoffet med utgångspunkt från eleven och undervisningen.

För det andra har Björling tagit med "ett så stort antal som möjligt af goda öfningsexempel". Liksom på aritmetikens område har övandet nu gjorts till en huvudsak. Syftet med övningsuppgifterna var, skriver Björling, att väcka lärjungens intresse, en ambition vi ser ligger i linje med dem som kom till uttryck i förorden till läroböckerna i aritmetik. Björling skriver, angående övningsuppgifternas ordning, att den möjligen "vid första påseendet förefalla något besynnerlig". Han är emellertid övertygad om att man "kommer det ungdomliga interesset närmare derigenom att man, sedan en gång inledningen är gjord med det enklaste och lättfattligaste, låter det lättare och det svårare omväxla med hvarannan (naturligtvis i enlighet med en på förhand utstakad plan), än derigenom att man i oupphörlig serie tröttar med allt svårare och svårare ämnen". Även månandet om elevens intresse utgjorde alltså en gemensam nämnare för Björling och författarna till läroböcker i aritmetik.

För det tredje har han bemödat sig om att inte skilja det teoretiska från det praktiska. Även här kan man se en överensstämmelse med de motiv som presenterats angående aritmetiken. Björlings ambition är att teori och praktik hela tiden skall stå i förbindelse med varandra, för att på detta sett bibringa lärjungen praktiska kunskaper.[47]

Med detta sagt om Björlings utgångspunkter skall jag i redogörelsen för hans bok ta fasta på två karaktäristiska drag, vilka fick stor betydelse för skolalgebrans fortsatta utveckling i Sverige. För det första att hans bok är utformad som en *väg* – av teori varvad med övningsuppgifter – mot allt högre grad av bemästrande. I detta avseende utgör den en naturlig fortsättning på den utveckling som jag i förra kapitlet beskrev angående Beckmarcks och Forssells respektive algebraböcker. För det andra att Björlings bok väsentligen består av två delar: en första del, som utgör själva vägen, vilken innehåller *bokstavsräkningen*, och en avslutande del som kretsar kring *ekvationer*, vilken utgör vägens slutpunkt.

[46] J. Delander, *Lärobok i elementerne af algebra: innefattande första och andra gradens eqvationer, jemte logarithmer och serier*, Stockholm, 1836, förord.
[47] Björling, *Elementar-lärobok i Algebra*, förord.

Algebran som väg

I förra kapitlet såg vi hur Forssells *Algebra för begynnare* utgjorde en sorts pedagogisering av Beckmarcks *Algebra.* Forsell delade in algebran i en mängd kortare moment och gav vart och ett av dessa moment en betydligt utförligare beskrivning än Beckmarck gjorde i sin algebrabok. Björling tar detta ”utsträckande” av algebran ytterligare ett steg. Han delar in vägen mot ekvationsläran i dubbelt så många steg som Forssell: där Forssell nöjer sig med att skilja ”Addition och Subtraktion” från ”Multiplikation och Division” har Björling ett avsnitt för varje räknesätt. Forssells avsnitt ”Om bråk” har Björling delat i tre. Denna mer detaljerade disposition speglar en motsvarande ökning av mängden detaljer i själva framställningen, vilka sammantaget gör Björlings bok till ett successivt framåtskridande, från det lättare till det svårare, där elevens lärande har fått fungera som strukturerande princip.

En andra signifikant skillnad mellan Forssells och Björlings respektive böcker ligger i hur de konstituerar bokstavsräkningens slutpunkt – lösandet av ekvationer: *Forssells* framställning av denna del av algebran framstår i jämförelse med Björlings som tämligen splittrad. Förutom ”Equationer i allmänhet” tar Forssell upp ”Förhållande, Proportioner och Serier” samt ”Logaritmer”. Till det (jämförelsevis) splittrade intrycket bidrar även att han valt att skilja mellan algebrans tillämpning på ”Geometriska Problemer” och dess tillämpning på ”Arithmetiska Problemer”. *Björlings* framställning utgår tvärtom helt och hållet från själva algebran. Hans bok börjar med en grundlig genomgång av bokstavsräkningen, det vill säga hantering av de fyra räknesätten samt digniteter och rötter. I avsnitten om ekvationsräkning följer sedan tillämpningar av den teknik man övat upp under arbetet med bokens första del. Först på första gradens ekvationer med en obekant, sedan på andra gradens ekvationer med en obekant och slutligen på första och andra gradens ekvationer med två eller flera obekanta. Logaritmerna har Björling förbigått med tystnad – eftersom, enkelt uttryckt, man inte har någon nytta av logaritmer för att lösa första och andra gradens ekvationer.

Björling är, liksom Forssell, mycket ”pedagogisk”. Hans inledning är värd att citera i sin helhet, eftersom den så tydligt visar hans ambition att väcka intresse, samt hur han riktar sig till en ung läsare:

> I Arithmetiken räknar man med ziffror. Man säger till exempel att 2 lod och 3 lod tillsammans utgöra 5 lod. – Men en annan gång kan man lättare uträkna någonting, utan att blott räkna med ziffror. T.ex. En gosse frågar sin kamrat: *kan du säga, huru många timmar jag tillsammans har arbetat på fyra dagar, då jag första dagen arbetade* $3\frac{4}{13}$ *timme, andra dagen dubbelt så mycket, tredje dagen hälften så mycket, och fjerde dagen lika så mycket som första dagen?* För att nu kunna svara derpå, skulle gossen egentligen lägga tillsammans $3\frac{4}{13}$, 2 gånger $3\frac{4}{13}$, $\frac{1}{2}$ gång $3\frac{4}{13}$, samt $3\frac{4}{13}$. Men då tycker han, att det är

> lättare att, i stället för det blandade talet $3\frac{4}{13}$, taga något enklare uttryck, och säger derföre: Låt mig kalla talet $3\frac{4}{13}$ för *a*, så skall jag lätt besvara din fråga. Du arbetade således på första dagen *a* timmar; på andra dagen dubbelt så många, d. ä. 2*a* timmar; på tredje dagen hälften så många, d. ä. $\frac{1}{2}a$ timmar; på fjerde dagen *a* timmar. Nu är det mycket lätt att lägga tillsammans dessa alla. Jag säger då, likasom i Arithmetiken:
>
> $$a + 2a + \frac{1}{2}a + a \text{ blir} = 4\frac{1}{2}a;$$
>
> Men med *a* mente jag $3\frac{4}{13}$; således får jag till summa $4\frac{1}{2}$ gånger $3\frac{4}{13}$ d.v.s. $14\frac{23}{26}$ timmar.[48]

Denna presentation av algebrans grundläggande idé – att ersätta siffror med bokstäver – lämnar inte mycket övrigt att önska. Mitt intryck är att det inte var en slump att just Björlings och Zweigbergks respektive böcker blev mest populära av de som publicerades på 1830-talet. Björling är kort sagt en god stilist och han var troligtvis ganska framgångsrik i sin ambition att väcka läsarens intresse.[49] I framställningen kombineras löpande text med kommenterade illustrerande exempel, tabeller och övningsuppgifter.

Även om Björlings bok innehåller mycket mer text och många fler kommenterade exempel än Palmqvists eller Beckmarcks korta framställningar av algebran som ett slags "system av regler", spelar reglerna en framträdande roll även i Björlings bok. De är genomgående koncist formulerade, som till exempel: "*Multipliciera täljare med täljare, och nämnare med nämnare!*" eller "*om man vid Bråks multiplication kan jämt dividera någon af täljarena och någon af nämnarena med samma tal, så har man rättighet att göra det*".[50] Särskilt hatad blev mot slutet av 1800-talet regeln för division av bråk: "*Vänd upp och ned på Divisorn, och multiplicera sedan!*".[51] För att betona reglernas betydelse har Björling använt både kursiv stil och utropstecken.

I viss mån ironiskt är att Björlings regler i en praktisk mening knappast var särskilt lättillgängliga, om någon lärare till äventyrs var intresserad av att – så som Almqvist beskriver angående aritmetiken – ur boken extrahera endast dessa regler. Tvärtom är reglerna i Björlings *Elementar-Lärobok* ofta inbakade i den löpande texten. Tillspetsat kan man säga att Björling i och med detta nästan har skapat en sorts algebraisk räknelära. Likheten ligger just i reglernas centralitet, och att det praktiska räknandets detaljer får så stort utrymme. I

---

[48] Ibid, s. 7–8.
[49] Det senare 1800-talets kritik mot Björlings lärobok tyder i och för sig på att det oftare var lärarens intresse han lyckades väcka än elevens.
[50] Björling, *Elementar-lärobok i Algebra*, s. 56.
[51] Ibid, s. 57.

räknelärorna rörde det sig emellertid om räknande i olika yrkespraktiker, medan det i Björlings bok istället rör sig om räknande med bokstäver i skolan. Björlings bok utgör, på samma sätt som läroböckerna i aritmetik, ett slags självrefererande system: i boken finns allt som behövs för att lära sig räkna i skolan, samtidigt som detta räknande bara är användbart just där – i skolan.

Första och andra gradens ekvationer

Tanken bakom lärogången i Björlings *Elementar-Lärobok* är att man först lär sig räkna med bokstäver, för att sedan använda denna förmåga till att lösa ekvationer. Björling skriver i en not:

> Det är med æquationers upplösning som man i Algebra hufvudsakligast sysselsätter sig. Alt det föregående är intet annat än sådana förberedelseräkningar, som man nödvändigt måste känna, för att kunna upplösa æquationer. – Och emedan nästan alla i det allmänna lifvet förefallande räkningar kunna behandlas efter reglorna för æquationers upplösning; så är æquationsläran så vigtig och förnöjande.[52]

Relationen mellan bokstavsräkningen och – för att använda de senare 1800-talets terminologi – "ekvationsläran" är synnerligen logisk. För upplösning av till exempel förstagradsekvationer presenterar Björling fyra "reglor":

> 1:o) Om till den obekanta qvantiteten *x* är *adderad* en annan qvantitet; så befrias *x* derifrån, om man på båda sidor om likhetstecknet *subtraherar* denna qvantitet.
>
> 2:o) Om ifrån *x* är *subtraherad* en annan qvantitet; så befrias *x* derifrån, om man på båda sidor *adderar* denna qvantitet.[53]

Och så vidare, på samma sätt för multiplikation och division. Här används just de fyra räknesätt som man lär sig använda i bokens inledning. I ekvationsläran hänvisas alltså ständigt tillbaka på den inledande bokstavsräkningen. Det kan påpekas att Björling även i dessa senare avsnitt är synnerligen pedagogisk – han visar med en mängd kommenterade exempel hur man *gör* när man hanterar de ekvationer vars bemästrande utgjorde målet för hans bok. Ibland drar han in "verkligheten" i sina exempel, men på precis samma sätt som i tidigare svenska algebraböcker tjänar den uteslutande till att illustrera algebrans tillämpbarhet och, som Björling säger i sitt förord, "väcka lärjungens intresse". Ett exempel kan ges för tydlighets skull:

> 30) Då jag sålde ett stycke kläde för 24 R:dr, vann jag så många procent som klädet kostade mig Riksdalrar. Hvad hade jag gifvit derför?[54]

[52] Ibid, s. 99.
[53] Ibid, s. 103.
[54] Ibid, s. 143.

Det hela mynnar ut i en andragradsekvation, vilket givetvis också var orsaken till uppgiftens formulering. Algebran var vid denna tid uteslutande något för högre skolor eller skolor speciellt inriktade mot den militära sfären. Intressant är att den knappast, som aritmetiken, ansågs vara särskilt praktisk. Signifikativt är att flera författare talar om hur det är ”möjligt” att med algebra behandla alla de problem som man löser med aritmetik, och att detta är vad som gör algebran så ”förnöjande”.[55] Man tycks alltså inte menat att man skulle använda algebran för att *lösa* det praktiska livets problem. Snarare utgjorde algebran en sorts teoretisk överbyggnad till aritmetiken.

Det fascinerande är att skolmatematiken i och med detta kunde upprätta en intern hierarki som på ett märkligt sätt hänvisade till verkligheten utanför skolan. Det praktiska lösandet av praktiska uppgifter inom aritmetiken kom att *motsvara* praktiskt arbete utanför skolan, det vill säga: det praktiska arbetet utanför skolan kom, genom skolmatematiken, att framstå som ett ”aritmetikens föremål”. I och med att algebran framstod som aritmetikens teori, det vill säga aritmetiken som ”algebrans föremål”, kunde den därmed framstå som det praktiska arbetets teori. Det var ännu inte en social realitet, men man kan här se ett frö till upprättandet av en homologi mellan två olika relationer: den mellan aritmetik och algebra i skolan, och mellan kroppsarbete och intellektuellt arbete utanför skolan. Arbete med aritmetiken var på väg att bli ett sorts simulerat kroppsarbete, medan arbete med algebran var på väg att bli ett sorts simulerat intellektuellt arbete.

Geometri

Utvecklingen under denna tid på geometrins område skiljer sig på en avgörande punkt från utvecklingen inom skolmatematikens aritmetik och algebra. De läroböcker i geometri som publicerades fick nämligen aldrig, så som sina motsvarigheter inom aritmetik och algebra, något större genomslag. Tvärtom låg den lärogång – baserad på Euklides *Elementa* – som tagit form under 1700-talet, i stort sett fast genom hela 1800-talet.

Precis som rörande övriga delar av matematiken menade de som skrev läroböcker i geometri att undervisningens huvudsakliga syfte borde vara att bibringa lärjungarna praktiskt användbara kunskaper. Likaledes var man överens om att sättet att nå detta mål var att ge lärjungarna en stor mängd övningsuppgifter med praktiskt innehåll. Genom att arbeta praktiskt med uppgifter där teori och praktik var förenade skulle lärjungarna utveckla rätt sorts kunskaper. Detta resonemang mynnade föga oväntat ut i en skarp kritik mot Euklides *Elementa*, vilka man menade svarade dåligt mot dessa krav.

---

[55] Ibid, s. 99.

Inledningsvis kan nämnas Anders Alreiks argumentation för geometrins värde, eftersom den så tydligt knyter an till den typ av retorik från början av 1700-talet som jag redogjorde för i kapitel 6 ovan. Han skriver att geometrin ”odlar förståndet, då den lärer, att från säkra grunder draga riktiga slutsatser”, att den ”skärper eftertankan, och stärker minnet, derigenom att de hållas i en oafbruten verksamhet; ty ingen sats kan bevisas, intet problem lösas, utan att förut erindra sig föregående satser, hvarpå desamma si stödja”, samt att det i samhället finns ”mångfaldiga yrken och handtverk, som ovilkorligen fordra insigter i Geometrien, om de skola tilbörligen skötas, såsom Landtmäteriet, Seglings- och Byggnadskonsten, Bergs- och Krigsväsendet, m.fl.”.[56] Alreik har här lånat friskt från förordet till Mårten Strömers översättning av Euklides *Elementa* (1744) som vid denna tid fortfarande kom ut i nya upplagor.

Denna retorik spelade emellertid inte någon framträdande roll på 1830-talet. I centrum stod då istället *vägen* mot geometriska kunskaper. I linje med den retorik jag beskrivit tidigare i detta kapitel betonade man vikten av att denna väg var praktisk, att den innehöll teori varvad med ”realistiska” tillämpningar. Henrik Falck beskrivning av en ändamålsenlig geometrilärobоks väsentliga egenskaper utgör ett tydligt uttryck för denna syn geometriska studier. Han skriver bland annat följande:

> En *lärobok* i Geometrien bör aldrig sakna följande egenskaper: **1:o** Bör hon, såsom hvarje Mathematisk lärobok, i ett afsigtsenligt system af Uppgifter eller Problemer låta läsaren genom verklig handläggning vid deras upplösning sjelf *upptäcka* så väl de åsyftade sanningarne som deras från subjectif till objectif härigenom efterhand öfvergående visshet. Hon får således icke, såsom vanligt sker, hufvudsakligen bestå af en mängd Theoremer, om ock aldrig så strängt *bevista*, och aldraminst får hon, såsom Euclides, låta de tunnt sådda Problemerna vara blotta medel för en sådan förestafvad bevisning. Hon måste tvärtom, i egenskap af egentlig Geometrie, betrakta Problemerna såsom hufvudsak, [...] **5:o** bör läroboken framför allt vara en ändamålsenlig förberedelse för de Practiska lifvet [...] Alltså bör öfverallt, där räkning eller egentlig Mathematik förekommer, genom en mångfald af sakrika öfnings-exempel omdömet och uppfinningsgåfvan stärkas och utbildas samt practisk färdighet bibringas.[57]

Vi kan här se hur syftet – att bibringa lärjungen praktiska kunskaper – samspelar med hur dessa kunskaper skall ta form, nämligen under ”upptäckande” arbete med ”en mångfald af sakrika öfnings-exempel”.[58]

[56] Anders Alreik, *Theoret. praktisk lärobok i elementar-geometrien och plana trigonometrien. Till Landtmätares, Skol-Lärares samt den Studerande ungdomens m.fl. tjenst*, Stockholm, 1837, förord.
[57] Henrik Falck, *Practisk lärobok i geometrien och trigonometrien med strängt bevis i läran om parallela linier*, Uppsala, 1831, förord.
[58] Ibid, förord.

Almqvist är mindre anspråksfull. Han skriver att hans bok ”hufvudsakligen blifvit beräknad för att praktiskt gagna i det allmänna, lägre lifvet”. Tämligen intressant är att Almqvist i sin bok anför geometrin som ett redskap för de lägre klassernas emancipation. Han skriver:

> Mätkonstens grunder; en kunskap, så högst nödvändig för alla stånd (sjelfva Allmogen ej undantagen) genom den förmåga massan af medborgare dymedelst kunde vinna, att sjelf beräkna sin egendoms vidd, mäta sina landstycken, kontrollera sin rätt, och finna storleken af hvad föremål som helst, utan att behöfva slumpvis lita på andras utsago och deraf bero.[59]

Flera av författarna till de läroböcker i geometri som står i fokus här tar upp frågor rörande undervisningspraktiken i sina förord. P. R. Bråkenhielm skriver att han genom en ”långvarig erfarenhet [är] bekant med följderna af de misstag, som i vårt Fädernesland äro alltför allmänna vid den första undervisningen uti Geometrien [...]”.[60] Alreik talar liksom Almqvist om lärarens behov, ”hvars inskränkta tid oftast ej tillåter att uppgöra nog många, varierande exempel m. m. för sina lärjungar”, men att han också skrev för ”Studerande i allmänhet, hvilka önska att på egen hand vinna någon öfning och färdighet i ifrågavarande kalkuler”. Det han menar saknas är:

> en sådan theoret. praktisk Lärobok i nämnde delar af Mathematiken, deri Arithmetik och Algebra jemväl vore på de geometriska storheterna använd, och som således innehöll såsom tillämpning af anförde nödiga theoretiska satser en någorlunda kärnfull och rikhaltig samling af öfnings-exempel för geometriska och trigonometriska beräkningar, hvarpå vi åter på vårt språk allt hitintills haft nära nog fullkomlig brist.[61]

Ett förenande drag i dessa ståndpunkter är deras mer eller mindre explicita kritik mot Euklides *Elementa*. Falck är tydlig i det han skriver:

> Huru föga Euklides *Elementa*, som i snart ett sekel hos oss varit nybegynnarens nästan enda Geometriska lärobok, kunnat, såsom i helt annan syftning författade, motsvara ofvannämnde lika sjelfklara som alltid lika oafvisligt återkommmande fordringar, är för hvar och en synbart, om ock med aldrig så stor benägenhet att prisa nämnde arbete för bevisens logiska stränghet och conseqvenz [...][62]

[59] Carl Jonas Love Almqvist, *Lärobok i geometrien: innefattande grunderna för läran om linier, ytor (planimetri och landtmäteri), solida figurer (stereometri), samt deskriptiv geometri*, Stockholm, 1842 [1833], Företal.
[60] Per Reinhold Bråkenhielm, *De sex första samt elfte och tolfte böckerna af Euclidis Elementa jemte planimetri, stereometri och geometriska problem*, Örebro, 1844.
[61] Alreik, *Theoret. praktisk lärobok i elementar-geometrien och plana trigonometrien. Till Landtmätares, Skol-Lärares samt den Studerande ungdomens m.fl. tjenst*, förord.
[62] Falck, *Practisk lärobok i geometrien och trigonometrien*, förord.

Han konstaterar att ett flertal böcker redan författats med ambitionen att ersätta Euklides och hoppas att hans själv skall ha kunnat ”undvika sina föregångares brister”. Att han inser att ersättandet av Euklides *Elementa* med andra läroböcker knappast kan antas gå särskilt snabbt framgår av att han likväl i slutet av sin bok infört en jämförelse mellan de bevis han presenterar i sin bok och de som finns Euklides *Elementa*. Han skriver att den som så önskar kan använda de euklidiska bevisen, men att man ”endast vid de *första* grunderna bör undandraga sig den lilla mödan att äfven lära sig det förbättrade bevisnings-systemet”.[63] Almqvist förklarar i förordet till sin geometri att ”direktionen öfver Nya Elementarskolan funnit Euklides *Elementa* mindre tjenliga att nyttjas vid första undervisningen i geometri för barn emellan tio och tretton år [...]”, och att det är av denna anledning som han fått i uppdrag att författa en ny lärobok i geometri.[64]

Den praktiska vägen mot geometrin

I och med att inget av de försök som vid denna tid gjordes att ersätta Euklides *Elementa* fick något större genomslag, får redogörelsen här en liten annan inriktning än de ovanstående, i vilka jag hela tiden fokuserade på de förändringar av läroböckerna som fick störst betydelse för den svenska skolmatematikens fortsatta utveckling. Här kommer jag istället endast översiktligt beskriva några av de försök som gjordes, för att visa hur de speglade författarnas respektive ambitioner. Denna redogörelse har om inte annat ett värde som historisk bakgrund till den kritik som i omgångar skulle riktas med Euklides under hela återstoden av 1800-talet samt under första halvan av 1900-talet. Jag skall här säga något om Henrik Falcks, Anders Alreiks och Almqvists respektive läroböcker i geometri.

Henrik Falcks ambition var uppenbarligen att ersätta Euklides *Elementa*. Falck har till och med delat in sin lärobok i tre ”böcker”, den första utan annan titel än ”Första boken”, den andra med undertiteln ”Om liniers, Vinklars och Plana Figurers Förhålande och Delning, jämte Plana Trigonometrien”, den tredje med undertiteln ”Om storheter med både Längd, Bredd och Högd eller Stereometrien”. Falcks bok kan förenklat beskrivas som ett försök att ge de delar av den matematiska vetenskapen som knöt an till geometri – i en allmän bemärkelse – en form som passade den typ av undervisning vilken då kretsade kring Euklides *Elementa*. Han börjar med ”Definitioner”, och framställningen är sedan strukturerad kring ”Problem” med åtföljande ”Upplösningar”. Karaktäristisk i jämförelse med de två andra läroböckerna jag tar upp här (Alreiks och Almqvists) är Falcks närhet till den matematiska vetenskapen – genom sina tre böcker sträcker sig hans

[63] Ibid, förord.
[64] Almqvist, *Lärobok i geometrien*, Företal.

framställning i en matematisk mening längre än de övriga två, något som säkert kan knytas till att Falck var adjunkt vid Uppsala universitet.

Alreiks bok är, till skillnad från de flesta andra samtida läroböcker i matematik, ”realistisk” i samma bemärkelse som de äldre räknelärorna. Detta hänger samman med att Alreik var lärare vid kungliga lantmäterikontoret. Hans bok är i princip en lärobok i lantmäteri. Den tycks inte ha fått någon större spridning utanför den institution inom vilken den var författad, och 1843 har boken bytt titel till det mer specifika *Theret. praktisk lärobok i landtmäteriet.*[65] Alreik befinner sig nära lantmäteriets praktik, vilken han tycks ha personlig erfarenhet av. Följande exempel är typiskt:

> Probl. På fältet äro tre otillgänglige objekter A, B och C, hvilka bilda en gifven triangel, eller tre punkter A, B, C äro på en karta rätt upptagne, samt afstånden dem emellan AB, BC, AC bekanta, och ifrån en fjerde punkt D äro dessa objekter synliga, hvarifrån på taflan vinklar kunna dem emellan uppmätas, nemligen emellan A och C=m, samt mellan C och B=n; att då utan vidare mätning på kartan bestämma läget för punkten D, äfvensom afstånden DA, DB och DC.
>
> Första sättet (Fig. 84,85).
>
> 1) Uppställ taflan öfver punkten D, och nedstick i punkten A en nål, samt för diopterlinialen derintill, syfta till objektet A på fältet, och uppdrag syftlinien AD tillbaka (43). Nedstick derefter nålen i C, för diopterlinialen derintill, syfta till objektet C på fältet, och uppdrag likaledes syftlinien CD tillbaka.
>
> 2) BEskrif omkring sidan AC en cirkel AFCD, så att AC blifver korda till ett segment AFC, som i sig innefattar en vinkel, som är dubbelt så stor som vinkeln m, hvilken de ifrån A och C uppdragne syftlinier utgöra (69).
>
> 3) Syfta sedermera på samma sätt till objektet B på fältet, och beskrif omkring sidan BC en cirkel BGCD, hvari segmentet BGC likaledes innehåller en vinkel, som är dubbelt så stor som vinkeln n, vilken de båda ifrån B och C dragna syftlinier utgöra.
>
> 4) Dessa cirklar skära då hvarandra i punkten D, som sålunda blifver den sökta och rätta stationspunkten, äfvensom AD, CD och BD utgöra enligt skalan afstånden emellan station och de gifna objekterne A, B, C.
>
> [...][66]

[65] Anders Alreik, *Theoret. praktisk lärobok i landtmäteriet. Till Landtmätares, lantbrukares, juristers och kameralisters m.fl. tjenst*, Stockholm, 1843.
[66] Alreik, *Theoret. praktisk lärobok i elementar-geometrien och plana trigonometrien. Till Landtmätares, Skol-Lärares samt den Studerande ungdomens m.fl. tjenst*, s. 136–139.

Jag har här inte citerat hela exemplet, vilket sträcker sig över flera sidor. Alreik tar i sin bok stor hänsyn till lantmäteriets praktiska detaljer, vilket gör att matematiken i egenskap av teori får en relativt underordnad roll. Han konstituerar, liksom räknelärorna, matematiken som en samling tekniker. Han visar hur dessa tekniker kan användas på bästa sätt för att lösa de problem som faktiskt behöver lösas. Han anpassar kan man säga matematiken till lantmäteriets praktiska omständigheter. Typiskt för denna inriktning är att han ägnar stort utrymme åt logaritmer,[67] och att han inte tycks ta någon notis om den uppdelning av matematiken i "ämnen" (geometri, aritmetik och algebra) som vid denna tid blivit gängse inom lärobokslitteraturen. Alreik framställde tvärtom stora delar av den matematiska vetenskapen som om den vore en sorts lantmäteriets räknekonst. Hans bok var inte skriven för att ge lärarens stöd att i en praktisk mening hantera själva undervisningssituationen, och det är därför inte överraskande att den inte fick någon större spridning.

Almqvist behandling av geometrin, slutligen, kan ses som ett försök att göra praktisk lärobok av Euklides *Elementa*. Praktisk i dubbel bemärkelse – både som lärobok att praktiskt arbeta *med* och som lärobok med syfte att bibringa lärjungarna praktiskt användbara kunskaper – två aspekter vilka, som jag visat ovan, ganska mycket flöt samman i 1830-talets syn på matematiska kunskaper. Almqvist var som sagt rektor på Nya Elementarskolan i Stockholm och till skillnad från Falcks och Alreiks böcker var Almqvists *Lärobok i geometrien* elementär vad gäller det matematiska innehållet. Följande kan tas som exempel på hur Almqvist visserligen bevarat Euklides form, men samtidigt givit denna form ett helt nytt "praktiskt" innehåll:

> 11. Problem. Att vid en gifven punkt på en gifven rät linie göra en vinkel af ett visst gradtal.
>
> Låt A vara den gifna punkten och AB den gifna räta linien. Det begäres, att vid punkten A på linien AB, göra en vinkel af ett visst gradtal. Tag transportören eller gradskifvan och lägg dess diameter utefter AB, så att medelpunkten kommer vid A. Afsätt nu på gradskifvan så många grader, som man vil att vinkeln skall hafva, och drag en linie ifrån A till punkten C, som på instrumentet utmärker det ifrågavarande gradtalet. Då är BAC den begärda vinkeln.
>
> Vill man göra en rät vinkel, så är det detsamma som att på gradskifvan afsätta 90° (enl. I-10).[68]

I förordet till sin bok talar Almqvist om geometrins stora praktiska nytta, men det är uppenbarligen inte den euklidiska geometrin han syftar på, utan något annat. Hans bok om någon visar hur svårt det är att knyta någon

---

[67] Ibid, s. 135.
[68] Almqvist, *Lärobok i geometrien*, s. 16.

specifik innebörd till ordet ”geometri”. Utgår man från Euklides framstår den stringenta och deduktiva uppbyggnaden som geometrins främsta kännetecken. Almqvists presenterar tvärtom geometrin som en praktisk konst, där Euklides form – ”problem” följda av ”upplösningar” – fått en helt ny innebörd.

Man kan dra en parallell mellan hur Celsius i sin *Arithmetik eller Räkne-Konst* matematiserade Agrelius *Institutiones Arithmetica* och hur Almqvist gör mätkonst av Euklides *Elementa* i sin *Geometri för begynnare*.[69] Det intressanta, och förbluffande, är att både Celsius och Almqvst använde Christian Wolffs *Auszug Aus den Anfangs-Grunden Aller Mathematischen Wissenschafften* som utgångspunkt för sina respektive läroboksförsök.[70] Märkligt nog ville nämligen direktionen på Nya Elementarskolan att deras nya lärobok i geometri skulle baseras på Wolffs vid denna tidpunkt drygt 100 år gamla arbete.[71]

Som sagt fick inte något av dessa läroboksförsök något större genomslag. Euklides *Elementa* låg fast som utgångspunkt för läroverkets studier i geometri. Samtidigt, det vill säga under första halvan av 1800-talet, tog emellertid ett nytt matematiskt ”ämne” med anknytning till geometri plats i Sverige – linearteckningen. Detta ämne hade vissa likheter med den geometriska mätningskonst som Almqvist ville förmedla i sin geometrilärobok. Linearteckningen behandlas mer utförligt i nästa kapitel, eftersom detta ämne i så hög utsträckning måste förstås mot bakgrund av inflytandet från Tyskland och schweizaren Henrich Pestalozzi. Om denna linearteckning – vilken i praktiken bestod i att lärjungarna fick lära sig *teckna, benämna och känna igen* den euklidiska geometrins figurer, dock utan att lära sig några *bevis* – tas med i beräkningen, går det emellertid att göra en analys på geometrins område, som motsvarar den jag gjorde ovan i anslutning till min redogörelse för aritmetiken och algebran. Linearteckningen kom nämligen att presenteras som vägen mot ett riktigt ”skådande” av den fysiska verkligheten. P. A. Siljeström, en av den svenska skolmatematikens förgrundsfigurer under andra halvan av 1800-talet, skriver i en recension av en lärobok i geometri följande:

> Geometrien ger nybörjaren i alla fall tillräcklig öfning för tanken; och jemte tanken öfvar den äfven handlaget, ögonmåttet, iakttagelseförmågan och inbillningskraften. Man lär sig att med uppmärksamhet betrakta de yttre tingen, uppfatta deras former och kännetecken, upptäcka likheter och olikheter samt med noggrannhet och tydlighet uttrycka i ord, hvad man förnummit.[72]

---

[69] Agrelius, *Institutiones arithmeticae*; Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-Konst*; Strömer, *Euklidis Elementa* och Almqvist, *Lärobok i geometrien.*

[70] Wolff, *Auszug aus den Anfangs-Gründen aller Mathematischen Wissenschafften.*

[71] Se Almqvist, *Lärobok i geometrien*, förord.

[72] Per Adam Siljeström, ”Geometri för nybegynnare, af P. N. Ekman, Lektor i Matematiken vid Wexjö Gymnasium”, *Tidskrift för lärare och uppfostrare*, 1846.

Här är det givetvis oerhört väsentligt att man vet att den ”geometri” han syftar på är just den linearteckningens geometri från vilken bevisen uteslutits. Det krävs ingen djupare analys för att se hur geometrin här får bestämma vad verkligheten *är*. Man lär sig uppfatta och benämna, men det man lär sig är givetvis att se verkligheten så som den framstår med utgångspunkt från geometrin. Linearteckningens praktiska arbete blir därmed ett arbete med ”verkligheten”. Och den euklidiska geometrin blir ett arbete med denna verklighets grund eller essens.

Sammanfattning

Låt mig avsluta denna avhandlingens andra del med en kort resumé av vad jag sagt om skolmatematikens utveckling fram till början av 1800-talet. Jag började med räknelärorna. De var en typ av böcker vars disposition och innehåll i stor utsträckning tog form före 1600-talet, då matematiken fick sin vetenskapliga status. De framställde matematiken som en räknekonst – en mångfacetterad uppsättning tekniker för att besvara de frågor som uppstod inom det borgerliga livet. Framför allt innehöll räknelärorna en mängd olika tillämpningar av *Regula de Tri*, anpassade till det borgerliga livets (samtida eller möjligen förflutna) yrkespraktiker.

Räknelärorna mötte under början av 1700-talet den då ”vetenskapliga” matematiken, vilken tagit form utanför Sverige. Denna matematik var till skillnad från räknekonsten ett objekt som man talade om, och som tillmättes en mängd (positiva) egenskaper. Som ett resultat av detta möte föddes en ny sorts modifierade, ”matematiserade”, räkneläror, tillsammans med läroböcker i det nya ämnet algebra. I de nya läroböckerna hade den vetenskapliga matematiken – representerad av Euklides *Elementa* – placerats i centrum, snarare än det borgerliga livets frågor. Böckerna syftade till att visa hur denna matematik kunde vara till nytta. Ett andra mål som fick större betydelse vid denna tid var dessutom att låta matematiken så att säga ”verka” på den unge lärjungen. Arbete med matematik skulle, menade man, befrämja så väl förmågan att dra riktiga slutsatser, som förmågan att fatta moraliskt riktiga beslut.

Från och med 1700-talets andra hälft kan man se hur överväganden rörande lärjungen och undervisningen fick allt större betydelse vid utformandet av läroböcker i matematik. I och med detta avskiljdes ett särskilt skolmatematiskt stoff, speciellt avpassat för att ligga till grund för undervisning i grundläggande matematik. Detta stoff fick allt tydligare gränser i förhållande till såväl den matematiska vetenskapen som det praktiska (borgerliga) livet. Som en del av denna process delades matematiken upp i allt mer tydligt avgränsade ”ämnen”, vad gäller de mest grundläggande studierna: aritmetik, algebra och geometri. Dessa antog formen av kurser, anpassade till institutionaliserade examina.

Kring sekelskiftet 1800 fick *övningsuppgifter* allt större utrymme i läroböckerna. Matematiken blev något man arbetade med praktiskt. Detta arbete var något som skedde i skolan, och läroböckerna blev allt tydligare utformade för att strukturera detta arbete. Matematiken i egenskap av undervisningsstoff fick karaktär av ”väg” för eleverna att röra sig längsmed.

Från och med slutet av 1700-talet började man argumentera explicit för vikten av att såväl matematisk teori, som matematikens tillämpningar, var ständigt närvarande i lärjungarnas arbete. Man menade att de matematiska kunskaperna bara kunde bli praktiska i den mån även det arbete som ledde fram till dessa kunskaper var praktiskt. Samtidigt som banden mellan det matematiska stoff lärjungarna tog sig an i skolorna, och det praktiska räknande som ägde rum inom andra samhällssfärer, i stor utsträckning hade klippts av, försökte man nu återknyta skolan till samhället utanför skolan – fast på ett nytt sätt. De matematiska studierna skulle nu vara en sorts simulering av livet utanför skolan. Det borgerliga liv som räknelärorna beskrev i löpande text och med hjälp av kommenterade exempel och tabeller, hade nu flyttat in i skolan och gjorts till föremål för en sorts pseudoarbete, där såväl den vetenskapliga matematiken som det praktiska livet utanför skolan hade strukturerats om med utgångspunkt från undervisningens villkor. Man kunde – vilket också var syftet – i uppgifterna se hur matematiken var ständigt närvarande i både den fysiska och sociala verkligheten. Samtidigt presenterades aldrig någon sammanhängande bild av själva matematiken – i egenskap av abstrakt vetenskapligt system. Matematiken konstituerades istället som ”där ute” – sammanvävd med verkligheten.

Väsentligt är att den bild som därmed konstituerades hade en tydlig hierarkisk struktur. Något förenklat kan man säga att undervisningen i aritmetik konstituerade aritmetiken som ett praktiskt användbart redskap, samtidigt som undervisningen i geometri (i Almqvists praktiska mening) förmedlade en bild av verkligheten som till sin essens geometrisk. Undervisningens budskap var att praktiskt handhavande av verkligheten involverade och krävde praktiskt användbara kunskaper i aritmetik och geometri. Algebra respektive euklidisk geometri konstituerades tvärtom som redskap för teoretiskt behärskande av verkligheten. Algebran gjordes till aritmetikens teori, med vars hjälp aritmetikens regler och tekniker kunde sättas in i ett övergripande systematiskt sammanhang. I den euklidiska geometrin visades hur de termer och tekniker som man fått öva på i den mer grundläggande undervisningen, kunde sättas samman till ett (som det framstod då) koherent deduktivt system. Algebran och geometrin kom att representera den teoretiska sanningen om den praktiska verklighet som konstituerades genom undervisningen i aritmetik och praktisk geometri. Man kan därmed säga att matematiken som helhet konstituerades som ett i sig själv hierarkiskt objekt, vilket gav stöd åt en hierarkisk social verklighet.

Avslutningsvis vill jag dock upprepa att matematiken kring 1840 ännu spelade en helt perifer roll i det svenska samhället. Matematiken var – detta är viktigt att komma ihåg – inget tema i debatten angående realbildningen. Man var överens om att det var fel att (för att nu förenkla något) latinet fick så stort utrymme i läroverket. Man ville att något annat skulle ta plats i latinets ställe. Ytterst få tycks de ha varit som i offentliga sammanhang argumenterade för att just matematiken skulle få en central plats i den offentliga skolan. Vad jag berättat om i det här kapitlet skall förstås som en början – där matematiska studier flyttar in i nya sammanhang, de som ägnar sig åt undervisning i matematik börjar tala om matematiken och undervisningen på ett nytt sätt, samtidigt som matematikens blick både får en tydligare struktur och successivt börjar utsträckas till en större del av samhället.

III. Uppkomst och utveckling

9. Matematiken och barnet

Mot slutet av 1700-talet föddes på flera håll i Europa nya tankar kring barnuppfostran. Orsakerna till förändringen är svåra att överblicka och de faller väsentligen utanför den här avhandlingens ramar. I England är det lätt att se tilltagande industrialisering och urbanisering som en orsak. Till Sverige kommer dessa tendenser först senare, så här får man hänvisa till andra samhälleliga (ekonomiska, sociala, ideologiska) faktorer. Mycket tyder på att förändringen på ett övergripande plan hänger samman med en strukturellt betingad uppluckring av tidigare mekanismer för kontroll av samhällets lägsta skikt.[1]

Vad som hände var att man började söka efter metoder att skapa ordning inom växande skaror av fattiga barn, inte genom våld och hot om våld, utan genom att avskilja dem från det övriga samhället – i synnerhet deras hem – och under en begränsad tid forma deras vanor, deras sätt att tänka och inte minst deras vilja, genom undervisning. Utifrån skolmatematikens mer begränsade perspektiv kan man särskilja en uppsättning nya villkor för undervisningen som denna ambition förde med sig.

För det första var det nu barn, snarare än ungdomar, som skulle undervisas. Vi har i tidigare kapitel sett en tendens till att undervisningspraktikens villkor i allt större utsträckning bestämde innehållet i böcker om grundläggande matematik. Räknelärorna var utformade för att läsas och för att bibringa läsaren allt det han behövde veta för att lära sig behärska räknekonsten. Dessa räkneläror transformerades från mitten av 1700-talet till läroböcker, skrivna för att användas inom en specifik undervisningspraktik. När det nu var barn som skulle undervisas togs ytterligare ett steg bort från räknelärornas självstudieideal. Behovet av särskilda undervisningsmetoder blev mer påtagligt.

För det andra tillhörde dessa barn samhällets lägre skikt, vilket satte ramarna för vilka undervisningsmetoder som ansågs lämpliga. Dessa skiljde sig från de vid till exempel vid kungliga krigsakademin på Karlberg, där de som undervisades ofta hade ett relativt högt socialt ursprung.

---

[1] En slutsats som jag drar bland annat med utgångspunkt från den tämligen mångfacetterade diskussionen i Petterson, *Frihet, jämlikhet, egendom och Bentham.*

För det tredje var barnen många. Matematiska studier blev nu för första gången en del av något som med fog kan kallas massundervisning. I Sverige skulle det dröja länge innan deltagande i matematisk undervisning blev obligatoriskt. Under början av 1800-talet togs emellertid viktiga steg i denna riktning. Skolan började då fylla en ny funktion som *plats*; ett alternativ till andra platser, som hemmet, gatan och (framför allt i England) fabriken.[2] Antalet barn som skulle undervisas blev därmed i ett slag mycket större.

För det fjärde var de ekonomiska omständigheterna sådana att det inte kunde bli fråga om undervisning bedriven av lärare med något större mått av bildning. Lärarna hörde tvärtom även de oftast till samhällets lägre skikt och i förhållande till antalet barn var de mycket få. Detta fåtal fattiga och okunniga lärare, hade alltså till uppgift att bedriva undervisning, som riktade sig till en stor mängd likaledes fattiga barn. Detta satte ramarna för vilka undervisningsmetoder som var möjliga.

För det femte – och detta är väsentligt – var det främsta målet för den undervisning det nu blev fråga om som sagt inte att förmedla specialiserade kunskaper och i synnerhet inte att lära eleverna matematik (var sig räkning eller geometri). De skulle inte heller lära sig tänka logiskt med hjälp av matematiken, eller bibringas någon symboliskt värdefull förmåga över huvud taget. Målet var, som man ofta uttryckte det, ”sedlighet”, men som vi skall se fanns det många olika sätt att tala om detta mål.

I det här kapitlet skall jag först ge en allmän beskrivning av två undervisningsmetoder som var anpassade till dessa villkor: först *växelundervisningssystemet*, sedan en metod, eller ett sätt att tänka kring grundläggande undervisning, som jag kommer att kalla *bildningstänkandet*. Efter en kort beskrivning av de två metodernas särdrag försöker jag visa att skillnaden mellan dem inte är så stor som man lätt kan tro, och att den snarare ligger på en diskursiv nivå än en praktisk. Mot bakgrund av en allmän karaktäristik av metodernas gemensamma drag, visar jag sedan vad de på en mer konkret nivå innebar för skolmatematikens utveckling – först för geometriundervisningen sedan för undervisningen i aritmetik. Avslutningsvis diskuterar jag det faktum att det var vid denna tid man i skolmatematiska sammanhang började se felaktiga undervisningsmetoder som ett hinder för matematikens potential att komma eleverna till del. Detta tänkesätt kom att i stor utsträckning sätta agendan för skolmatematikens fortsatta utveckling. Jag argumenterar här från att det måste förstås mot bakgrund av en intern motsägelse mellan bildningstänkandets diskursivt uttryckta ideal och de bildande praktikernas ordnande och kontrollerande sociala funktion.

---

[2] Se Bengt Sandin, *Hemmet, gatan, fabriken eller skolan: folkundervisning och barnuppfostran i svenska städer 1600–1850*, Lund, 1986, Mats Sjöberg, *Att säkra framtidens skördar. Barndom, skola och arbete i agrar miljö: Bolstad pastorat 1860–1930*, Linköping, 1996 och för en kommentar rörande folkskolans något senare utveckling: Gunnar Richardsson, *Kulturkamp och klasskamp. Ideologiska och sociala motsättningar i svensk skol- och kulturpolitik under 1880-talet*, Göteborg, 1963, s. 246ff samt Andersson, *Läsning och skrivning*, s. 77ff.

Nya tankar om uppfostran

Växelundervisningssystemet

Metoden framför andra som föreslogs för att lösa det problem som de ovanstående faktorerna konstituerade var växelundervisningssystemet. Det importerades till Sverige från England, där de två britterna Andrew Bell och Joseph Lancaster, relativt oberoende av varandra, givit det en konkret utformning.[3] Systemets viktigaste särdrag var att barnen i stor utsträckning undervisade varandra, snarare än att alla undervisades av vuxna lärare. Detta möjliggjordes genom att undervisningen var organiserad med utgångspunkt från ett noga uttänkt system av ordningsregler, kombinerade med reglementen för såväl belöningar av studieflit som bestraffningar av olika typer av störande beteenden.

De undervisande eleverna kallades *monitörer*, och varje monitör brukade ha något tiotal elever att undervisa i vad som kallades en *cirkel* eller en *klass*. Studierna inom varje ämne delades in i en hierarkiskt ordnad mängd sådana klasser. Vad gäller räkning förekom i vissa varianter 12 – i andra så mycket som 23 klasser.

Undervisningen gick till så att en monitör, med utgångspunkt från en tabell, eller i vissa fall en bok, läste upp frågor till barnen i cirkeln. Enligt en noga reglerad ordning fick eleverna sedan försöka svara på frågorna, vilket resulterade i en sorts strukturerad dialog mellan monitören och eleverna. Av denna dialog framgick vilka elever som behärskade stoffet (enligt de rådande kriterierna, vilket åtminstone i vissa fall innebar att ha lärt sig svaren utantill). Denna kontinuerliga prestationsmätning utnyttjades inom växelundervisningssystemet för att individuellt flytta eleverna mellan de hierarkiskt ordnade klasserna. Praktiskt kunde detta gå till så att monitörerna noterade vilka elever som borde flyttas (uppåt eller nedåt), och den ensamme lärare som övervakade systemet verkställde dessa flyttar under sina regelbundna ronder i undervisningslokalen.[4] Man kan därför tala om *fri flyttning* som ytterligare ett av systemets särdrag.

Bell och Lancaster tillmätte växelundervisningssystemet ett explicit disciplinerande syfte. Även om det förekom undervisning i matematik var därför det matematiska stoffet dubbelt underordnat: dels var det underordnat andra ämnen – till exempel religionsundervisningen och modersmålet, vilka ansågs viktigare; dels var det i egenskap av kunskapsstoff, i likhet med övriga ämnen, underordnat det övergripande disciplinerande syftet. I det Engelska

[3] Den följande korta karaktäristiken utgår från Thor Nordin, *Växelundervisningens allmänna utveckling och dess utformning i Sverige till omkring 1830*, Stockholm, 1973 och Petterson, *Frihet, jämlikhet, egendom och Bentham*, kapitel 10.

[4] Så skulle det gå till i det system som beskrivs i P. H. Mönster & J. Abrahamsson, *Om den indbyrdes Underviisnings väsen och värd*, Köpenhamn, 1821, s. 82.

växelundervisningssystemen utgjorde de matematiska studierna kort sagt ett av flera redskap för att forma barnens sätt att tänka och vilja.

På sin väg till Sverige (och andra platser i världen) kom växelundervisningssystemet att transformeras och delvis tillskrivas andra betydelser än de det fått av sina skapare. Det kom att betraktas som en allmän utbildningsteknisk innovation, snarare än som ett redskap specifikt knutet till folkundervisning och disciplin. Det svenska läroverk där matematikens och realämnenas ställning länge var starkast var Nya Elementarskolan i Stockholm, som grundades 1828. En av de många pedagogiska nyheter som prövades i denna skola var just växelundervisningssystemet.[5] Det system det var fråga om där skiljde sig på många sätt från de växelundervisningssystem som utformats för att passa folkundervisningens praktiska omständigheter – med fler barn, mindre kunniga lärare, sämre materiella villkor och så vidare. Snarare än att tala om växelundervisningssystemet i singular, kan man därför tala om en familj av system, vars gemensamma nämnare beskrivits ovan.

Bildningstänkandet

Det var växelundervisningssystemet och de värden det förknippats med i England (såsom dess förmåga att leda till religiös sedlighet och inte minst dess prisbillighet) som utgjorde den självklara praktiska utgångspunkten då en offentlig skola började ta form i Sverige under 1800-talets första hälft.

Från mitten av 1800-talet blev det emellertid mindre gångbart att tala om folkundervisning i explicit disciplinerande termer. Istället blev det då vanligare att tala om syftet med denna undervisning i termer av bildning. Som jag nämnde i avhandlingens inledning (s. 14) har bildningstänkandet sitt ursprung i Tyskland, där det i filosofiska och teologiska sammanhang under andra halvan av 1700-talet förknippades med en ambition att låta människan växa och formas i riktning mot ett högre gudomligt ideal – ofta i motsats till ambitionen att lära sig ett visst på förhand givet kunskapsstoff.[6] Detta förknippande av termen bildning med högre värden ser jag som en parallell till den uppvärdering av matematiken jag beskrev i kapitel 6. Liksom matematiken var bildningstänkandet inte direkt knutet till frågor rörande grundläggande undervisning, och i synnerhet inte till folkundervisning. Bildningstänkandets skolmatematiska uttryck (vilka står i fokus här) kan förstås som resultatet av det allmänna bildningstänkandets möte, dels med de föreställningar rörande matematiken som jag beskrev i kapitel 6, men inte

[5] Innovationerna och deras öden under Nya Elementars första verksamhetstid beskrivs i J. A. Hazelius, *Bidrag till Svenska Elementarundervisningens historia. Anförande vid terminafslutningen i Nya Elementarskolan den 15 Juni 1860 af Direktionens ledamot, numera generalmajoren J. A. Hazelius.*, Stockholm, 1862.

[6] Se t.ex. Charles Taylor, *Hegel*, Cambridge, 1975, s. 3–51; Hans-Georg Gadamer, *Sanning och metod: i urval*, Göteborg, 1997, s. 23–34; Petterson, *Frihet, jämlikhet, egendom och Bentham*, s. 135–137 och Broady, ”Bildningstraditioner och läroplaner”.

mindre väsentligt de praktiska villkor jag beskrev i inledningen till det här kapitlet. Min tes är att både växelundervisningssystemet och de skolmatematiska undervisningspraktiker som under 1800 ansågs vara bildande tog form som relativt likartade sätt att hantera dessa praktiska villkor. Givetvis finns stora praktiska skillnader mellan undervisningsmetoderna – anledningen till att växelundervisningssystemet blev så populärt var till exempel att det, i motsats till de bildande metoderna, innehöll ett konkret recept för hur undervisningen i praktiken kunde ordnas.[7] Det finns emellertid en rad gemensamma nämnare. Jag skall nu beskriva några av dessa.

Bildning och disciplin

> *Är matematikkunnande begreppsligt?* Vad är matematisk begreppsbildning? Vad är ett matematiskt begrepp? Vad är ett talbegrepp? Vad är begreppslig förståelse? Varför talar man om matematikundervisning i termer av begrepp? Vad får detta sätt att tänka kring skolan och matematiken för konsekvenser?

Låt mig börja med att återknyta till problemställningen i avhandlingens första del. Skolmatematiken kretsar idag, strax efter millennieskiftet 2000, kring begreppsbildning. De matematiska begreppen ter sig i en teoretisk mening svårfångade men sätter likväl ramarna för de skolmatematiska undervisningspraktikernas utformning. Begreppen måste ta form – eller *bildas* – genom elevens intresserade praktiska verksamhet. De kan inte föras över från lärare till elev och inte heller uppstå plötsligt som resultatet av en god förklaring. Jag talade om dessa krav i termer av matematikens insida, vilken fungerar som skolmatematikens domare.

Min tes är att dessa krav innehåller en grundläggande motsägelse. De säger sig leda till matematiska begrepp, och därmed till allt det höga som matematiken förknippas med. Om man emellertid bortser från matematiken och bildningen, framstår den bildande praktiken snarare som nedtryckande än upplyftande. Detta har, menar jag, sin förklaring i att dessa undervisningspraktiker tog form vid en tid då *bildning*, i skolmatematiska sammanhang, förknippades med disciplin och att hålla nere, snarare än den mer allmänna bildningsdiskursens ideal. Eleverna, folket barn, skulle i och för sig bildas till frihet, men friheten det var fråga om var den frihet som ligger i att inte vilja ha något annat än det man fått sig tilldelat.[8] Jag skall argumentera för detta genom att visa på tre gemensamma nämnare mellan bildningstänkandet och det explicit disciplinerande växelundervisningssystemet.

[7] Man kunde köpa en ”Skolapparat”, som innehöll allt man behövde för att starta en lancasterskola (Nordin, *Växelundervisningens allmänna utveckling*, s. 255).
[8] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation*, s. xxviii.

Metodens nödvändighet

För det första utgick båda systemen från att nödvändigheten av en på förhand uttänkt undervisningsmetod. Undervisningsmetoden står i centrum både för växelundervisningssystemet och inom bildningstänkandet, men denna likhet tenderar att döljas av de stora skillnaderna i sättet att tala om metodens syfte.

Växelundervisningssystemet

Växelundervisningssystemet är i sig självt en undervisningsmetod och mer därtill. Merparten av undervisningen i växelundervisningsskolorna bedrevs av eleverna själva, vilka undervisade varandra med hjälp av ett system som i detalj reglerade när, var och hur varje undervisningsmoment skulle gå till. Det behöver knappast sägas att de undervisande – *monitörerna* – inom detta system intog en synnerligen underordnad ställning. Systemet byggde på en glasklar och explicit hierarki, där eleverna var ordnade från de första nybörjarna, som befann sig längst ner, via elevernas inbördes ordning, monitörernas positioner och elever vilka fungerade som ordningsmän, till den ofta ensamma vuxna lärare som befann sig i hierarkins topp. Men även denna vuxne kan sägas vara underordnad själva det system som gjorde det möjligt för honom att ensam hålla ordning på barn som ofta kunde räknas i hundratal.

Bildningstänkandet

Pestalozzis bedrift var att sammanföra matematiken, bildningstänkandet och en typ av undervisningspraktik vilken åtminstone potentiellt kunde lösa samma praktiska problem som växelundervisningssystemet. Angående metodens betydelse skriver Pestalozzi:

> Jag tror ej, att det är värt att tänka på att komma ett steg vidare med folkundervisningen, så länge man inte funnit undervisningsformer, vilka gör läraren, åtminstone till dess elementarkunskaperna är bibragta, till ett blott och bart mekaniskt verktyg för en metod, vars resultat genom naturen av dess former och ej genom den dem ledande mannens konst måste framträda.[9]

Här blir implikationerna av själva idén med en undervisningsmetod ganska tydliga. Anledningen till att en metod behövs är, givetvis, att den som skall undervisa inte på egen hand kan lista ut hur undervisningen bör gå till. Pestalozzi uttrycker en brist på förtroende för de tilltänkta lärarna, och vill därför göra dem till ”mekaniska verktyg”.[10] Detta var givetvis exakt vad växelundervisningssystemet gjorde med monitörerna. Den avgörande skillnaden låg snarast i att Pestalozzi inte lika exakt som Bell och Lancaster beskrev hur lärarnas verksamhet i praktiken kunde regleras.

---

[9] Pestalozzi, *Huru Gertrud undervisar sina barn*, s. 24.
[10] Ibid.

Intressant, och till synes motsägelsefullt, är att Pestalozzi öppet deklarerade sin ”fullkomliga okunnighet i allt”.[11] Denna okunnighet framhävs ofta som ett av Pestalozzis kännemärken, och den sprider ljus över de metoder han utformade.[12] Klart är nämligen att hans tilltänkta lärare – liksom växelundervisningssystemets monitörer – inte antogs ha och inte heller antogs behöva något större mått av kunskaper. Mer specifikt behövde de inte vara experter inom något av de områden inom vilka undervisningen rörde sig – till exempel inom matematik eller räknekonst. Vad som krävdes av läraren var först och främst underkastelse – under religionen, lärarekallet, och den riktiga undervisningsmetod som formats av någon annan än han själv. Det är inte svårt att se hur fokus på metod, både då det gäller växelundervisningssystemet och hos Pestalozzi, betingades av samma praktiska omständigheter, nämligen ett bristande förtroende såväl för de tilltänkta lärarnas sinne för pedagogik som för deras kunskaper.

Målet att forma människan

För det andra syftade både växelundervisningssystemet (åtminstone de växelundervisningssystem som utformats för folkundervisning) och bildningstänkandet till att i grunden omforma eleverna. Liksom likheten i fråga om metodens centrala ställning menar jag att denna likhet döljs av de stora skillnaderna i sättet att tala om *varför* det är nödvändigt att i grunden omforma eleverna, liksom också i förståelsen av *mot vilket mål* eleverna skall formas.

Växelundervisningssystemet

Utbildningshistorikern Lars Peterson skriver, angående motiven bakom växelundervisningssystemets utformning, att man ville undvika naken repression och istället omforma den nödvändiga kontrollen till självkontroll. Detta skulle ske genom att ”undervisningen reducerades till drill och underkastades en mekanisering som i allt väsentligt hämtades från de tekniker som i England utvecklats för arbetsprocessen i fabrikerna”. Han fortsätter:

> Både kontrollbetingelserna och arbetsformerna skulle också i görligaste mån efterlikna de villkor som fabriksproduktionens ställde, tänkte man sig i de växelundervisningssällskap som efter brittisk förebild uppstod runt om i världen och som erbjöd massundervisning för underklassen till lägsta pris. Skolorna utformades därför som fabriker – även i Sverige och på andra håll där fabriksmässig produktion ännu var sällsynt – och den vara som producerades i dessa skolfabriker var arbetskraft.[13]

[11] Ibid, s. 6.
[12] Se Broady, ”Bildningstraditioner och läroplaner”.
[13] Petterson, *Frihet, jämlikhet, egendom och Bentham*, s. 264–265.

Thor Nordin, en annan utbildningshistoriker som ägnat sig åt växelundervisningssystemet, konstaterar att både Bell och Lancaster såg skolans huvudsakliga uppgift som ”moralisk-religiös fostran av eleverna”:

> De båda skolmännen var därvid övertygade om att skolverksamhetens maskinmässiga gång liksom elevernas självverksamhet och personliga ansvar skulle frambringa detta mål. Genom att ersätta kaos med minutiös ordning, elevernas sysslolöshet med ständig och samfälld sysselsättning och den i samtida skolor ofta råa kroppsbestraffningen med olika belöningar ansåg de sig vidare ha funnit de erforderliga medlen härför.[14]

Till detta kan läggas att de som vid denna tid arbetade för upprättandet av växelundervisningsskolor ofta samtidigt argumenterade för ”inrättande av korrektionsanstalter och polisväsende [samt] reformering av fängelser och straffrätt”.[15]

Det råder med andra ord ingen tvekan om vilket övergripande sammanhang denna typ av växelundervisningsskolor var en del av. (Här måste emellertid återigen påpekas att växelundervisningsmetoden som sådan inte alls uteslutande sågs som en metod för undervisning av samhällets lägsta skikt. Tvärtom sågs den som en innovation möjlig att dra nytta av även inom högre utbildning. Man bör alltså inte likställa själva metoden med de syften den användes för. Till saken hör även att det inte går att dra någon skarp gräns mellan växelundervisningssystemet och bildningstänkandet. Tvärtom förändrades såväl själva växelundervisningssystemet som sättet att tala om det i dess resa från England till Sverige, och man kan snarast tala om en ganska disparat uppsättning olika växelundervisningssystem, anpassade till olika praktiska omständigheter och syftande mot olika mål.)

Bildningstänkandet

Undervisningens huvudsakliga syfte var alltså inte bibringande av specialiserade kunskaper och färdigheter. Då det gäller växelundervisningssystemet, så som det beskrevs av Bell och Lancaster i England kring sekelskiftet 1800, står det klart att motivet var att göra underklassens barn till laglydiga och duktiga arbetare. Den underförstådda utgångspunkten var, enkelt uttryckt, ett bristande förtroende för de alternativa miljöer som barnen kunde tänkas vistas i om de inte var i skolan (till exempel deras hem).

Inom bildningstänkandet gav man istället uttryck för ståndpunkten att barnet som sådant var bristfälligt och behövde omformande uppfostran för att över huvud taget växa upp till en riktig människa. I detta sammanhang måste man se denna hänvisning människan i allmänhet som blott ett annat sätt att tala om i stort sett samma behov av att disciplinera underklassen. Som

---

14 Nordin, *Växelundervisningens allmänna utveckling*, s. 118.

15 Petterson, *Frihet, jämlikhet, egendom och Bentham*, s. 90. Jmf. s. 33 ovan.

stöd för detta synsätt vill jag hänvisa till C. O. Finemans *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden.*[16] Denna text är relevant dels på grund av att den hade stor spridning,[17] men framför allt för att Fineman i sin retorik kombinerar element hämtade såväl från växelundervisningssystemets explicit disciplinerande diskurs som från ett religiöst färgat bildningstänkande. Han tydliggör därför närheten mellan dessa två synsätt.

Fineman inleder med att karaktärisera det problem som måste lösas. Han skriver att ”det sunda omdömet förvändes hos mängden”, bort från ”religiös hållning, sedlighet och sann upplysning”, vilket riskerar att medföra ”djurisk förnedring” och ”trottsande sjelfviskhet”.[18] Han konstaterar att denna tendens, ”det af tidens kraf väckta frihetssinnet”, inte låter sig dämpas med våldsamma metoder.[19] Det är här som växelundervisningsmetoden kommer in. Den utgör ett sätt att ”förekomma vådan, och gifva verksamheten en ändamålsenlig riktning”.[20] Den skall låta själsförmögenheterna ”välgörande utbilda sig”, ett mål som inte kan skiljas från att ”medvetande vinnas af frihetens och nödvändighetens samband såsom en *condition sine qua non* för allmänt och enskilt väl”.[21] Det är här tydligt hur den disciplinerande diskursen löper parallellt med den bildande, hur den eftersträvade lydnaden sammanfaller med ”sann” frihet.

Förmodligen efter att ha lyssnat på, eller på annat sätt tagit del av den tyske filosofen Gottlieb Fichtes *Tal till den tyska nationen*,[22] gjorde de två reformvännerna Carl Adolph Agardh och Magnus Bruzelius en översättning av Pestalozzis *Elementar-böcker*, vilken publicerades 1808.[23] De skriver redan i sin boks första mening att Pestalozzis metod är en ”utvecklingsmetod” snarare än en metod för undervisning.[24] Inspirerade av Fichte hoppades de att denna kunde användas för en behövlig ”nationalundervisning”, som skulle lyfta folket från ett allt mer utbrett fördärv. De skriver att

> Tidehwarfwets karakter är medwetandet af att wara nästan öfwer allt på willowägar, och famlandet i mörker efter rätta stigen. Filosofien är ett bilderspråk; Poesien lewer ej i Skaldernas sånger. Religionen har förswunnit tillika med öfwertygelsen om menskliga naturens högre wärde. Den fysiska kraften har domnat. De fordna Jättarne hafwa sammankrumpit till Dwergar och kunna ej lyfta sina Förfäders wapen.

---

[16] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation.*
[17] Petterson, *Frihet, jämlikhet, egendom och Bentham*, s. 293.
[18] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation*, s. vii–viii.
[19] Jmf Johann Gottlieb Fichte, *Tal till tyska nationen*, Stockholm, 1914 [1807/1808], s. 111.
[20] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation*, s. vi.
[21] Ibid. Här syns för övrigt det stora inflytande Kant hade på pedagogiken vid denna tid, och i synnerhet hans något kontraintuitiva likställande av frihet med total underkastelse (under den moraliska lagen), Immanuel Kant, *Grundläggning av sedernas metafysik*, Göteborg, 1997 [1785].
[22] Fichte, *Tal till tyska nationen.*
[23] Agardh & Bruzelius, *Pestalozzi's Elementar-böcker.*
[24] Ibid, s. I.

> Menniskoslägtet känner att det är sjukt, och griper med begärlighet efter det af Charlatanen räckta botemedlet.[25]

De skriver att undervisningsmetodens mål är ”upphöjandet af en blott möjlig menniska till en werklig”, och vidare: ”Barnet nyss framträdt i werlden har ej mer än möjligheten eller anlaget af menskiighet. Genom uppfostran skall detta anlag utbildas”.[26] Här ser vi ytterligare ett uttryck för ståndpunkten att människan i allmänhet är bristfällig och att skolans främsta och mest grundläggande uppgift är att, som Fichte själv uttryckte det, ”helt och hållet och fullständigt bilda hela människan till människa”.[27]

Föreställningen att människan vid sin födsel är bristfällig och i behov av undervisning utgjorde utgångspunkten för den svenska folkundervisningen under hela 1800-talet. Så här kunde folkskolans uppfostrande uppgift beskrivas på 1870-talet:

> Menniskan är icke vid sin födelse, hvad hon kan och bör vara [...] hon är missrigtad, syndig. [...] Menniskan har dock af Gud undfått anlag [...] men dessa äro till en början helt outvecklade och ligga i ett slags dvala. De måste utifrån väckas och lifvas, för att komma till någon utveckling. [...] Sammanfattningen af all den inflytelse, den ledning och hjelp, hvarigenom en menniska föres fram till sin höga bestämmelse, kallas uppfostran.[28]

Sammanfattningsvis kan man säga att föreställningen att barnet som helhet, i egenskap av människa, i sig själv är bristfälligt, och att skolans, undervisningens och uppfostrans uppgift är att i grunden avhjälpa denna brist, utgjorde en gemensam nämnare för tänkandet kring folkundervisning från slutet av 1700-talet och sedan under hela 1800-talet.

Innebörden av detta kan tydliggöras genom en jämförelse med räknelärornas långt mer blygsamma ambitioner, nämligen att förmedla räknekonsten. Det finns här även en skillnad i jämförelse med 1700-talets föreställningar om matematikens tanketränande egenskaper. Då rörde det sig om att öva upp den i och för sig viktiga, men likväl avgränsade, förmågan att tänka riktigt. Nu skulle istället hela människan formas. Detta innefattade i och för sig att forma tankeförmåga. Än viktigaste var emellertid att ge riktning åt viljelivet.[29]

---

[25] Ibid, s. 23.
[26] Ibid, s. 25.
[27] Fichte, *Tal till tyska nationen*, s. 44.
[28] Christofer Ludvig Anjou, Karl Kastman & Knut Arvid Kastman, *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Pedagogik.*, Karlstad, 1876, s. 3–4.
[29] Angående de ovanstående resonemangen kring människans brist, finns det kanske anledning att poängtera att de är tänkta i förhållande till det specifika problem som skolmatematikens framväxt utgör. Till exempel gäller detta när jag säger att ambitionen att göra barnen till människor kan ses som ett annat sätt att tala om underklassens disciplinering. Det väsentliga i detta sammanhang är inte att det skulle vara något fel med idén att forma människan, utan

Bildning genom växelundervisning

Man talade vid denna tid i helt explicita termer om vikten av att forma elevernas vilja. Fineman utgör även här ett tydligt exempel. Han beskriver i detalj hur han tänkte sig att hans undervisningssystem skulle åstadkomma detta. *För det första* ”rummets för särskilda ändamål och platser beräknade inredning och material, öfvningarnes fortgående i sträng series och deras på bestämda tider skeende förändringar, samt alla rörelsers taktmässiga verkställande”. Denna mekanism, skriver Fineman, ”gifver ett för barnaåldern särdeles passande ledband”, och den är en nödvändig motvikt mot det ”annars oundvikligt öfverhandtagande sjelfvsvåldet”.[30] *För det andra* ”En underhållande Läseordning”, där ”alla ämnen harmoniskt sammankedjas”, det vill säga en motsvarighet på kunskapsobjektetsnivå av undervisningens praktiska utformning. *För det tredje* ett system av bestraffningar och *för det fjärde* ett system av belöningar. Allt syftandes till det yttersta målet ”*bildning till frihet*”.[31] Termen frihet har här uppenbarligen en speciell innebörd. Fineman förklarar dess innebörd genom att beskriva vad han kallar tre nivåer, vilka hans undervisningssystem konstituerar.

Den första nivån innebär lydnad. Eleverna är för detta ändamål ”jämnt bevakade af Monitörerna, hvilka med sitt pligtmässiga allvar i början ersätta Läraren (Fadren – Lagen)”. På denna nivå är det väsentligt att eleverna med ”fri bestämning underkasta sig, och sålunda vänjas vid den undergifvenhet, som nödvändigt fordras äfven för all sann mensklig ordning. Den inbördes ädla täflan, uttryckt genom ned och uppflyttningen, sätter dem därjämnte i nödvändighet att respektera andras rätt”.[32]

Den andra nivån beskriver Fineman i termer av ”fri nödvändighet”, pliktkänsla, dygd och hopp. Det handlar här om monitörernas position inom växelundervisningssystemet, det vill säga de elever som fungerar som ställföreträdande lärare. De har ”vida mera, än Eleverna, tillfälle att pröfva sig sjelve, och lära känna så väl sina redan vunna stadga som sin svaghet, sina mer eller mindre vådliga anlag”. Denna större frihet leder till ”oegennyttigt nit” och väcker också ”erkänslan af tacksamhet, emedan äldre kamrater på samma sätt varit och äro behjelplige att befordra deras eget fortgående till målet”. Att eleverna har chansen att bli, och faktiskt *blir* monitörer, gör dem tacksamma och får dem att ta sig själva på allvar. Hela tiden inom växelundervisningen som system; befordran är i själva verket en form av belöning, som eleverna får tillkämpa sig och sedan vårda, med ständig risk att igen bli nedflyttade till elevens position.

---

konsekvenserna för skolmatematiken av att man försökt forma människan med hjälp av matematik.

[30] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation*, s. xviii–xix.

[31] Ibid, s. xxviii.

[32] Ibid, s. xxix.

Den tredje nivån utgör "nödvändig, d.v.s. verklig frihet". Detta är ordningsmännens roll:

> De behöfva, så vida Christlig frihet är det helas syfte, ej mera, såsom uti 1:sta Momentet, med lock eller hotande stränghet erinras om skyldigheternas kraf. Enfalden upphöjes till en medvetandet, samvetet och det inre sinnet vårdande oskuld (mens conscia veri, boni et recti), och lagens inneboende ande gör dem af hjertat lydagtige, samt tvingar till oegennyttig, stilla verksamhet för gemensamt bästa. De få en blick på det hela, hvarigenom sjelfva det mechaniska bestyret eller ledningen, hvilken till en stor del är dem uppdragen, *såsom vigtig erkännes* [min kursivering], samt med omsorg och nit verkställes.[33]

Fineman sammanfattar: målet är "själsförmögenheternas fria utveckling", vilken "betingas och åstadkommes genom en ohämmad vexelsidig (organisk) verksamhet".[34] Sådan "fri" utveckling nås alltså inte då människor lämnas åt sig själva. Synden, som är "revolutionär (excentrisk – desorienterande – egoistisk)" måste bekämpas och ersättas av "characters-fasthet"; skolan skall få barnen att utbilda ett "rättmätigt *jag* – en sann sjelfständighet eller personlighet". Detta mål är nått, skriver Fineman, då hon "tillbedjande erkänner ett Högre *öfver* sig, samt är vaksam och väpnad mot det lägres retelser *under* sig".[35]

Fichte, en av bildningstänkandets talesmän, beskrev det viljeformande målet på följande sätt:

> Målet är att lärjungen skall gripas av "en [så] brinnande kärlek för en dylik tingens ordning, att det för honom blir absolut omöjligt, när han sluppit uppfostrans ledning och blir självständigt placerad, att ej vilja denna ordning och ej av alla sina krafter arbeta för dess främjande [...]".[36]

Den tingens ordning Fichte syftade på hade nog inget att göra med Finemans växelundervisningssystem. Inte desto mindre finns uppenbarligen en överensstämmelse vad gäller sättet att tala om undervisningens mål.

Fokus på barnets vilja tror jag måste sättas i relation till Kants karaktäristik av det moraliskt goda, som det totala sammanfallandet mellan människans vilja och den moraliska lagen.[37] Kant menade att människors moral inte skulle värderas med utgångspunkt från deras handlingar och i synnerhet inte handlingarnas konsekvenser. Väsentligt var istället, menade han, att den *vilja* som låg bakom dessa handlingar överensstämde med den universella moraliska lag som han menade sig genom strikt logiskt resonemang ha identifierat. Oavsett hur man ställer sig till Kants resonemang, kan man

[33] Ibid, s. xxxi.
[34] Ibid, s. xxxii.
[35] Ibid, s. xxxiii.
[36] Fichte, *Tal till tyska nationen*, s. 35.
[37] Kant, *Grundläggning av sedernas metafysik.*

konstatera att hans fokus på viljelivet överensstämde med de ungefär samtida ambitionerna till formande barnundervisning.

Även i dagens skolmatematiska diskussion spelar elevernas vilja en central roll. Man talar om den i termer av *attityder* och *intresse*. Elevernas attityder till matematik och deras intresse för matematik kartläggs systematiskt och regelbundet.[38] Med utgångspunkt från dessa undersökningar utformas insatser för att påverka, till exempel tillsättandet av matematikdelegationen 2003.[39] Den sällan uttalade utgångspunkten är givetvis att man anser sig veta vad som är bäst för barnen och ungdomarna, inte bara i fråga om kunskaper och färdigheter, utan även då det gäller deras känslo- och viljeliv. Misslyckande med matematiken i skolan sammanfaller föga oväntat ofta med negativa attityder till matematiken. Detta ger den viljeformande ambitionen en tydlig social dimension – de vars vilja måste formas – de som måste få hjälp att inse ”matematikens värde, roll och betydelse i vardag, yrkesliv, vetenskap och samhälle”[40] – tillhör inte sällan vår motsvarighet till det tidiga 1800-talets underklass. Till skolmatematikens uppkomst räknar jag inte minst uppkomsten av detta sätt att tala om skolans formande ambition med hänvisning till matematiken.

Stoffets underordnade betydelse som formande redskap

För det tredje finns en likhet mellan växelundervisningssystemet och bildningstänkandet i det att båda tillskrev själva undervisningsstoffet en synnerligen underordnad ställning. Det var inte bara så att förmedlandet av vetande och bibringande av specifika färdigheter fick stå tillbaka för undervisningens viljeformande syfte. Bibringande av kunskaper och färdigheter tillmättes ofta till och med ett negativt värde. Fineman är explicit på denna punkt. Syftet med hans undervisning är, skriver han, att lärjungarna skall förbli ”olärda”. För att nå detta mål har han utformat sina metoder så att eleverna skall bibringas vissa elementära kunskaper och färdigheter *utan att behöva abstrahera*. Hans ideal är att eleverna inte skall behöva lyfta sig över praktiken som de är en del av; undervisningen skall istället vara dem till *ledning* och bli deras ”*vade mecum*”. Lärokurserna måste därför ”vara concreta, genetiskt förenande Theori och Practik, så att Lärjungen, utan genomgången abstractionsprocess, kan fatta det hela, oafbrutet likasom lefva i detsamma”.[41] Han är följaktligen mycket kritisk till användningen av böcker i undervisningen, dessa, som han skriver, ”Encyclopedistiska så kallade Läseböcker, där allehanda af lärdom, vitterhet, abstracta moral- och

---

[38] Jag tänker här t.ex. på de återkommande undersökningarna inom ramarna för PISA (Programme for International Student Assessment) och IEA (International Association for The Evaluation of Educational Achievement).

[39] Vars rapport jag citerat flera gånger i avhandlingens första del: Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken.*

[40] Ibid, s. 18 (min kursivering).

[41] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation.*

fromhets-lexor är chaotiskt eller plockvis framkastadt", till upplysning för eleven. Nej, "likasom Catechesen begagnas som Läse- och Lärobok tillika; så böra äfven alla öfriga, i Folkscholan med skäl förekommande Läroämnen, vara i möjligaste måtto gemensamma och deras Theori medelst Cursläsning förberedelsevis meddelas".[42]

Detta explicit uttryckta syfte med konkretion och kunskapsstoffets begränsning sprider ljus över bildningstänkandets undervisningsmetoder. Även Pestalozzi distanserade sig nämligen i förhållande till "lärd" undervisning. Han skriver att han vill undvika att barnen skall bli "eländiga kraft- och åskådningslösa ord- och pratmänniskor".[43] Den människa, skriver han:

> som med lätta vingar fladdrar kring hvarje kunskapsgren utan att genom ordnade, trägna öfningar inprägla och stärka, det hon inhämtat, förlorar under tiden den klara, fasta, uppmärksamma blick och den fina sanningskänsla, som förstår uppskatta och njuta sanna och rena fröjder.[44]

Den praktiska likheten mellan dessa trägna övningar och Finemans konkreta lärokurser är uppenbar. Här tillmäts de emellertid en helt annan mening. Fineman såg sin undervisning som ett sätt att låta eleverna förbli olärda. Pestalozzi såg tvärtom sin undervisning som en universell form av *bildning*. Att ägna sig åt det allra mest elementära så länge som möjligt, och att gå ytterst långsamt fram, var för honom inte att hindra eleverna från att lära sig allt för mycket. Tvärtom, skriver han: "När mäniskorna skynda denna ordning i förväg, så förstöra de hos sig självfva sina inre krafter och beröfva sitt väsens innersta dess hugnad, ro och jämvikt."[45] Vad Fineman beskriver som ett medel att begränsa, ser Pestalozzi som ett medel att bilda. Agardh och Bruzelius skrev, angående Pestalozzis metod, att:

> om werkliga kunskaper och färdigheter genom Pestalozziska methoden erhållas, är det endast tillfälligt, och en följd deraf, att öfning af en förmögenhet måste nödwändigt anwända sig på et föremål: att Pestalozziska methoden långt ifrån att wilja såsom hufwud-ändamål inplanta kunskaper i wanlig mening (främmande erfarenheter), endast wänjer lärlingen att sjelf igenom sig sjelf skaffa sig kunskaper, i deras högsta mening (egen sjelfförwärwad erfarenhet); och att i stället för att alla andra uppfostrings-methoder syfta att gifwa kryckor åt menskliga förmögenheterna, den Pestalozziska i synnerhet arbetar på att göra dessa kryckor onödiga.[46]

---

[42] Ibid, s. xvi.
[43] Pestalozzi, *Huru Gertrud undervisar sina barn*, s. 97.
[44] Pestalozzi, *Enslingens aftonstund*, s. 17.
[45] Ibid, s. 14.
[46] Agardh & Bruzelius, *Pestalozzi's Elementar-böcker*, s. III–IIII.

Ett något mer alldagligt uttryck för samma tanke är nedanstående citat från 1820 års skolordning, vilket följer efter en anvisning om att man bör gå långsamt fram i studierna:

> Att framstegen wid denna långsammare method i början synas små och ringa, skall framdeles ersättas genom redighet i begreppen och framför allt genom arbetswana och förmågan att öfwerwinna swårigheter. Man må i alla fall aldrig glömma, att hwad gossen wid 12 eller 15 års ålder hunnit lära, är af ringa wärde, betraktadt såsom kunskap. Det glömmes fort wid minsta afbrott i studierna. Det läres något senare på hälften eller fjerdedelen så lång tid, som dertil för nämnde ålder blifwit anwänd. Men betraktad såsom öfning för själskrafterne, är den första underwisningen dyrbar, då den utvecklar förmågan, att fästa uppmärksamheten wid intellectuella föremål, upöfwat minnet, gifwit wana wid ihärdigt arbete och wäckt hågen för kunskaper genom ett slags erfarenhet af det nöje sjelfwerksamheten skänker hwarje rätt afpassad Läroöfning.[47]

Tydligare än så här kan knappast stoffets underordnade ställning beskrivas. Det tas här för givet att själva innehållet i undervisningen, det eleverna skall lära sig, kommer att glömmas bort. Det väsentliga är istället undervisningens form. Här var det emellertid fråga om en annan form än till exempel Finemans växelundervisningssystem. Om Finemans system syftade till att forma samhällets lägsta skikt till ofarliga olärda, skulle undervisningen i läroverket forma sina lärjungarna till dessa olärdas motsats.

Matematik som bildningsmedel

Låt mig nu, mot bakgrund av denna allmänna karaktäristik, åter närma mig skolmatematiken. Inom de växelundervisningssystem som utformats för folkundervisning utgjorda alla läroämnen relativt likvärdiga redskap för det överordnade uppfostrande syftet. Inom bildningstänkandet tillmättes däremot matematiken, tillsammans med språket, en särställning. Vi såg i kapitel 6 ovan hur matematiken under 1600- och 1700-talen vävdes samman med en mängd olika tankesystem. Det skolmatematiska bildningstänkandet kan ses som ytterligare ett i raden av sådana tankesystem.

Pestalozzi såg matematiken som en aspekt av naturens gudomliga essens. Målet för Pestalozzis undervisning var att eleverna skulle bildas till harmonisk samstämmighet med denna natur. Undervisningen skulle forma deras sätt att uppfatta verkligheten och detta så grundligt att de riktigt bildade eleverna inte bara utgjorde en annan, bättre sorts människor än de obildade – de kunde också sägas leva i en annan verklighet, eftersom själva verkligheten enligt detta synsätt var betingad av de mänskliga förmågor varmed den uppfattades eller *åskådades*, som man ofta uttryckte det. Undervisningens

---

[47] *Kongl. maj:ts förnyade nådiga skol-ordning*, s. 9–10.

syfte var att elevernas åskådningsförmåga, deras förmåga att se bortom det tillfälliga och oväsentliga i tillvaron, skulle övas upp och stärkas – och detta genom metodisk övning. Pestalozzi skiljde mellan tre olika moment i förmågan till riktigt åskådande av naturen:

> 1) Kraften att uppfatta olika föremåls form och att för sig tydliggöra deras innehåll.
> 2) Kraften att bedöma dessa föremål med hänsyn till deras antal och att bestämt förtydliggöra sig dem såsom enhet eller flertal.
> 3) Och, för att ännu mer för sig tydliggöra föremål, sedan detta skett genom form och antal, även kunna använda språket, och därigenom fasthålla föremålet, till det blir henne omöjligt att glömma det.[48]

Det är i de två första momenten som matematiken kommer in i bilden. Att klart uppfatta olika föremåls form var för Pestalozzi liktydigt med att uppfatta dem i geometriska termer. Att bedöma föremål med hänsyn till antal innebar givetvis att kunna räkna dem. Form och antal – det var för Pestalozzi verklighetens mest grundläggande struktur. Att se verkligheten som geometri och aritmetik var alltså liktydigt med att uppfatta dess mest väsentliga egenskaper.

Ett av Pestalozzis grundläggande antagande var att naturen själv, dess essens, bär på en egen förmåga att locka fram, eller som Pestalozzi skriver "avtäcka", den mänskliga kraft som behövs för dess åskådande.[49] Det som krävs för att detta skall ske är, menade Pestalozzi, ett riktigt arrangerat möte mellan den ännu ej färdigutvecklade människan och naturen. I detta möte kan människan öva sig på att känna igen naturen för vad den verkligen är, bortom de vanföreställningar den mänskliga kulturen placerat som förment givna framför hennes ögon. Lika väsentligt som antagandet att naturen utgör ett av uppfostrans nödvändiga och mest kraftfulla bildningsmedel, var emellertid övertygelsen om att naturen inte kan verka bildande sådan den är i sig själv. Pestalozzi skriver:

> När du sorglöst åt naturen överlämnar jorden, bär den ogräs och tistlar [...] För att på den kortaste tiden föra ditt barn till undervisningens mål, till tydliga begrepp, måste du med största omsorg inom varje kunskapsområde först ställa det för ögonen sådana föremål, vilka hos sig innesluta de väsentligaste kännetecknen för det ämne, vartill dessa föremål höra. Detta måste ske på ett synbart och utmärkande sätt, så att de äro särskilt lämpade för att föremålets *väsen*, till åtskillnad från dess växlande beskaffenhet, särskilt faller i ögonen.[50]

[48] Pestalozzi, *Huru Gertrud undervisar sina barn*, s. 57.
[49] Pestalozzi, *Enslingens aftonstund*, s. 13.
[50] Pestalozzi, *Huru Gertrud undervisar sina barn*, s. 109.

Den bildande metoden består således i den till synes motsägelse operationen att lägga naturen till rätta, för att på så sätt visa eleven vad den i sig själv egentligen är. Naturen skall läggas till rätta på ett sådant sätt att eleven på egen hand kan "upptäcka" dess matematiska struktur, och på så sätt lära sig att "se" dess närvaro även i sammanhang bortom undervisningspraktiken.

Geometri för folkets barn

För Pestalozzi var geometriundervisningens syfte förtrogenhet med de geometriska formerna och den geometriska terminologin. Målet var att verkligheten skulle framträda för barnen som sammansättningar av elementära geometriska former: linjer, vinklar, bågar, kvadrater, cirklar, och så vidare. Det handlade inte om passivt seende, utan om att aktivt "frambringa" dessa drag hos verkligheten. Denna förmåga kunde, menade Pestalozzi, nås genom övning; till att börja med "övning att dra linjer, vinklar och bågar".[51]

Den första geometriska form barnen borde göras förtrogna med var *linjen* och den särskilda form av grundläggande geometriundervisning han utformade kom därmed att på ett förnämligt sätt passa den "lineateckning" vilken då han var verksam redan tagit form i helt andra sammanhang.[52] Pestalozzi skriver:

> Man framstället för barnet beskaffenheten av den räta linjen så till vida som den är obunden och består för sig själv, i dess mångfaldiga läge efter flera villkorliga riktningar och låter barnet få en klar kännedom om dess flerfaldiga utseende utan hänsyn till dess vidare användning. Så börjar man sätta namn på de räta linjerna, såsom vågrät, lodrät och lutande, de lutande först såsom stigande eller fallande, sedan till höger eller vänster stigande, eller till höger eller vänster fallande; sedan ger man dem efter parallellernas olika utseende namn såsom vågräta, lodräta och lutande parallellinjer. Sedan nämner man för barnen huvudvinkeln, som uppstår genom föreningen av dessa för dem bekanta linjer, därigenom att man kalla dem räta, spetsiga eller trubbiga vinklar. På samma sätt lär man barnet och låter det benämna urformen för all mätningskonst, den liksidiga fyrhörningen, vilken uppstått genom föreningen av två vinklar, jämte kvadratens bestämda avdelningar i halv, fjärdedels, sextondels kvadrat o.s.v.[53]

Vad det handlar om här är en sorts rekonstruktion av verkligheten, med geometrin som utgångspunkt. Att börja med linjen var för Pestalozzi att börja med verklighetens mest grundläggande och enkla form. Första steget mot bildning var att bli förtrogen med denna form *i sig själv*, fri från alla

[51] Ibid, s. 31.
[52] Vad jag förstår framför allt i Frankrike under 1700-talet, se Alder, *Engineering the revolution.*
[53] Pestalozzi, *Huru Gertrud undervisar sina barn*, s. 80.

sammanhang. Först när man till fullo behärskade detta moment, var tiden inne att gå vidare med mer komplicerade former, som bågen, eller sammansatta former, som vinklar, trianglar och kvadrater. Man inser att vägen från geometrins enkla former till ett riktigt skådande av världen som den framträder utanför den pedagogiska praktiken måste bli tämligen lång och svår.

Förutom sin anvisning för ordnande av folkskolor skrev ovannämnde Fineman läroböcker i geometri och räkning.[54] Läroboken i geometri illustrerar vad Pestalozzis bildningsidéer kunde innebära i praktiken. Finemans bok har en liknande struktur som Euklides *Elementa*. Men då Euklides inleder med abstrakta definitioner, postulat och axiom, inleder Fineman med synnerligen praktiska anvisningar. Han skriver:

> 1. Linierna böra dragas långsamt och utan afbrott, tydliga, fina och rena.
> 2. Vid öfningarna efter de fyra första figurerna, böra linierna dragas öfver taflans eller papperets hela bredd, alla lika långt ifrån hvarandra. Afstånden pröfvas med en bestämd cirkelöppning, till exempel $\frac{1}{8}$ af liniernas längd.[55]

De abstrakta sanningskriterier som karaktäriserar den euklidiska geometrin – bland annat att det inte spelar någon roll huruvida linjerna *i praktiken* är raka eller inte, eftersom de ändå till sin natur bara är representationer av den tänkta, ideala, linjen – har här bytts ut mot praktiska kvalitetskriterier. Det är inte svårt att föreställa sig hur eleverna får bannor för att deras linjer är kladdigt ritade och på ojämnt avstånd från varandra.

Finemans bok består, förutom de ovanstående ”axiomen”, av en följd av successivt allt svårare övningar, från att på fri hand dra raka streck, till att rita månghörningar och cirklar. Givetvis ledde inte dessa övningar till några instrumentellt användbara färdigheter. Det var inte emellertid inte heller deras syfte. De skulle forma barnen till att se geometrin i naturen, vilket inom bildningstänkandet var liktydigt med att se verkligheten sådan den verkligen är. Här finns anledning att påminna om Skovsmose, som jag nämnde i teoriavsnittet i avhandlingens första del. Den ”matematiska arkeologi” han beskriver, vars syfte är att lära eleverna uppfatta hur matematiken är ständigt närvarande i den sociala och fysiska verkligheten, har uppenbara likheter med Pestalozzis och Finemans bildningsambitioner. Teoriavsnittets analys träffar

---

[54] Carl Olof Fineman, *Lärobok uti räknekonsten, lämpad efter vexelundervisnings-methoden*, Stockholm, 1826; Carl Olof Fineman, *Inledning till geometrien jemnte linear-tecknings öfningar för folkscholor*, Stockholm, 1832.

[55] Fineman, *Inledning till geometrien jemnte linear-tecknings öfningar för folkscholor*, s. 5. Den första svenska bok om linearteckning som fick stor spridning tycks ha varit C. M. Lagerhamn, *Geometri, i förening med linearteckning för Folk-Lärare-Seminarier och Folkscholor*, Stockholm, 1843, vilken kom ut i åtminstone nio upplagor mellan 1843 och 1879. Lagerhamn följer Pestalozzi. Lärjungarna får öva på att dra raka linjer, rita vinklar, månghörningar och cirklar – först på frihand, sedan med hjälp av passare och linjal.

därför såväl Skovsmose som Pestalozzi. Det är nämligen, menar jag, inte alls verklighetens essens som eleverna på detta sätt lär sig uppfatta. Tvärtom lär de sig värdera ett specifikt sätt att uppfatta verkligheten, vilket är knutet till en specifik värdehierarki. Och då det gäller geometrin var det givetvis Euklides *Elementa* som utgjorde idealet. Att se sig själv som en del av en i sig själv geometrisk – eller mer specifikt euklidisk – verklighet, är liktydigt med att placera sig själv längst ner i en hierarki dominerad av den som behärskar den euklidiska geometrin till fulländning. Det var emellertid inte var förrän mot slutet av 1800-talet som geometri blev ett mer allmänt förekommande ämne i den svenska folkskolan. I folkskolan representerades matematiken istället först och främst av grundläggande aritmetik.

Aritmetik för folkets barn

Jag skall här ta upp fyra aspekter av hur räkneundervisningens kom att utformas när den blev en del av undervisning för folkets barn. Vissa av dessa kan enkelt knytas till växelundervisningssystemet, medan andra ligger närmare bildningstänkandet. Det handlar här inte om att ge en sammanhängande beskrivning av hur man i praktiken undervisade på någon viss plats vid en given tidpunkt. Istället är mitt syfte att visa på ursprunget till praktiker och idéer som fick stor betydelse för skolmatematikens fortsatta utveckling.

Fri flyttning för strävsamhet och lydnad

På flera punkter utgjorde växelundervisningssystemets behandling av matematiken ett steg i riktning mot senare tiders skolmatematik. En sådan punkt är de matematiska studiernas uppdelning i klasser. Nordin skriver att Lancaster delade in räkneundervisningen i 12 olika klasser som ledde från den första klassens "Sifferskrivning" till de sista klassernas behandling av sorter och *Regula de Tri*. I Danmark utformade P. H. Mönster och J. Abrahamsson ett växelundervisningssystem med hela 23 räkneklasser.[56] Följande tabell visar vad dessa klasser bestod i:

[56] Mönster & Abrahamsson, *Om den indbyrdes Underviisnings väsen och värd.*

Tabell 8. De 23 räkneklasserna i de växelundervisningssystem som P. H. Mönster och J. Abrahamsson beskriver i *Om den indbyrdes Underviisnings väsen och värd*.[57]

Klass	**Vad barnen gör**
a) Första sandklassen	Barnen lär sig skriva talen 1, 4 och 7 i sand
b) Andra sandklassen	Barnen lär sig skriva de övriga talen i sand
c) Första talklassen	Barnen lär sig skriva taltecknen på tavla.
d) Andra talklassen	Barnen lär sig skriva talen mindre
e) Läsklassen	Barnen skriver tal som läraren läser
f) Additionsklassen,	
g) Subtraktionsklassen	
h) Multiplikationsklassen	
i) Divisionsklassen	
k) Examinationsklassen	Stående genomgång av de 72 tabeller som används i de följande 5 klasserna.
l) Additionsklassen i obenämnda tal	
m) Subtraktionsklassen i obenämnda tal	
n) Multiplikationsklassen i obenämnda tal	
o) Divisionsklassen i obenämnda tal	
p) Benämnelseklassen	Genomgång av sorter
q) Additionsklassen i benämnda tal	
r) Substraktionsklassen i benämnda tal	
s) Multiplikationsklassen i benämnda tal	
t) Divisionsklassen i benämdna tal	
u) Additions- och subtraktionsklassen i obenämnda tal	
v) Multiplikations- och Divisionsklassen i obenämnda tal	
x) Additions- och Subtraktionsklassern i benämnda tal	
y) Multiplikations- och Divisionsklassen i benämnda tal	

Denna klassordning har ungefär samma disposition som tidens läroböcker i matematik. Den väsentliga skillnaden ligger i att denna disposition genom växelundervisningsmetoden får en *social* form. Eleverna fördelar sig fysiskt, i rummet, i enlighet med denna skolmatematikens hierarkiska struktur. Rörelsen i läroboken, rörelsen mot större matematiska kunskaper, motsvaras här av materiella rörelser. Eleverna kan därmed i en nästan bokstavlig bemärkelse sägas vara *i* matematiken.

Man bör också notera att denna klassindelning utgör en fortsättning på trenden att undervisningen sträcker sig över en allt mindre del av såväl den vetenskapliga matematiken som räknekonsten. När eleverna tagit sig igenom alla 23 klasserna har de inte nått längre än motsvarande de första kapitlen i någon av Agrelius, Roloff Anderssons, eller Forssells räkneläror. Räkne-

[57] Ibid.

konstens många knep och praktiska detaljer hade ingen självklar plats i växelundervisningssystemet (här måste man dock vara försiktig, eftersom växelundervisning användes i en så disparat uppsättning olika sammanhang).

Växelundervisningssystemet var uppbyggt så, att eleverna stod under kontinuerlig övervakning. Detta möjliggjordes genom att elever som kommit längre fick bistå med övervakning av eleverna i de lägre klasserna. Undervisningen bestod i en strukturerad dialog mellan elever och monitörer, där monitörerna oftast utgick från en tabell, som elevernas svar jämfördes med. En central aspekt av systemet var den ”fria flyttningen”, det vill säga att elevernas svar, deras prestationer, omedelbart återverkade på deras position inom systemet. Svarade man rätt flyttades man strax upp till en högre klass, svarade man fel fick man bli kvar eller – om det gick allt för dåligt – flyttas ned till den föregående klassen. [58] Genom att denna reglering utgick från tabellerna snarare än monitörernas personliga omdöme, kan man säga att elevernas position i systemet i det närmaste reglerades av matematiken själv – i den form den fått för att passa detta system.

Man kan i detta avseende se en tydlig parallell mellan växelundervisningssystemet och det meritokratiska systemet, och det förefaller mycket naturligt att det var just inom den militära sfären som växelundervisningsmetoden först kom i bruk i Sverige (nämligen vid krigsakademin på Karlberg). Den analys jag gjorde i kapitel 7 av det meritokratiska rangordnandet av elever med utgångspunkt från prestationer är i allra högst grad tillämpbar även på växelundervisningssystemet, det vill säga: det ständiga mätandet av prestationer fungerar inte bara som incitament till identifikation och känslomässig involvering, det ”avleder” även uppmärksamheten från studiernas innehåll, vilket gör att detta innehåll – precis som Fineman ville – kan framstå som en slags extern nödvändighet, det vill säga som något man tar för givet och inte reflekterar över, eftersom man redan ”vet” varför man gör allt för att lära sig (nämligen för att bli uppflyttad till en högre klass). Det var av denna anledning som indelningen i klasser och den fria flyttningen, vilken kan tyckas vara bildningstänkandet främmande, kunde tillmätas bildande egenskaper. De hierarkiskt ordnade klasserna konstituerade ett hierarkiskt samhälle i miniatyr. Och vi minns att den bildande undervisningens mål var en fullständig överensstämmelse mellan å ena sidan elevernas vilja och tänkande och å andra sidan ”föremålet” för viljan och tänkandet, det vill säga (för Pestalozzi) naturen och (för Fineman) samhället. Den fria flyttningen och strävan efter prestationer ”bildade” eleverna att tillmäta det som dessa prestationer förknippades med (dvs. matematiken) tillbörligt värde.

---

[58] Nordin, *Växelundervisningens allmänna utveckling*, s. 119.

Det matematiska stoffets trivialisering

Den räkneundervisning Fineman beskriver var modellerad med undervisning i läsning som förebild. Således menade han att ”Tälja”, i betydelsen utläsa, var ett moment inom räkeundervisningen som fått allt för liten uppmärksamhet. Hans räknekurs börjar med ”Vetenskapens bokstäfver (Siffrorna), Stafvelser (Siffrornas sammansättning till Tal och deras värde efter rummen), samt Ord (Tals utnämnande) hvarjämte öfvergången till Renläsa (Räkna) förmedlas genom urskiljandet af Tior och Enheter, samt Additions- och Subtraktions-Tabulan”. Det handlar här om att *läsa talen* och man kan å ena sidan notera överensstämmelsen med räknelärornas inledning (”Numeratio”) och å andra sidan den förskjutning som här inträder i och med att talen betraktas som ord, och därmed också underställs samma behandling som ord i dåtidens läsundervisning. Fineman menade att man, för att kunna lära sig läsa, först måste lära sig urskilja och rätt förstå ordens delar. Således delades orden upp, i bokstäver och stavelser, vilka barnen fick lära sig att känna igen och benämna. Samma sak skedde med talen. De plockades isär, deras delar identifierades och utnämndes, sattes samman, och manipulerades sedan enligt samma typ av strikta regler som gällde för behandlingen av språket. Fineman skrev, att i den lärda skolan ”kunna Elever, med lyckliga anlag, sjelfve omsider ersätta” den *brist* frånvaron av Täljnings-undervisning nödvändigtvis leder till. Det kan emellertid inte folkskolans elever, vilka ”risquera att stanna på ytan, förledda af sin mechaniska minneskunskap till skryt och sjelfklokhet”. Vad som krävs i folkskolan är därför en metod utan ”hopp eller luckor i ämnenas framställning”.[59] Detta betonande av faran med ”luckor” kom att bli ett av skolmatematikens kännetecken, och det förtjänar att läggas på minnet att det tar plats i skolmatematiken som ett medel att förhindra inte bara att kunskaperna skulle bli ytliga och mekaniska, utan också som ett medel att förhindra skryt och självklokhet.

I sin *Praktisk handbok i pedagogik och methodik för swenska folk-undervisningen* från 1846, ger Anders Oldberg en levande bild av hur han föreställer sig att undervisningen borde gå till i de svenska växelunder-visningsskolorna, en bild som i viss mån skiljer sig från Finemans.[60] Oldberg beskriver hur en monitör pekar på den första siffran (på en tavla som i det system Oldberg beskriver sätts upp på väggen) och säger ”Ett”. Barnen skall då säga: ”Ett”, under det att de ”hålla ögonen uppmärksamt fästade på siffran 1, till dess monifören säger 'Skrif ett!'”. Oldberg förklarar hur undervisningen sedan fortgår i form av en sorts dialog där monitören omväxlande uppmanar de barn som undervisas att säga något, och att göra något; ibland alla tillsammans, ibland enskilt.

För att barn skall lära sig addition och subtraktion krävs, menar Oldberg, ”åskådningsövningar”. Man kan här se hur metoderna som växte fram i

[59] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation*, s. xiii.

[60] Oldberg, *Praktisk handbok i pedagogik och methodik för swenska folkunderwisningen.*

anslutning till växelundervisningssystemet samtidigt var influerade av bildningstänkandet. Åskådning innebar i den typ av undervisning Oldberg beskrev användande av kulram. Med hjälp av denna kan, skriver Oldberg, barnen *se* additionen utföras framför sina ögon, samtidigt som de uppmanas att säga vad som sker: Sedan monitören ”fört alla kulorna till sig, pekar han på trådens andra ända, der inga kulor finnas, sägande: 'Noll!' (dvs. ingen kula)”, barnen säger efter: ”Noll!”, monitören säger: ”Noll till Noll”, barnen svarar: ”Noll!”, monitören fortsätter: ”Ett till Noll”, barnen svarar, ”Ett”, och så vidare.[61]

Här måste poängteras att den typ av undervisning Oldberg beskriver inte alls, som senare skolmatematiker velat göra gällande, syftade till någon typ av ”mekanisk” färdighet. Tvärtom syftade den snarast till vad som idag skulle kallas matematisk begreppsbildning. Det var så nödvändigheten av åskådlighet motiverades. Oldberg beskriver relativt detaljerat hur talbegreppen skulle ta form genom en successiv frigörelse från det sinnligt närvarande.[62] Likaså var det denna process – som antogs vara långsam och komplicerad – som gjorde det nödvändigt att ta sig an det allra mest elementära med så stor grundlighet.

Avlägsnandet av det diskursivt förmedlade budskapet

En aspekt av de ovanstående metoderna för räkneundervisning vilken kom att få stor betydelse för skolmatematikens fortsatta utveckling är frånvaron av ett diskursivt förmedlat budskap. Kort sagt får eleverna aldrig någon längre sammanhängande förklaring – varken i form av text eller av läraren (eller monitören) – av vad det är de skall lära sig. En självklar praktiskt förklaring till detta är att barn saknar förmåga att ta till sig och dra nytta av sådana förklaringar. Frånvaron av diskursivt förmedlat budskap motiverades emellertid både med hänvisning till undervisningens disciplinerande funktion och med hänvisning till bildningsmålet. Fineman menade som jag nämnde ovan att eleverna skulle förbli ”olärda” och därför inte ställas inför kunskapsstoffet på ett sätt som möjliggjorde (eller krävde) abstraherande tankeverksamhet. Följande citat ger en bild av Pestalozzis syn på räkneundervisning:

> Räknekonsten uppstår från den enkla sammansättningen och delningen av flera enheter. Dess grundform är, som jag redan sagt, väsentligen denna: *ett och ett är två, och ett från två är ett.* Också är varje tal, hur det än låter, i och för sig inget annat än ett förkortningsmedel av denna väsentliga urform för all räkning. Det är emellertid viktigt, att kännedomen om urformen för talförhållandena genom räknekonstens förkortningsmedel ej försvagas hos människan. Tvärtom bör den i de former, medelst vilka denna konst inläres, djupt och omsorgsfullt

[61] Ibid, s. 72.
[62] Ibid, s. 74.

> inpräglas, och allt framskridande i denna konst byggas på det fast åtrådda målet, nämligen det hos människan djupt grundade medvetandet om de realförhållanden, vilka ligga till grund för all räkning. Om detta ej sker, bleve t. o. m. det första medlet i och för uppnåendet av tydliga begrepp endast förnedrat till ett lekverk för vårt sinne och vår inbillningskraft och skulle därigenom göras kraftlöst för sitt väsentliga ändamål.
>
> Det kan ej vara annordlunda. När vi t.ex. endast lära oss utantill att tre och fyra är sju, så bedraga vi oss själva. Ty den inre sanningen av dessa sju är ej i oss, i det vi ej hafva kännedom om den försinnligade bakgrund, som enbart kan göra dessa tomma ord till sanning.[63]

Pestalozzis resonemang kretsar hela tiden kring relationen mellan räknandet och det som räknandet så att säga hänvisar till. Han inför en skarp distinktion mellan, som han skriver, att lära sig ”utantill att tre och fyra är sju” och att förstå den ”inre sanningen” i detta förhållande. Räknandet bör, menar han, vara ett sätt att ställa sig själv i relation till en väsentligt egenskap hos verkligheten – *att ting har antal*. För att räknande skall vara detta krävs att den tänks som sådan. Faran är att talen framträder för människan som blott tecken, som tomma ord, frikopplade från sitt verkliga ursprung. Detta skulle, skriver Pestalozzi ovan, innebära att till och med matematiken – ”det första medlet” för bildning – blev ”förnedrat till ett lekverk för vårt sinne”. Uppfattad på detta felaktiga sätt riskerar matematiken till och med, menade Pestalozzi, att förstöra vår inbillningskraft. För att detta skall undvikas måste räkekonsten ”djupt och omsorgsfullt inpräglas”, och mer specifikt krävs ett inpräglande av relationen mellan å ena sidan talen och räknesätten och å andra sidan den verklighet de hänvisar till.[64] Barnen måste se, eller snarare aktivt åskåda, det vill säga genom sin egen aktiva kärleksfulla och intresserade handling frambringa, talen och räknandets resultat. Först sedan talens innebörd ”inpräglats” hos barnen, kan man försiktigt introducera ”räknings-förkortningsmedlen” och deras användande.[65] Han skriver:

> När barnen blivit övade att räkna med föremål och dessas ställföreträdare: streck och punkter, så vidt som dessa tavlor, vilka helt och hållet äro grundade på åskådning, gå, så blir kännedomen om de verkliga talförhållandena hos barnen så stark, att förkortningsmetoden medelst vanliga siffror, även utan åskådning, blir otroligt lätt för dem.[66]

Man kan här se begynnelsen till den hårda dom som skolmatematiken skulle fälla över räknelärorna och deras räknekonst. Där framträder talen som sammanställningar av siffror som knappast kan sägas ha haft någon egen betydelse (jmf. s. 14 ovan). Betydelse fick talen i det sammanhanget genom

[63] Pestalozzi, *Huru Gertrud undervisar sina barn*, s. 90.
[64] Ibid.
[65] Ibid, s. 93.
[66] Ibid, s. 94.

sina sorter. De handlade om skålpund, riksdaler och runstenar, och det var som delar av en social kontext som de fick sin mening. Ett sådant förhållande till talen framstår som djupt förkastligt utifrån det perspektiv Pestalozzi representerar, eftersom det inte förstår att värdesätta talens egen betydelse. Det är denna betydelse som Pestalozzi tar fasta på i sin räkneundervisning. Talen utgjorde för honom ett redskap för seende av verklighetens grundläggande struktur.

I en artikel om Pestalozzi publicerad 1849 skriver man angående matematikundervisningen att ”Aritmetiska reglor äro för räkning, hvad linial äro för teckning. Genom dessa medel kan man hvarken räkna eller teckna”.[67] Utifrån räknelärornas perspektiv framstår detta påstående som vansinnigt. Hur skulle man kunna räkna utan regler? Däremot är det säkert svårt att lära *barn* räkna med hjälp av regler, och än svårare om barnen är många och läraren knappt själv kan läsa och räkna. En praktisk nödvändighet, som Fineman värdesatte för att den hindrade eleverna att få smak för abstraherande tänkande, har hos Pestalozzi blivit en förutsättning för bildning.

Ytterligare en bild av hur man tänkte sig att åskådlig undervisning kunde gå till ges i de räknemetodiska anvisningar, sammanställda av Christopher Anjou och bröderna Knut och Carl Kastman – alla tre seminarieföreståndare – vilka gavs ut i en rad upplagor från och med början av 1870-talet. Den första övningens rubrik är: ”uppfattning och bildande. Talet 1.” Övningens beskrivs på följande sätt:

> Läraren ställer fram en kub (en slant, en kritbit, framskjuter en kula o. s. v.) och frågar: Hvad är detta? (en *kub*, en *slant*, o. s. v.). Huru många kuber stå här? (*en* kub). Säg någon sak, hvaraf blott en finnes här i rummet! (*en* kakelugn). Huru många fingrar håller jag upp? (*ett* finger).[68]

Här får man en klar uppfattning vad föreställningen om bildandet av begrepp fick för konsekvenser för undervisningen. Det var genom upprepat åskådande av saker som det bara finns en av, som, menar man, begreppet om enhet kunde bildas.

I den svenska skolmatematiska diskussionen blev man från mitten av 1800-talet tämligen överens om att det allra bästa var om barnen inte bara fick ”skåda” föremål, utan dessutom plocka med dem själva. I sin *Underwisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, skriver folkskole-

[67] ”J. H. Pestaozzi och hans uppfostrings-grundsatser”, *Tidskrift för Folkskolelärare och folkskolebildningens vänner*, 1849.

[68] Anjou, et al., *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Häftet V. Metodik: Räknekonsten i Folkskolan.*, s. 6–7. Se även Kommissionen för behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor, *Underdånigt betänkande*, s. 36 och Fredrik Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, Stockholm, 1870, s. 29, 37 och 132.

inspektören Fredrik Sandberg[69] att man för att ge ämnet den största möjliga åskådlighet bör lämna,

> till hvarje barn ett visst antal föremål af samma slag, t.ex. små trästickor, kuber, pappskifvor, glasbitar, ettöre-slantar eller dyl. Medelst dessa föremål för lärjungen sjelf göra för ögat förnimbar den uppgift, läraren förelägger till lösning.[70]

Förutom att sådant arbete gör lärjungarna ”självverksamma” så ger det läraren en möjlighet att övervaka och styra lärjungarnas arbete. Det är, skriver Sandberg, ”ett godt medel för att vänja de små vid tukt, alldenstund ögonblicklig lydnad måste följa på hvarje föreskrift, och hvarje befallning omedelbart verkställas”.[71] Liksom hos Fineman går bildningstänkandet hand i hand med disciplinen.

Strävan att bibringa barn matematik, utan att användas språket och matematikens symboler fick en rad besynnerliga konsekvenser. Sandberg presenterar i sin *Små-skolan. En handledning för dem, hvilka sysselsätta sig med den första barna-undervisningen i skolan* inte mindre än 66 olika övningar som leder fram mot introduktionen av siffrorna.[72] Dessa skulle alltså gås igenom *innan* eleverna ens sett en siffra. En bild av hur Sandberg tänkte sig undervisningen ges av följande citat från övning nummer två:

> Först ett streck (läraren drager ett streck på svarta taflan) och sedan ett streck till (läraren drager ett streck bredvid det förra) kallas *två* streck. Hvar kallas ett streck och ett streck till? – Huru många streck sen J [dvs ”ser ni”] här på taflan? – Här är en punkt och här en; huru många punkter? – Skrif två streck på edra skiffertaflor! – Hvilket är mest, ett eller två? – Huru mycket är två mer än ett? – Hvilket är minst, ett eller två? – Huru mycket är ett mindre än två?
>
> Huru många ögon har du? – Huru många armar har du? – Räck up två fingrar på högra handen! – På venstra handen! – Säg någon sak här i rummet, som förekommer två gånger!
>
> Drag ett lodrätt streck! Drag sedan från nedersta ändan af detta streck ett vågrätt streck åt högre så här
>
> Huru många streck hafva vi nu? Riktigt! Och när två streck sammanträffa med hvarandra på ett ställe (i en punkt), så uppkommer hvad man kallar en *vinkel* (eller hörn).
>
> Rita en vinkel! Rita en vinkel till! [etc.][73]

[69] Fredrik Sandberg (1833–1895) var filosofie kandidat och bland annat verksam som folkskoleinspektör och som rektor för folkskollärarinneseminariet i Stockholm. Angående Sandberg, se Andersson, *Läsning och skrivning*, s. 52–53 och Sven Ekwall, *Tidig småskollärarutbildning*, Lund, 1987, s. 53–56.

[70] Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, s. 133.

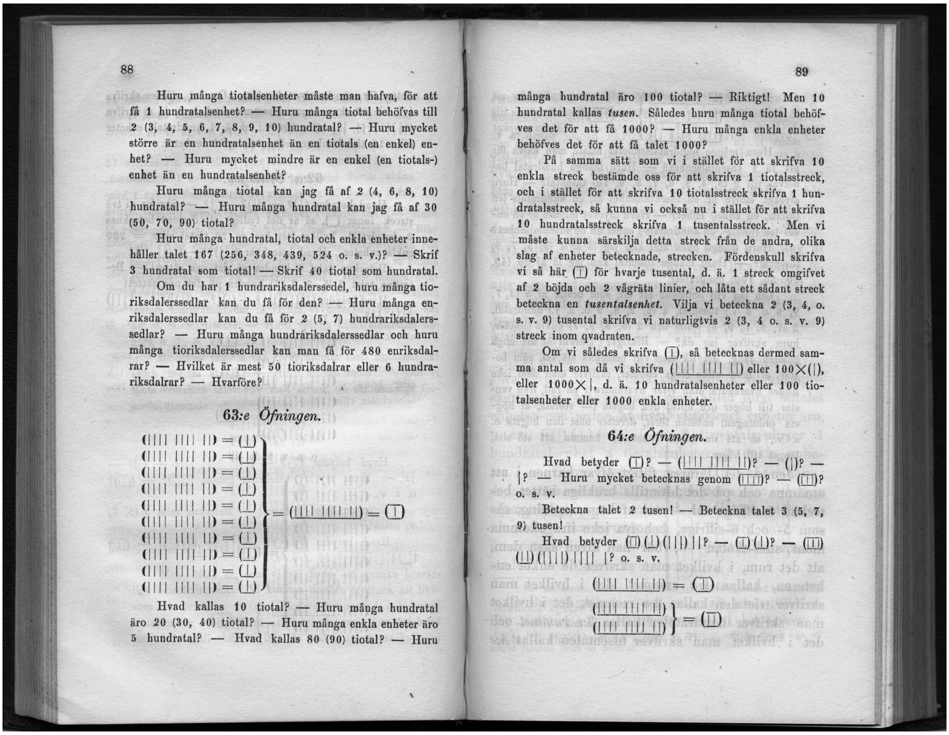
[71] Ibid, s. 134.

[72] Dessa introduceras i den 65:e övningen.

[73] Fredrik Sandberg, *Småskolan. En handledning för dem, hvilka sysselsätta sig med den första barna-undervisningen i skolan.*, Stockholm, 1869, s. 7.

Sandberg delade in vägen mot ”talbegrepp betecknade med siffror” i flera steg. Först skulle barnen räkna saker, det vill säga räkna med utgångspunkt från åskådning. Sedan skulle sakerna bytas ut mot ”streck och punkter” som i citatet ovan, vilka representerade sakerna. Sedan skulle barnen lära sig att räkna helt utan yttre ”stöd”, det vill säga i huvudet. Detta räknande krävde, menade Sandberg och många med honom, ett ”talbegrepp” som ersatte det tidigare ”konkreta” räknandet. Först när detta talbegrepp utvecklats genom flitig övning på huvudräkning – eller som man också kallade det: muntlig räkning – kunde siffrorna introduceras.

Det fascinerande med Sandbergs metodik är han i sina övningar lärde barnen att använda addition, subtraktion och multiplikation, med tal ända upp till tusen, *helt utan användande av siffror!* Han började med att gruppera strecken fyra och fyra. När han kom till tio streck införde han en ny beteckning: ett vertikalt streck innanför två parenteser. När han kommer till hundra lade han till ett horisontellt streck under det vertikala strecket. När han kommer till tusen lade han till ett horisontellt streck *ovanpå* det vertikala. Två streck innanför parenteser betyder därmed tjugo; två streck innanför parenteser, med streck under, betyder två hundra, och så vidare. Figuren nedan visar Sandbergs 63:e och 64:e övning:



88

Huru många tiotalsenheter måste man hafva, för att få 1 hundratalsenhet? — Huru många tiotal behöfvas till 2 (3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10) hundratal? — Huru mycket större är en hundratalsenhet än en tiotals (en enkel) enhet? — Huru mycket mindre är en enkel (en tiotals-) enhet än en hundratalsenhet?

Huru många tiotal kan jag få af 2 (4, 6, 8, 10) hundratal? — Huru många hundratal kan jag få af 30 (50, 70, 90) tiotal?

Huru många hundratal, tiotal och enkla enheter innehåller talet 167 (256, 348, 439, 524 o. s. v.)? — Skrif 3 hundratal som tiotal! — Skrif 40 tiotal som hundratal.

Om du har 1 hundrariksdalerssedel, huru många tioriksdalerssedlar kan du få för den? — Huru många enriksdalerssedlar kan du få för 2 (5, 7) hundrariksdalerssedlar? — Huru många hundrariksdalerssedlar och huru många tioriksdalerssedlar kan man få för 480 enriksdalrar? — Hvilket är mest 50 tioriksdalrar eller 6 hundrariksdalrar? — Hvarföre?

63:e Öfningen.

$$\left.\begin{array}{l} (||||\ ||||\ ||) = (\underline{|}) \\ (||||\ ||||\ ||) = (\underline{|}) \\ (||||\ ||||\ ||) = (\underline{|}) \\ (||||\ ||||\ ||) = (\underline{|}) \\ (||||\ ||||\ ||) = (\underline{|}) \\ (||||\ ||||\ ||) = (\underline{|}) \\ (||||\ ||||\ ||) = (\underline{|}) \\ (||||\ ||||\ ||) = (\underline{|}) \\ (||||\ ||||\ ||) = (\underline{|}) \\ (||||\ ||||\ ||) = (\underline{|}) \end{array}\right\} = (\underline{||||\ ||||\ ||}) = (\boxed{|})$$

Hvad kallas 10 tiotal? — Huru många hundratal äro 20 (30, 40) tiotal? — Huru många enkla enheter äro 5 hundratal? — Hvad kallas 80 (90) tiotal? — Huru

89

många hundratal äro 100 tiotal? — Riktigt! Men 10 hundratal kallas *tusen*. Således huru många tiotal behöfves det för att få 1000? — Huru många enkla enheter behöfves det för att få talet 1000?

På samma sätt som vi i stället för att skrifva 10 enkla streck bestämde oss för att skrifva 1 tiotalsstreck, och i stället för att skrifva 10 tiotalsstreck skrifva 1 hundratalsstreck, så kunna vi också nu i stället för att skrifva 10 hundratalsstreck skrifva 1 tusentalsstreck. Men vi måste kunna särskilja detta streck från de andra, olika slag af enheter betecknade, strecken. Fördenskull skrifva vi så här ($\boxed{|}$) för hvarje tusental, d. ä. 1 streck omgifvet af 2 böjda och 2 vågräta linier, och låta ett sådant streck beteckna en *tusentalsenhet*. Vilja vi beteckna 2 (3, 4, o. s. v. 9) tusental skrifva vi naturligtvis 2 (3, 4 o. s. v. 9) streck inom qvadraten.

Om vi således skrifva ($\boxed{|}$), så betecknas dermed samma antal som då vi skrifva $(\underline{||||\ ||||\ ||})$ eller $100 \times (|)$, eller $1000 \times |$, d. ä. 10 hundratalsenheter eller 100 tiotalsenheter eller 1000 enkla enheter.

64:e Öfningen.

Hvad betyder ($\boxed{|}$)? — $(\underline{||||\ ||||\ ||})$? — (|)? — |? — Huru mycket betecknas genom ($\boxed{|||}$)? — ($\boxed{||}$)? o. s. v.

Beteckna talet 2 tusen! — Beteckna talet 3 (5, 7, 9) tusen!

Hvad betyder ($\boxed{||}$)($\underline{|}$)(|||) ||? — ($\boxed{|}$)($\underline{|}$)? — ($\boxed{||}$)($\underline{||}$)(||||) |||| |? o. s. v.

$$(\underline{||||\ ||||\ ||}) = (\boxed{|})$$

$$\left.\begin{array}{l} (\underline{||||\ ||||\ ||}) \\ (\underline{||||\ ||||\ ||}) \end{array}\right\} = (\boxed{||})$$

Figur 3. Ett uppslag i Fedrik Sandbergs *Småskolan. En handledning för dem, hvilka sysselsätta sig med den första barna-undervisningen i skolan.* Eleverna fick lära sig räkna med streck istället för siffror – för att grundlägga ”talbegreppet” ordentligt innan tecknen infördes. För att underlätta streckskrivandet införde Sandberg emellertid en rad ”förkortningar”, vilket resulterade i ett rätt besynnerligt teckensystem.[74]

Här tydliggörs det problematiska i relationen mellan skolmatematikens övningar och den vetenskapliga matematiken. För Sandberg och hans kollegor var övningar som den ovanstående noggrant uttänkta delar av en grundlig lärogång, vilken leder barnen, via åskådning och övning, till klara talbegrepp. En nutida läsare ser istället ett meningslöst system av tecken, vilket, ter det sig, knappast kan ha varit eleverna till någon nytta.

Ambitionen att förmedla matematik, utan användande av ord och siffror, är karaktäristisk för skolmatematiken. Låt mig illustrera detta med hänvisning till ett exempel från 1950-talet, det vill säga ungefär 100 år efter det att Fineman och Sandberg presenterade sina pedagogiska idéer. Det var en tid då den piagetanska utvecklingspsykologi relativt nyligen nått fram till Sverige. I tidskriften *Skola och Samhälle* årgång 1959, kunde man i artikeln ”Barnens primära räkneövningar som uppgift för grupparbete” läsa:

[74] Fredrik Sandberg, *Småskolan. En handledning för dem, hvilka sysselsätta sig med den första barna-undervisningen i skolan.*, Stockholm, 1869, s. 88-89.

> Det förefaller mig vara så, att den konkreta undervisningsmaterielen är av stor betydelse i den första räkneundervisningen [...] Ju yngre barnen är, desto vanskligare blir det att till dem förmedla kunskap via ord. Orden är symboler för våra konkreta erfarenheter, och de förstås bara av barn, som förvärvat sig liknandeerfarenheter. Att $2 + 2 = 4$ kan bara förstås och verifieras av de barn, som gjort konkreta erfarenheter av 2 och 4.[75]

Artikeln är illustrerad med en bild där en grupp barn, med hjälp av åskådningsmateriel sägs ”ta steget över från konkret till abstrakt räkning”.[76] Sättet att tala hade förändrats: istället för bildning talar rektor Sven Green, artikelns författare, om utveckling och abstrakt tänkande.[77] Den grundläggande idén är inte desto mindre densamma.

En annan aspekt av Pestalozzis tänkande, som komplicerar bilden ytterligare, är att förskjutningen av fokus vad gäller undervisningspraktiken mot det sinnligt närvarande i motsats till det diskursiva, motsvarades av en i det närmaste motsatt förskjutning av fokus vad gäller undervisningens resultat. Som vi såg i citaten ovan (s. 14) kunde undervisningens mål hos Pestalozzi inte reduceras till det faktum att eleven kunde räkna fort och rätt. Än viktigare var svarets orsak, processerna i elevens inre, tänkandet och begreppen. Denna aspekt av Pestalozzis tänkande spelade en viktig roll för den svenska skolmatematikens utveckling under andra halvan av 1800-talet. På vilket sätt kan illustreras av följande metodanvisning, författad av den tyske pedagogen Hermann Haase, publicerad på svenska 1913:

> Endast den omständigheten, att man i praktiken når ”resultat” med ett förfaringssätt, är icke tillräcklig att rekommendera detsamma. Man bör alltid först undersöka, huruvida ej dessa resultat äro blott skenresultat, som förespegla verklig bildning. En lärjunge, som på frågan: ”Huru mycket är 5+3?” genast svarar åtta – och lika hastigt avfärdar alla frågor i den första räkneundervisningen –, behöver icke på långt när ha god utbildning i räkning. Ty för att avgöra detta måste man först genom ytterligare undersökningar taga reda på om lärjungen verkligen förmår att medvetet tänka igenom uppgiften på det sätt, som måste ske i varje människas inre vid dess lösning, om han således icke enbart till följd av en ordassociation mekaniskt framsagt resultatet utantill.[78]

Här tydliggörs hur man från skolmatematikens synvinkel är intresserad av matematiken snarare än siffror och symboler, och av elevens tänkande snarare än dess resultat. Avståndet från räknekonsten kunde knappast vara större. Där låg fokus som bekant just på de siffror och regler med vars hjälp de rätta

---

[75] Sven Green, ”Barnens primära räkneövningar som uppgift för grupparbete”, *Skola och Samhälle*, 1959, s. 172.
[76] Ibid, s. 173.
[77] Ibid, s. 172.
[78] Hermann Haase, *Den första räkneundervisningens metodik*, Lund, 1913, s. 69.

svaren kunde produceras, samtidigt som tänkandet värderas uteslutande med utgångspunkt från sin instrumentella effektivitet.

Undervisningens mekanisering

En sista gemensam nämnare för alla de undervisningsmetoder som tog form i anslutning till folkundervisning kring sekelskiftet 1800 är deras repetitiva karaktär. Samma moment upprepas gång på gång, med små variationer. Både inom växelundervisningssystemet och bildningstänkandet talade man i positiva ordalag om rymt och taktfasthet. Att undervisningens ”maskinmässiga gång” spelade en central roll inom växelundervisnings-systemen är självklart.[79] Mer intressant är den betydelse mekanisk upprepning tillmättes inom bildningstänkandet. Där såg man det som ett redskap för bildning. Elevernas åskådningsförmåga skulle stärkas genom åskådnings-övningar, där de om och om igen fick ”upptäcka” verklighetens matematiska essens, till exempel föremåls antal. Det som eftersträvades var inte ”förståelse” – det vill säga något som kunde åstadkommas på kort tid med hjälp av en bra förklaring – utan ett växande som *måste* ta lång tid. Så här skriver Pestalozzi:

> När barnet sålunda genom denna bestämda och ofta upprepade räkning af indelningarna kommit till ytlig kännedom om, hur många enheter som finnas i de första talen, ändrar man frågan ånyo och frågar vid den ännu en gång likformiga uppställningen av plattorna: Hur många gånger en är två? Hur många gånger en är tre? o. s. v. Först då, när barnet lärt känna de enklaste begynnelseformerna av addition, multiplikation och division, och man fullkomligt medelst åskådning gjort det förtroligt med dessa räkneformers väsen, försöker man på samma sätt genom åskådning bibringa barnet en fullständig kännedom om subtraktion.[80]

Tillspetsat kan man se detta undervisningssätt som en sorts charader. Läraren förklarar inte vart han vill komma, utan visar istället barnen föremål uppställda på olika sätt. I anslutning till bildningstänkandet förutsätter han att dessa förmål *i sig själva*, genom sin essens, skall tala till barnen – de skall säga: Vi är antal! Vi är addition, subtraktion, multiplikation och division! Vad barnen skall lära sig, är att tyda detta tingens språk. Givetvis är inget vunnet för detta ändamål genom att läraren helt enkelt säger vad han vill att barnen skall göra – då är tvärtom allt förstört. Då har tecknet hamnat i begreppets ställe, minnet har tagits i anspråk och ett stycke ytlig kunskap har tagit plats i barnens inre, till hinder för den sanna bildningen.

---

[79] Nordin, *Växelundervisningens allmänna utveckling*, s. 118.
[80] Pestalozzi, *Huru Gertrud undervisar sina barn*, s. 93.

Matematikens insida

Det skolmatematiska bildningstänkandet säger att det finns något mer i verkligheten än det som möter ögat och att det finns något motsvarande mer i människan. Detta något kan inte reduceras varken till minne ("faktakunskaper" skulle vi kanske säga idag) eller praktisk förmåga. Bildningstänkandet hänvisar till något immateriellt och detta något var för Pestalozzi och de flesta av hans samtida nära förbundet med Gud. De tänkte sig en potential förborgad i naturen, människan och matematiken, en gudomlig kraft som med den rätta metodens hjälp kunde göra människan hel och ställa henne i samklang med sig själv och tingens ordning.

Utifrån skolmatematikens eget perspektiv, då som senare – bortsett från att man kring sekelskiftet 1900 bytte ut Gud mot Vetenskapen – framstod detta tänkande nyckeln till framgång: man har hyllat Pestalozzi för att han ställde problemet på rätt sätt, så att sökandet efter den rätta metoden kunde ta sin början.

Om denna nyckel var en av de saker som tiden kring sekelskiftet 1800 skänkte skolmatematiken, kan man på ett annat plan se en samtidig i det närmaste motsatt rörelse. När matematikundervisning blev en del av en undervisning utformad för folket blev den ett redskap för att nå allt annat än höga mål. Nu var det fråga om att förhindra brott, fostra till lydnad och rent av att förhindra abstraherande tänkande. Undervisningen kom att fokuseras på trivialiteter, meningslösa utifrån den matematiska vetenskapen, räknekonsten och det praktiska livet utanför skolan. Det diskursivt förmedlade budskapet – den vetenskapliga matematikens formler, räknekonstens regler och tabeller, liksom den förklarande text som i böckerna löpte sida vid sida om siffror och symboler – avlägsnades. Undervisningen reducerades till en repetitiv tidskrävande gissningslek, vars värde inte minst låg just i att den höll barnen sysselsatta. En katastrof, kort sagt.

Det var, menar jag, tvetydigheten hos detta skede i skolmatematikens historia som inom bildningstänkandet kom att anta formen av det jag kallar matematikens insida. Denna sida hos matematiken utgör, menar jag, en förtätning av den motsättning som finns förborgad i den folkbildande undervisningens uppgift: att samtidigt lyfta och disciplinera, förändra och bevara, hjälpa och hindra. Vi tror att vi lämnat det disciplinerande syftet bakom oss, men det lever vidare i de krav matematiken själv tycks ställa på undervisningens utformning.

Man kan i matematikens insida identifiera en sorts omvänd värdehierarki. Merparten av det som tidigare förknippats med matematiken ställs där på huvudet: det diskursivt förmedlade budskapet, språket, teorin, siffrorna, reglerna, symbolerna, minnet, abstraktionen, det kontextoberoende och explicita – allt detta som värderades så högt under 1600- och 1700-talet betraktas nu med största misstänksamhet och får närmaste ett negativt värde.

Vägen mot bildning förläggs istället till kroppen och sinnena, praktisk verksamhet, konkretion, intuition, muntligt tal och direkt närvaro. Man tvekar inte att undanhålla information för eleverna, i syfte att hjälpa dem mot bildningstänkandets högre mål. Under 1700-talets första hälft hävdade matematikens talesmän att matematiken, i egenskap av abstrakt stringent vetenskap, utgjorde praktikens grund och matematiska studier därför var en förutsättning för förståelse och praktisk färdighet. Vägen går här från det universella till det partikulära och det är denna väg som avtecknar sig i matematikens utsida. På matematikens insida går vägen i motsatt riktning; bildningstänkandet hävdar att praktisk träning på ett riktigt skådande av den sinnligt närvarande naturen är kungsvägen mot det universella. Det är denna väg som skolmatematikens talesmän är övertygade om borde leda eleverna rätt, men som i praktiken ständigt visar sig leda dem på villovägar.

10. Den skolmatematiska diskursen

I fokus för det här kapitlet står den svenska offentliga diskussionen rörande grundläggande matematikundervisning från 1850-talet till början av 1880-talet. Under denna tid växte diskussionens omfång kraftigt och den skulle fortsätta växa fram till slutet 1880-talet. Nya ståndpunkter introducerades i en strid ström av läroböcker, med förord där det klargjordes vilka pedagogiska och metodologiska satser som legat till grund för deras utformning. Samtidigt ökade antalet lärartidningar. Mot slutet av perioden innehöll dessa, förutom bokrecensioner och artiklar, regelrätta sammandrabbningar mellan företrädare för olika ståndpunkter rörande grundläggande matematikundervisning. En växlande uppsättning ståndpunkter sanktionerades offentligt genom utredningar och kursplaner, vilka nu började behandla matematikundervisningens problem på ett mer detaljerat sätt än tidigare.[1]

Min tes är att detta skede markerar uppkomsten av en *skolmatematisk diskurs* så som jag definierade denna term i avhandlingens inledning. Min poäng är inte att man sa exakt samma saker om skolan och matematiken då, som man gör idag – det gjorde man inte. Vad jag vill peka på är däremot en likhet vad gäller diskursens form. Jag skall här påvisa denna likhet genom att knyta an till de fyra första problemområdena i min problemställning, det vill säga: *Obligatoriet, Skolmatematikens högre mål, Det matematiska stoffet* samt *Kritiken.* På var och en av dessa punkter finns likheter mellan hur man talade då och hur man talar nu. Lika intressanta som dessa likheter är emellertid skillnaderna. Det är när man jämför det som är relativt konstant, med det som förändrats över tid, som skolmatematikens interna logik utkristalliserar sig.

[1] Jag tänker här på Erland Edlund, M.fl., *Underdånigt betänkande och förslag afgifvet den 17 december 1858 af den för granskning af 1856 års Skol-Stadga i nåder förordnade Komité*, Stockholm, 1858; *Anvisningar och råd till Lärare, angående tillämpningen af de till Nådiga Stadgan för Rikets allmänna Elementarläroverk af den 29 januari 1859 hörande undervisningplaner*, Stockholm, 1859; Kommissionen för behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor, *Underdånigt betänkande*; folkskolans normalplaner samt de två granskningarna av läroböcker i aritmetik och geometri under 1880-talet: *Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande*, Stockholm, 1887 och J. J. Dalström, et al., *Granskning af läroböcker i aritmetik, verkstäld af komiterade, utsedde af Stockholms folkskollärareförening*, Stockholm, 1883.

Obligatoriet

> *Behöver alla människor undervisning i matematik under sin uppväxt?*
> Varför är de flesta så övertygande om att svaret på denna fråga är ja?
> Varför är det idag en plikt att ta del av undervisning i matematik?

Även om långt ifrån alla svenska barn och ungdomar deltog i skolmatematisk undervisning vid 1800-talets mitt, hade *idén* om en obligatorisk skolmatematik då tagit plats i Sverige. I folkskolestadgan 1842 deklarerades att alla svenskar behövde undervisning i "de fyra Räknesätten i hela tal".[2] Genom en följd av förordningar (1849, 1856, 1859 och 1862) gjordes matematiken ungefär samtidigt till ett tämligen stort ämne i läroverket, vid sidan om de klassiska språken.

Varför fick studier i matematik ökat utrymme? På ett imaginärt plan ligger orsaken i den mängd betydelser som vid denna tid hade knutits till matematiken och matematiska studier: allt från tanketräning och praktisk nytta till religiös sedlighet och bildning. Som jag skall visa nedan (s. 14ff) argumenterade man för skolmatematiken med hänvisning till en mångfald olika mål, på ungefär samma sätt som man gör idag.

På ett *symbolisk-mekaniskt* plan ligger en helt annan förklaring. Här finns större skillnader mellan omständigheterna under andra halvan av 1800-talet och skolmatematiken kring sekelskiftet 2000. Vi har idag ett sammanhängande utbildningssystem, där matematiken i egenskap av kärnämne utgör ett av de viktigaste redskapen för att hålla eleverna sysselsatta och att fördela dem mellan olika karriärvägar. Detta system tog i huvudsak form under första halvan av 1900-talet. Kring mitten av 1800-talet var det knappt påtänkt. Istället fanns det då väsentligen två olika sorters offentliga skolor: läroverk och folkskolor. Dessa skilde sig åt vad gäller elevernas sociala ursprung, undervisningens ekonomiska förutsättningar, lärarnas kunskapsnivå, undervisningsmetodiska principer, samt undervisningens målsättning. Undervisningen i läroverket kretsade kring ämnen som tillmättes högt värde och genom en avslutande examen knöts dessa värden till eleverna själva. Matematiken utgjorde i detta sammanhang ett av flera instrument för att reproducera tidens i stor utsträckning bipolära sociala struktur. Studier i (bland annat) matematik ledde fram till en examen som skiljde högt från lågt. Undervisningen i folkskolan kretsade istället kring ämnen som ansågs lämpliga för folket, ämnen som skulle vara dem till nytta i deras framtida liv utan att leda dem bort från sin underordnade ställning. Folkskolan ledde vid denna tid inte till användbara betyg eller examina (ett faktum som utifrån

[2] *Kongl. Maj:ts Nådiga Stadga angående folk-underwisningen i Riket; Gifwen Stockholms Slott den 18 Junii 1842*, Falun, 1844, s. 10.

dagens perspektiv känns främmande).[3] I folkskolan utgjorde därmed matematiken snarast ett instrument för disciplinering.[4]

Här finns alltså både likheter och skillnader i förhållande till dagens skolmatematik. Idén om nödvändigheten av en obligatorisk skolmatematik är en gemensam nämnare. Argumenten för detta obligatorium skiljer sig emellertid åt. Vi talar om matematikkunnande nödvändigt för demokrati, självförtroende och tillväxt. Då talade man (som vi strax skall se) dels om nyttiga kunskaper men framför allt om matematiken som ett viktigt bildningsmedel. Min poäng är att skolmatematiken blev obligatorisk i syften som i väsentliga avseenden skiljer sig från våra. Mer allmänt tydliggör det historiska perspektivet att skolmatematikens successiva utsträckande till att omfatta hela samhället sker under det att argumenten för detta utsträckande växlar i takt med vad som värderas högt i samhället. På denna nivå är det därför omöjligt att identifiera någon orsak till att skolmatematiken idag är obligatorisk.[5] Det är enklare att tolka skolmatematikens tillväxt på ett

[3] Eleverna fick i och för sig betyg, men de var i stort sett värdelösa. Jmf. ”Folkskolebetygens praktiska betydelse”, *Svensk Läraretidning*, 1895: ”Folkskolebetygens praktiska betydelse är som bekant i de allra flesta fall så godt som ingen, och detta förhållande ses med ledsnad af hvarje folkskolevän. Den, som slarfvigt bevistat skolan och lämnat den innan afgångsbetyg erhållits, behöfver icke ute i lifvets kamp och äflan stå till baka för en, som laglydigt och plikttroget fyllt sin skolplikt.” Man kan notera att det som här förespråkas inte är betyg som mått på kunskaper, utan betyg som tecken på erkännande för att man gjort sin plikt och varit i skolan så som lagen föreskriver. Det var inte förrän under 1900-talets första hälft som man skapade *standardiserade*, och därmed inbördes jämförbara, betyg i folkskolan. En viktig roll i denna process spelade för övrigt Fritz Wigforss, t.ex. genom betänkandet: Carita Hassler-Göransson, et al., *Betänkande med utredning och förslag angående betygssättningen i folkskolan*, Stockholm, 1942.

[4] Intressant är därför att gränsen mellan läroverk och folkskola i den skolmatematiska diskussionen ofta är ganska otydlig. Läroböcker skrevs ibland för särskilda skolformer, men de som blev populära tycks ha funnit vägar såväl från läroverk till folkskola, som i motsatt riktning. En bidragande orsak till detta var förmodligen att skoltidningarna, även om de var knutna till den ena eller andra skolformen, inte tvekade att recensera intressanta läroböcker i matematik oberoende av böckernas primära målgrupp. I synnerhet om man, som jag kommer att göra här, begränsar sig till de yngre eleverna, tycks den skolmatematiska diskussionen ha upprättat ett förenande band mellan folkskola som läroverk. De som diskuterade var överens om att det bara finns *en* matematik, nödvändig för alla att ta del av. De tycks ha betraktat sig som delar av ett gemensamt sökande efter den rätta pedagogiska teorin, den rätta metoden och det rätta sättet att utforma läroböcker. Det är egentligen bara under den period som står i fokus för det här och det följande kapitlet, det vill säga ungefär från 1850–1890, som man kan tala om den svenska skolmatematiska diskussionen i termer av ett *rum av ståndpunkter* i Bourdieus mening. Den matematiska undervisningen i läroverk och folkskola utgjorde diskussionens gemensamma referenspunkt. Erfarenhet från, eller åtminstone ambitioner rörande denna undervisning, utgjorde det relativt blygsamma villkoret för att kunna delta i diskussionen. Den mångfald av betydelser som vi i tidigare kapitel sett tillmätas såväl matematiken, undervisningen, och det barn som utgjorde undervisningens föremål, skapade utrymme för en å ena sidan mångdimensionell, men å andra sidan i viss mån enhetlig, diskussion. Det var uppenbarligen ganska lätt att skaffa medel till att få ett läroboksförsök i tryck, och många markerade sina egna läroböckers förtjänster i förhållande till de böcker som fått mer allmän spridning, vilket gör att man kan tala om det Bourdieu kallar *fälteffekter*.

[5] Här stämmer mina slutsatser med de som dras i Gustafsson & Mouwitz, *Vuxna och matematik: ett livsviktigt ämne* och i Niss, ”Mål för matematikundervisningen”.

symbolisk-mekaniskt plan. Där kan man se hur 1800-talets dikotoma struktur, med konsekrering i läroverket och disciplinering i folkskolan, under 1900-talets första hälft smälter samman i utbildningssystemets samhällsövergripande sortering.

Skolmatematikens högre mål

> *Leder undervisning i matematik till sådant som att Sverige får bättre tillväxt, att demokratin stärks och att människor får bättre självförtroende?* Kan undervisning i matematik leda till dessa mål? Finns det belägg för att den leder till dessa mål? Vilken är relationen mellan dessa högre mål och skolans praktiska verksamhet? Varför påstås undervisning i matematik leda till dessa högre mål?

En väsentlig likhet mellan de mål man menade att undervisningen i matematik skulle leda till under 1800-talets andra hälft och de mål man hänvisar till idag, är att målen i båda fallen hade en indirekt relation både till matematiken och räknekonsten, liksom till den skolmatematiska undervisningspraktiken. Med andra ord hade matematiken då börjat fungera som en nodpunkt. Som vi såg i förra kapitlet hade den fått sin ”insida”. I fokus för detta avsnitt står istället dess utsida, det vill säga de egenskaper hos matematiken som skolmatematikens företrädare hänvisar till i sin argumentation riktad till samhället utanför skolan.

Logiskt tänkande och rationalitet

Kring 1800-talets mitt var det relativt vanligt att knyta matematiken till 1700-talets idéer om rationalitet och logiskt tänkande, snarare än till Pestalozzi. Detta illustreras av vad matematiklektorn F. W. Hultman skrev i en recension av Per Adam Siljeströms *Lärobok i geometrien till folkskolornas tjenst* införd i *Pedagogisk Tidskrift* 1867. Siljeström hade, i motsats till ovan nämnda Fineman, tagit med en mängd euklidiska bevis i sin lärobok, trots att den var avsedd för folkundervisning. Detta uppskattade Hultman. ”Genom geometriens införande i [folkskolorna]”, skrev han,

> blir efterhand hela massan av vårt folk i tid öfvadt att tänka följdriktigt. Då man pedagogiskt studerar geometrien, förvärfvar man sig inom kort en viss färdighet att lösa problemer. Denna förmåga alstrar förtroende till ens eget förstånd, så att man dels granskar noga hvad man hör och ser, innan man dömer och handlar, dels ej fruktar att höra sina egna åsigter och påståenden diskuteras, och att gifva med sig, om man ser sig öfverbevisad. Så stort inflytande på charakteren har förmågan att se hvad som är sannt och hvad som icke är sannt. När härtill kommer

geometriens praktiska nytta, kan man ej nog uppskatta vigten af denna vetenskaps upptagande såsom läroämne i våra skolor.[6]

Denna retorik känner vi igen från Celsius, Strömer och Palmqvist. Typiskt för Hultmans egen tid är att han framställer matematiken både som ett formande redskap och ett redskap att använda. Siljeström skriver själv i sitt förord:

> Det skall kanhända förefalla en och annan nog sangviniskt att hoppas få se någonting sådant infördt i folkskolan. Men för det första är alldeles påtagligt, att det är ett sjelfskrifvet läroämne i den *högre folkskolan*; och för det andra finner förf. för sin del icke det ringaste hinder för att äfven i en vanlig folkskola meddela detta pensum, eller någon del deraf, åtminstone åt en eller annan af de äldre och mera försigkomne lärjungarne. Det är verkligen högst angeläget att så sker. Den stränga geometrin är i allmänhet den bästa *logik*, och, särskilt i fråga om folkbildningen, såsom sådan af stor betydelse; och förf. tror fullt och fast att blott några få propositioner, väl och såsom sig bör genomgångne, skola gifva mer tankeodling än mycket hvarpå man nu lägger högsta vigt. Man måste komma ifrån den föreställningen, att i folkskolan endast är fråga om att meddela, såsom lexa, några "resultater" af vetande i allehanda ämnen. Det är nödigt, om folkbildningen skall utveckla sig till hvad den bör blifva, att folket lär sig de vägar – empiriens och reflexionens vägar – på hvilka man kommit till de ifrågavarande resultaterna.[7]

Det är här och i allmänhet tydligt att Siljeström betraktar folkundervisningen ”ovanifrån” när han till exempel talar om arbetarnas särskilda behov. Inte desto mindre har Siljeström höga ambitioner med folkundervisningen. Han vill att även arbetarna skall få ta del av vetenskapen. Det finns en sorts uppriktighet i hans sätt att förhålla sig. Angående geometrin skriver han även:

> jemte tanken öfvar den äfven handlaget, ögonmåttet, iakttagelseförmågan och inbillningskraften. Man lär sig att med uppmärksamhet betrakta de yttre tingen, uppfatta deras former och kännetecken, upptäcka likheter och olikheter samt med noggrannhet och tydlighet uttrycka i ord, hvad man förnummit.[8]

Detta citat utgör en lämplig övergång till en syn på bildning tydligare knuten till Pestalozzi. Här kombinerar nämligen Siljeström element från två diskurser. Den övning av handlag och ögonmått, knuten till hantverkarnas verkstäder, han nämner först, vore nog Pestalozzi främmande.[9] Helt i linje

[6] Frans Wilhelm Hultman, ”P. A. Siljeströms Lärobok i geometrin till folkskolornas tjenst. Stockholm 1867”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1867.
[7] Per Adam Siljeström, *Lärobok i geometrien, till folkskolornas tjenst*, Stockholm, 1867, förord.
[8] Siljeström, ”Geometri för nybegynnare, af P. N. Ekman, Lektor i Matematiken vid Wexjö Gymnasium”.
[9] Se Per Adam Siljeström, *Arbetarens fritimmar. Skrifter i nyttiga ämnen till läsning för handtwerks- och fabriksarbetare*, Calmar, 1844, s. 8–9, där Siljeström förklarar varför just

med Pestalozzis tänkande ligger emellertid stärkande av "inbillningskraften" samt övandet av att uppfatta och i ord beskriva tingens "former och kännetecken".[10]

Bildning à la Pestalozzi

Fredrik Sandberg, som jag nämnde i förra kapitlet, beskriver syftet med folkskolans geometriundervisningen på ett sätt som ligger i linje med det skolmatematiska bildningstänkandet. Han skriver att geometrin:

> väcker [...] formsinnet, stärker blicken för symmetri och regelbundenhet, hindrar det tanklösa och likgiltiga åskådandet af tingen; den uppklarar anden, skärper förståndet, väcker eftertanken, bildar sinnet för sanning, grundlighet och ordning meddelar säkerhet i omdömen och slutsatser, samt gifver åt hela tankeverksamheten en viss sjelfständig och säker hållning.[11]

Här kan man särskilja inte mindre än nio olika mål som Sandberg menar att undervisningen i geometri skall leda till. I själva verket rör det sig emellertid bara om nio olika sätt att tala om den människa som Sandberg vill forma med sin geometriundervisning: En grundlig, eftertänksam, förståndig, ordningsam människa, självständig och med stark sanningskänsla.

Även undervisningen i räkning skulle bidra till detta mål i Sandbergs skola. Han skriver att räkneundervisningens mål "icke allenast består uti att förbereda till det praktiska lifvet, utan derjemte och hufvudsakligast att utveckla och utbilda lärjungens andliga anlag och krafter".[12] Räkningen är, skriver han, "ett af de förnämsta medlen till menniskosjälens bildning", och att den har synnerligt stor betydelse för "förståndsutvecklingen". För att precisera vad som är förståndsbildande beskriver han först ett induktivt arbete där lärjungen med utgångspunkt från exempel "måste uppsöka den regel, för hvilken exemplen äro bevis", och sedan hur man i det praktiska livet måste "koncentrera sina tankar" och "afskilja allt tillfälligt eller underordnadt" för att genom logiska resonemang dra allmänna slutsatser. Det är detta arbete, menar han, som "måste utbilda tankens noggranhet, omdömets skärpa, öfverläggningens grundlighet och andens klarhet".[13]

---

hantverkare måste kunna matematik, vilket kan jämföras med Pestalozzi, *Huru Gertrud undervisar sina barn*, s. 107: "Jag förnekar visserligen icke, att ej även en sådan metod [annan än Pestalozzis] kan frambringa goda skräddare, skomakare, köpmän och soldater, men jag bestrider, att den kan frambringa en skräddare eller en köpman, som är *människa* i ordets höga betydelse."

[10] Siljeström, "Geometri för nybegynnare, af P. N. Ekman, Lektor i Matematiken vid Wexjö Gymnasium".

[11] Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, s. 149.

[12] Ibid, s. 130.

[13] Ibid, s. 131.

Vad gäller läroverket kan ytterligare exempel på framställningar av räkneundervisningens högre mål hämtas från Anders Wiemer, en av den matematiska vetenskapens företrädare i den skolmatematiska diskussionen kring mitten av 1800-talet och tillika läroboksförfattare. Angående Axel Theodor Bergius *Elementarkurs i Räknekonsten, jemte öfningar i Hufvudräkning* (1850) skrev han uppskattande: ”[Bergius] ser i aritmetiken icke blott ett sätt, att bibringa mekanisk räknefärdighet, utan han betraktar den såsom ett uppfostringsmedel, hvilket den, rätt behandlad, onekligen är så väl, som hvarje annat undervisningsämne”.[14] Det är, skriver Wiemer, ”icke blott för att lära oss räkna, utan i främsta rummet för att lära oss tänka, som vi från de första skolåren sysselsätta oss med aritmetik”.[15]

Matematisk bildning

Axel Theodor Bergius föddes 1817 och var från 1847 lektor vid Nya Elementarskolan i Stockholm. Han skrev läroböcker i aritmetik, algebra och geometri kring 1850. Han var en av realbildningens och matematikens mer vältaliga företrädare. Bergius inlägg i diskussionen är särskilt intressanta på grund av att man kan se en tydlig förändring av hans ståndpunkt rörande geometrins bildande egenskaper mellan ett par artiklar publicerade kring 1850 och en senare artikel från 1868.

I en av de tidigare artiklarna skriver han, helt i linje med Pestalozzi, hur geometrin lär människor att ”uppfatta kropparna” och övar människans ”inre åskådningsförmåga” – med explicit hänvisning till den euklidiska geometrin.[16] 1868 hade Bergius hunnit bli 51 år och den erfarenhet han samlat på sig tycks ha satt spår i hans syn på de matematiska studiernas mål och medel. Från Pestalozzis allmänna bildning hade Bergius rört sig mot en uppfattning om bildning som *matematisk* bildning, och i artikeln från 1868 talar han om betydelsen av att skolornas matematikundervisning utvecklas i takt med den matematiska vetenskapen.[17] Han vill därför i artikeln besvara frågan ”huruvida [den matematiska skolundervisningen] i allmänhet vunnit den utveckling, som betingas af de stora framsteg, som matematiken under det förflutna århundradet tagit”.[18] Istället för Pestalozzis kvarhållande vid utgångspunkterna tror Bergius nu på det bildande värdet av att ”vidga lärjungens synkrets” och

---

[14] Anders Wiemer, ”Elementarkurs i Räknekonsten, jemte öfningar i Hufvudräkning. Af. Axel Theodor Bergius. Särskilt häftade svar medfölja. Sthlm, 1850”, *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare*, 1850, s. 222.

[15] Ibid, s. 223.

[16] Bergius nämner i detta sammanhang Kant (”Om elementarundervisningen i matematik”, *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare*, 1850, s. 87 och 89).

[17] Jag utgår här från att skillnaden mellan Bergius artiklar kring 1850 och den enstaka artikeln från 1868 speglar en förändring i hans ståndpunkter. Tänkbart är givetvis även att skillnaden mellan artiklarna beror på något annat (t.ex. att den senare artikeln handlar om undervisning av äldre elever).

[18] Bergius, ”Om skolundervisningen i Matematik”, s. 213.

visa honom så mycket som möjligt av den vetenskapliga matematiken. Detta, menar han,

> medför mycket större förråd af verklig och säker bildning, än det ändlösa räknandet af sins emellan likartade öfnings-exempel, hvaraf våra matematiska läroböcker till en förvånande mängd öfverflöda, och hvilka öfnings-exempel till en stor del äro framstälda under en form, som är ingenting mindre än klart och lättfattlig. Vi bestrida visserligen icke vigten af väl valda öfnings-exempel, men vi vilje på det bestämdaste motsätta oss det missbruk, som dermed dagligen bedrifves i våra skolor, der lärjungarna tvingas att göra många beräkningar, som aldrig under så invecklad form förekomma i det praktiska lifvet, eller, om de skulle i en framtid möta honom, af honom efter vunnen större insigt lösas på vida enklare och ändamålsenligare väg. Någon del af den tid, som användes för den all sjelfständig tankekraft dödande beräkningen af de tusentals siffer-exempel, hvarpå våra moderna räkneböcker öfverflöda, kan sannerligen bättre användas för lärjungens matematiska bildning.[19]

Vi kan här se att Bergius ståndpunkt har förskjutits från Pestalozzis bildningsideal mot en mer vetenskapsbejakande förställning om matematiken vilken liknar den som stod i diskussionens centrum under 1700-talet. Det är, menar Bergius, inte upprepandet av det enkla som leder till den önskvärda bildningen, utan arbetet med matematiken och i synnerhet arbete med den vetenskapliga matematiken.

Klart är emellertid, skriver han, att de flesta knappast har någon praktisk användning av denna matematik.[20] Bergius rörelse från bildning i allmänhet mot vetenskaplig matematik innebär alltså inte en rörelse bort mot bildningstänkandet i en mer allmän bemärkelse. Han menar att även en människa som ”i det praktiska lifvet aldrig kommit i tillfälle att tillämpa sina i skolan förvärfvade större insigter i matematik” och som dessutom ”glömt största delen af hvad han i det afseendet inhemtat”, ändå måste erkänna de matematiska studiernas stora värde, på grund av ”den skärpa i omdömeskraft” och den ”säkerhet i slutkonst” som de matematiska studierna fört med sig.[21]

Med det ovanstående hoppas jag ha visat att man i den skolmatematiska diskursen framställde både undervisning i geometri och undervisning i aritmetik som utmynnande i bildning, men att det samtidigt fanns en ganska stor spännvidd i hur man uppfattade denna bildning. Fler exempel kunde ha anförts för att belägga denna spännvidd, men kort sagt sträcker den sig från en uppfattning av matematik som ett redskap för tanketräning, via Pestalozzis bildningstänkande till en föreställning om bildning som specifikt *matematisk*

[19] Ibid, s. 215. Samma argument återfinns i Kommissionen för behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor, *Underdånigt betänkande*, s. 6.
[20] Bergius, ”Om skolundervisningen i Matematik”, s. 215–216.
[21] Ibid, s. 216.

bildning. Väsentligt är att man knappast diskuterade skillnaden mellan dessa olika sätt att tolka bildningsmålet. Kort sagt framstod bildning huvudsakligen som ett högre mål i allmänhet, konstituerat genom sin skillnad jämfört med de (blott) praktiskt nyttiga kunskaperna.

Nyttiga kunskaper

Ambitionen att skolmatematiken skulle vara bildande knöts emellertid ofta till praktiskt nyttiga kunskaper som en slags underordnad, men likväl viktig målsättning. Ibland ställdes förmedlandet av praktiskt nyttiga kunskaper i främsta rummet. Läroboksförfattaren och senare riksdagsledamoten Gullbrand Elowson var tämligen befriad från bildningsidéer. Han skrev:

> Det mål, som man vill vinna med undervisningen i Arithmetik, torde kunna angifvas såsom en klar och tydlig uppfattning af lagarne för Arithmetikens räkneoperationer samt säkerhet och färdighet i dessa räkneoperationers användning i enskildt fall.[22]

Här är det alltså inte fråga om några "högre" mål, utan om mål nära knutna till själva matematiken. Aritmetiken är för honom ett redskap som man använder, inte något man formas av.

I de anvisningar och råd som gavs ut i samband med 1859 års läroverksstadga kan man angående de matematiska studiernas mål läsa:

> Men då denna undervisning på ifrågavarande linie derjemte tidigt måste antaga en praktisk syftning och då största antalet af de lärjungar, om hvilka här är fråga, sannolikt kommer att välja lefnadsbanor, på hvilka matematikens tillämpningar blir behöflig, så får undervisningen icke heller lemna ur sigte nyttan och nödvändigheten af en flitig öfning i kunskapens användande, hvarigenom för öfrigt jemväl den teoretiska insigten vinner i klarhet och intresse.[23]

Här känner man igen argumentationen från kapitel 8 ovan, det vill säga att kunskaperna ansågs bli praktiska genom att de växte fram genom "övning på användning", en praktik jag beskrev som simulering av det praktiska livet utanför skolan (s. 14f). Noteras bör också hur man återknyter denna övning på användning till det (rent) teoretiska, vilket utgör ett tydligt exempel på hur de bildningsmålet och det praktiska målet förbands med varandra på en mångfald olika sätt.

Ett exempel på hur de matematiska studierna förknippades med praktisk nytta i folkskolan kan hämtas från Sandberg. Han skriver:

---

[22] Gullbrand Elowsson, *Elementar-lärobok i aritmetik*, Uppsala, 1868, Företal.

[23] *Anvisningar och råd till Lärare, angående tillämpningen af de till Nådiga Stadgan för Rikets allmänna Elementarläroverk af den 29 januari 1859 hörande undervisningplaner*, .

> Vill t.ex. muraren eller grundläggaren uträkna, huru mycket sten som åtgår till en så och så stor mur; vill taktäckaren annorlunda än blott på höft bestämma massan af det material, som han behöfver använda för att täcka en så och så stor yta; vill tunnbindaren veta, huru stora de kärl, han är i begrepp att förfärdiga, bör vara för att rymma en bestämd qvantitet våtvaror – för hvar och en blir det nödvändigt att ega åtminstone någon kunskap i geometrien.[24]

Citatet är ett eko av Clavius och Vives retorik på 1500-talet om matematikens stora betydelse för det praktiska livets alla områden. Karaktäristiskt är hur det praktiska kunnandet konstitueras som i grunden geometriskt.

Mekanisk räkning

En mycket komplex ställning i diskussionen hade det som kallades mekanisk räkning. Ofta betraktades det mekaniska som något som borde undvikas. Samtidigt var man tämligen överens om att ”mekanisk färdighet” – förankrad i riktig förståelse – var i viss mån nödvändig och önskvärd. Sandberg menade att lärjungarna behövde ”lösa en mängd olika uppgifter” för att sedan kunna räkna ”mekaniskt-ledigt”. Han tillägger:

> En dylik mekanism är ingalunda förkastlig eller död, ty lärjungen är medveten om grunderna för sitt förfarande och kan alltså numera äfven tillåta sig åtskilliga genvägar för att dymedelst befordra snabbräkningen.[25]

Bergius skrev att man i och för sig måste förekomma lärjungarnas benägenhet att ”söka förvärfva en blott mekanisk färdighet i räknekonsten”.[26] Varje praktisk färdighet måste, menade han, nödvändigtvis vara förankrad i förståndet. Men när lärjungen väl förstått varför man gör på ett visst sätt, skriver han, ”uppkommer den mekaniska färdigheten genom fortsatt öfning af sig sjelf, och en sådan färdighet bör ej föraktas, emedan den utgör ett nödvändigt och väsentligt hjelpmedel till befordrande af vidare framsteg”.[27] Han skriver också:

> Under alla förhållanden i lifvet kan en större räknefärdighet nyttigt användas, och i många är den ovillkorligen nödvändig. För att blifva en skicklig räknare erfordras mycken öfning; och den tid, som inom skolan användes till dylika öfningar, kan derför anses väl använd.[28]

---

[24] Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, s. 149.
[25] Ibid, s. 137–138.
[26] Bergius, ”Om elementarundervisningen i matematik”, s. 341.
[27] Ibid, s. 344.
[28] Ibid, s. 83.

Positivt inställd till den mekaniska färdigheten var även telegrafdirektören C. A. Nyström som annars blev känd just för sina metoder för att bibringa lärjungarna ”förståndsbildning”. I förordet till sin *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran, med talrika öfningsexempel och särskildt häftad facitbok*, vilken vad gäller spridning är den lärobok som under 1800-talet kommer närmast Zweigbergks *Lärobok i räknekonsten*, skriver han att den mekaniska räknefärdigheten visserligen inte är att förakta utan att den tvärtom är ”till en wiss grad önskwärd”.[29] Typiskt för Nyström och den skolmatematiska diskussionen i allmänhet fram till slutet av 1870-talet, är för övrigt att han betraktar lärobokens exempel som medel att nå just mekanisk färdighet, och att han av denna anledning ställer boken i ett motsatsförhållande till den muntliga undervisningen.

I *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare*, häfte fem, *Räknekonsten i Folkskolan*, kan man läsa att räkneundervisningens mål är att ”sätta barnen i stånd att förstå och lösa de räkneuppgifter, som det praktiska lifvet förelägger hvar och en medborgare, hvad klass eller stånd han än må tillhöra”. Man kan notera en förskjutning jämfört med vad Agardh och Bruzelius 1808 i förordet till Pestalozzis *Elementar-böcker* skrev angående skillnaden mellan kunskap och bildning. De menade att behovet av kunskaper skiljer sig åt mellan olika klasser och stånd, och att därför endast en bildande undervisning kunde vara gemensam för alla. Nu kan man istället läsa att det finns räkneuppgifter som är gemensamma för alla. Textens fortsättning pekar likväl mot det problematiska i detta påstående. Det står nämligen: ”Skall lärjungen genom denna undervisning ledas till att förstå de uppgifter, praktiska lifvet erbjuder, så måste undervisningen vara *förståndsbildande*”.[30] Denna förening av de två målen bildning och nytta är karaktäristisk för skolmatematiken. Skolmatematiken syftade mot en mångfald av högre mål. Å ena sidan bildningsmål av olika slag, å andra sidan praktiskt nyttiga kunskaper. Både undervisningen i räkning och undervisningen i geometri ansågs leda till dessa mål. Låt mig nu säga något kort om hur dessa mål diskuterades i förhållande till undervisningen av flickor.

Exkurs: Matematik för flickor

Den första artikel jag hittat som specifikt behandlar matematik som undervisningsämne för flickor har titeln ”En av dagens frågor” och var införd i *Tidskrift för hemmet* 1863. Pseudonymen St- skriver i denna artikel bland annat att:

[29] Carl Alfred Nyström, *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran, med talrika öfningsexempel och särskildt häftad facitbok 2:a förb.o.betydl.tillökta uppl. (äfven upptagande den nya indelningen af sorter)*, Stockholm, 1855 [1853], förord.

[30] Anjou, et al., *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Häftet V. Metodik: Räknekonsten i Folkskolan.*, s. 3.

> Geometrins värde i uppfostran är också ej blott det vetenskapliga, huru stort detta än må vara, utan det inflytande som den bör utöfva på vårt sätt att tänka och handla i det dagliga livet. Vi behöfva alla veta huruvida en sak, som underställes vårt bedömande är bevisad eller ej, samt hvari och hvarföre beviset är felaktigt. Vi behöfva alla lära oss att draga riktiga slutsatser från de facta och frågor, som förekomma inom kretsen af våra iakttagelser. Också skola vi i de flesta fall ej kunna handla rätt, om vi ej förmå att räsonnera riktigt, på samma sätt en blind man ej kan vandra säkert på en väg, hvilken han ej förut gått.
>
> Och har ett ämne af stor vigt mer än andra blifvit åsidosatt vid den qvinnliga ungdomens uppfostran, så har det väl just varit denna förmåga att reda begreppet och ordna tankeföljden. Också finner man äfven hos qvinnor med utmärktare anlag mycken oreda och oklarhet i begreppen, samt oförmåga att bibehålla ordning i tankeföljden och att i allmänhet länge fästa tankekraften vid ett ämne. Man måste derföre mången gång häpna öfver de snabba idéförbindelser, hvilka i ett nu leda samtalen till de mest olikartade ämnen.[31]

De argument som här anförs för införande av geometri i flickskolorna knyter an till det allmänna bildningstänkandet, men får intressant nog en extra knorr av vad som i citatet ovan beskrivs som en särskild oförmåga hos just kvinnor att ”länge fästa tankekraften vid ett ämne”.[32]

Det skrevs faktiskt flera läroböcker speciellt för flickor under andra halvan av 1800-talet. Nyströms *Räknelära för fruntimmer* från 1853 var först.[33] I dess utformning kan man dock inte se några större spår av anpassning till den särskilda målgruppen. Det kan man å andra sidan i P. Fr. Sievers *Räknebok för flickor* från 1871, där övningsuppgifterna handlar om tyger, att handla mat, och så vidare. Här är ett exempel ur introduktionen till allmänna bråk:

> 33. Fru Rosenqvist har 13 Rdr. Derutaf utgifver hon $\frac{19}{20}$:delar för kött. Huru många öre har hon då qvar?[34]

Den första kvinna som på allvar deltog i den skolmatematiska diskussionen var Anna Rönström. Hon gjorde, tror jag,[35] entré under signaturen ”Fr.” genom en rad synnerligen välformulerade läroboksrecensioner publicerade i

[31] St-, ”En av dagens frågor”, *Tidskrift för Hemmet*, 1863. Samma fråga tas upp av signaturen ”en, ny” i samma tidskrift: ”Om matematik såsom undervisningsämne för flickor, I och II”, *Tidskrift för Hemmet*, 1865. Se även Jenny Rossander, *Nya elementarskolan för flickor vid afslutningen af höstterminen 1871; Förberedande lärokursen för qvinliga elever; afhandling: om matematik och dess studium vid våra flickskolor*, Stockholm, 1871.

[32] St-, ”En av dagens frågor”.

[33] Carl Alfred Nyström, *Räknelära för fruntimmer: Omsl.: Med åtföljande särskildt häftad facitbok*, Stockholm, 1853.

[34] Ibid.

[35] I det följande utgår jag från att det faktiskt var Rönström som dolde sig bakom signaturen ”Fr.”. Detta kan vara ett misstag.

Folkskolans vän och *Svensk läraretidning* 1888-1890.[36] Givetvis antog alla att ”Fr.” var en man och det väckte en hel del harm att ”han” inte ville ge sig till känna. Rönström försvarade sin anonymitet med hänvisning till vikten av att ”läsarne må tvingas att fästa sig uteslutande vid de skäl jag anför för mina påståenden”, och fortsatte: ”Sätter man ut ett namn, händer lätt, att med detta följer en del föreställningar, som icke höra till den ifrågavarande saken”.[37]

Några år senare började Rönström publicera sig under eget namn i tidskriften *Verdandi*.[38] I artikeln ”Geometrin såsom läroämne i flickskolan” tar hon först upp problemet att den allmänna ”opinionen” inte förstår att värdesätta geometrin som läroämne. Tydligen betraktades franska språket ett som lämpligare föremål för de unga kvinnornas studier. Rönström skriver:

> Man kunde väl förlåta franskan (jag väljer detta språk som exempel, därför, att det i de flesta skolorna upptager de flesta språktimmarna och frampressar de flesta tårarna), att den lägger beslag på så mycket af lärjungarnas tid; men hvad man däremot icke kan förlåta är, att kunskapen däri göres till en gradmätare på deras intelligens. Emellertid är det så, att ofta de bästa, de mest praktiska och originela flickorna stämplas såsom föga intelligenta, ja såsom ”omöjliga”, därför att de icke kunna lära sig franska.[39]

Det låter märkligt i våra öron, men tydligen intog vid denna tid studier av franska i flickskolorna en plats som sedan skulle bli karaktäristisk för matematiken.[40] Intressant är att Rönström låter geometrin representera en sorts välgörande svårighet. Med en typiskt poetisk formulering liknar hon den vid en ”bärgsstig” som man måste vandra långsamt fram, under det att man ”hinner att inprägla bilden af trakten i sitt sinne”. I och för sig tillstår hon – liksom de flesta andra i hennes samtid – att merparten av de svårigheter som

---

[36] Följande artiklar är undertecknade av signaturen Fr.: ”Räknelära för folkskolan framställd genom exempel enligt eqvationsmetoden af J. Thysell och P. Nordström. Första årskursen”, *Svensk Läraretidning*, 1888; ”Räknelära för folkskolan, framställd genom exempel enligt eqvationsmetoden af J. Thysell och P. Nordström. Första årskursen.”, *Svensk Läraretidning*, 1888; ”Svar [till Thysell och Nordström]”, *Svensk Läraretidning*, 1889; ”Thysell-Nordströms räknelära. Svar på 'protester och medgifvanden'”, *Svensk Läraretidning*, 1889; ”Räknebok för folkskolan af L. T. Larsson, seminarieadjunkt, och N. Lundahl, folkskollärare. Tredje och fjärde årskurserna.”, *Svensk Läraretidning*, 1890; ”Räknebok för folkskolorna af K. O. Sjölander och A. G. Vihlander. Häft. III och IV. Stockholm, P. A. Nordstedt söners förlag.”, *Svensk Läraretidning*, 1890; ”Räknebok för folkskolorna utarbetad med ledning af folkskolelärobokskommitténs grundsatser af K. O. Sjölander och A. G. Vihlander. Häft. III och IV. Stockholm, P. A. Nordstedt söners förlag.”, *Folkskolans vän*, 1890; ”Sjölander-Vilanders räknebok”, *Svensk Läraretidning*, 1890; ”Svar [till K. O. Sjölander]”, *Svensk Läraretidning*, 1890.

[37] Fr., ”Sjölander-Vilanders räknebok”.

[38] Där, som många säkert känner till, Anna Sandström gjorde signaturen ”Uffe” känd för sina välformulerade kritiska samtidsreflektioner. Den intresserade hänvisas till Annika Ullman, *Stiftarinnegenerationen: Sofi Almquist, Anna Sandström, Anna Ahlström*, Stockholm, 2004.

[39] Anna Rönström, ”Geometrin såsom läroämne i flickskolan. Föredrag vid femte allmänna flickskolemötet i Lund”, *Verdandi*, 1893, s. 153.

[40] Det måste sägas att Rönströms tal om ”intelligens” hör till en något senare period än den som står i fokus här.

är förknippade med geometriska studier är onödiga och har att göra med ämnets felaktiga behandling i skolan. Inte desto mindre menar hon att ämnet *är svårt* och att det är som sådant det förtjänar sin plats i flickolan. Uppfostrarens uppgifter, skriver hon, ”är väl dock icke att undanrödja alla svårigheter”.[41] I linje med detta resonemang avslutar hon sin artikel på följande sätt:

> När den tiden kommer, då geometrin blir ett ämne, ej till prydnad blott, då tror jag, att den just skall hjälpa den unga flickan att förstå, att bildning är en allvarsam sak, är något, som skall tränga djupt och göra henne till en bättre och ädlare människa, och att den däremot icke är en mängd osammanhängande kunskapssmulor, samlade för att tagas fram emellanåt till andras skärskådande. Hon skall förstå, att vetandets skatter äro att förlikna vid de mäktiga ådror af ädla metaller, som rikta malmen, fastän de icke synas utanpå, icke vid det värdelösa glitterguld, som glänser i solljuset af andras bifall, men lemnar det inre tomt och kallt.[42]

Geometrin har här fått en potential specifikt knuten till Rönströms romantiska värden, den har blivit en osynlig ådra av ädel metall, som riktar den malm som de unga kvinnorna utgör, som gör henne till en bättre och ädlare människa.

En liknande bild av matematiken gav signaturen Robinson i en annan artikel i *Verdandi* samma år. Robinson menade att matematiken, i motsats till alla andra skolämnen, kunde förmedlas så att säga i sin ”vetenskapliga form” även till riktigt små barn. I alla andra skolämnen, skriver hon, ”måste ju på detta tidiga utvecklingsskede in-magasinerandet af data samt dessas nödtorftiga ordnande medelst 'qvasi'-lagar förblifva hufvudsak”.[43] Detta gäller dock inte matematiken, eftersom den ”i sina elementer, aritmetik och geometri [är] på en gång ganska abstrakt och fullt åskådlig, åskådlig äfven för ett barns föga uppöfvade förmåga af ordnande åskådning.[44] Här tillmäts med andra ord matematiken en särställning i förhållande till barnet. I förbigående kan slutligen noteras vad Robinson skriver om lärarens betydelse för de matematiska studierna: ”Redan i andra skolämnen är det hårdt att ha fått olämplig lärare; i matematik är det ett slags förståndsmord”.[45]

[41] Rönström, ”Geometrin såsom läroämne i flickskolan. Föredrag vid femte allmänna flickskolemötet i Lund”, s. 147.
[42] Ibid, s. 158–159.
[43] Robinson, ”Mera om 'Geometrin såsom läroämne i flickskolan'”, *Verdandi*, 1893, s. 217.
[44] Ibid, s. 218.
[45] Ibid, s. 221.

Det matematiska stoffet

> *Kan det matematiska stoff eleverna ägnar sig åt i skolan motiveras med utgångspunkt från de högre mål skolmatematiken skall leda till?* Varför preciseras detta stoff så sällan i offentliga utredningar och rapporter? Varför ägnar sig eleverna idag åt just detta stoff och inte något annat?

I problemställningen noterade jag att det finns ett glapp i dagens skolmatematiska diskurs, mellan de högre målen och det matematiska stoff eleverna i praktiken ägnar sig åt. Det är, menade jag, svårt att se varför just detta stoff, snarare än andra delar av matematiken, skulle vara särskilt lämpat för att realisera de högre målen. På denna punkt finns en strukturell likhet mellan situationen idag och den strax efter 1800-talets mitt. Det säger sig själv att det inte går att härleda något specifikt matematiskt stoff från den uppsättning högre mål jag beskrev ovan och i synnerhet inte från det övergripande bildningsmålet.

Vad eleverna i praktiken fick ägna sig åt har i viss mån framgått i tidigare kapitel. Jag har ingen ambition att täcka in folkskolans och läroverkets matematikundervisning i sin helhet, men klart är att Zweigbergks lärobok i räkning, Björlings lärobok i algebra, samt mer eller mindre modifierade varianter av Euklides *Elementa* spelade en central roll. Bilden kan kompletteras av en blick på den mogenhetsexamen som de matematiska studierna i läroverket (från och med1862) skulle leda till. Tabellen nedan visar fyra av de uppgifter som gavs i examen 1867:

Tabell 9. Några av satserna givna i skriftliga mogenhetsexamen höstterminen 1867: för latinlinien (6, 8) respektive reallinjen (17, 21).

6	Att i en gifven cirkel inskrifva 3 lika stora cirklar, som tangera hvarandra och den gifna cirkeln.
8	Af 2 silfverstänger, den ena innehållande 40 lod koppar och 60 lod rent silfver, den andra 20 lod koppar och 70 lod rent silfver, skall förfärdigas en bägare, som bör innehålla 10 lod koppar och 20 lod rent silfver, Hur många lod bör man taga af hvardera stången?
17	Dela en gifven fyrsidig figur midt i tu medelst en rät linie, som går genom någon af figurens vinkelspetsar.
21	En köpmans handelvinst var årligen lika med $\frac{1}{4}$ af den förmögenhet, som han egde vid årets början; hans lefnadsomkostnader uppgingo årligen till 2, 900 r:dr. Efter tre år var han egare till $1\frac{1}{2}$ gång så stor förmögenhet, som då han började sin handel. Huru mycket egde han då?

Jag har här valt ut två uppgifter i aritmetik och två i geometri. Uppgift 8 är ett exempel på beskickningsräkning. Vi minns framställningen i Roloff Anderssons räknelära, där de aritmetiska manipulationerna spelade en underordnad roll i förhållande till tabeller med myntsorternas respektive metallhalter och en mängd annan information som hörde till beskickningens praktiska verklighet. I ovanstående formulering står tvärtom en väl avgränsad uträkning i fokus, möjlig att lära sig utan någon som helst praktisk erfarenhet av beskickning. Vi har sett hur denna typ av avskalade uppgifter blev ett resultat dels av mötet mellan räknekonsten och den vetenskapliga matematiken, men också av uppgifternas funktion som prestationsmätare. Det som prövas i uppgift 8 är med andra ord inte om eleverna vet något om beskickning. Inte heller har uppgiften med den vetenskapliga matematiken att göra – de manipulationer som uppgiften kräver är i matematiskt avseende triviala. Vad som prövas är en väl avgränsad förmåga att översätta ett litet stycke text till det svar som skolmatematiken definierar som rätt. Uppgift 21 handlar om ränteräkning. På samma sätt som då det gällde uppgift 8 är det emellertid inte fråga om att som i räknelärorna lösa ett problem som i praktiken kan uppstå. Uppgiften är formulerad som en gåta, av det slag som blev vanliga under 1700-talet då uppgifterna fick illustrera matematikens användbarhet istället för att visa hur den i praktiken användes. Men om 1700-talets uppgifter illustrerade användbarheten av en matematik som åtminstone knöt an till tidens vetenskap, fanns ingen sådan anknytning kvar 1867. Såväl uppgift 8 som uppgift 21 kan ses som skolans stiliserade bilder – av matematiken, räknekonsten och samhället.

Uppgif 6 och 17 hör till den euklidiska geometrin. Att dessa uppgifter inte knöt an till livet utanför skolan säger sig självt. De hade emellertid inte heller särskilt mycket att göra med tidens matematiska vetenskap, som var på god väg att lämna Euklides bakom sig. Karaktäristiskt för de fyra uppgifterna är att de, snarare än att knyta an till vetenskapen och livet utanför skolan, prövar en väl avgränsad förmåga som *inte* knyter an till någonting. Uppgifterna är skolmatematikens egna skapelser. De får sin mening uteslutande inom skolmatematikens ramar.

Inte desto mindre utgör de representationer av matematiken och verkligheten utanför skolan. Som delar av mogenhetsexamen framställs de som mätare av bildning och det som skall mätas är givetvis inte en specifikt skolmatematisk bildning. Tvärtom får denna bildning sin mening dels genom den euklidiska geometrins band till sanning och tänkande, dels genom räknekonstens band till praktiskt användbara färdigheter.

På precis samma sätt som idag utgör därmed uppgifterna ovan skolmatematikens bilder av samhällets högre värden. I diskursen om skolmatematikens högre mål får, som jag visat ovan, matematiken fungera som sammanfattning av allt det eleverna ägnar sig åt i skolan. Det som ställs fram är matematikens utsida, vilken fungerar som en blank spegel, där samhället finner sina egna högre värden. Uppgifterna ovan utgör exempel på skolans inre representation av dessa värden. Uppgifterna i euklidisk geometri representerar tänkande, sanning och bildning, medan uppgifterna i aritmetik representerar praktisk nytta. De hör till skolmatematikens insida. I offentlighetens ljus riskerar de att reflektera ett löjets skimmer snarare än samhällets vackra ideal. Till skolmatematikens kännemärken hör emellertid kontroll. Så länge allt sker på skolmatematikens villkor, framträder aldrig dessa uppgifter isolerade, utan tvärtom alltid som delar av en flock, väl inbäddade i skolans meningsskapande matematik.

Kritiken

> *Varför utsätts skolmatematiken för så skarp kritik, från dem som själva arbetar med att förändra den?* Varför är det obligatoriskt att ta del av undervisning i matematik, trots att generation efter generation av skolmatematiker under de senaste drygt 150 åren konstaterat att den i praktiken inte leder till de mål man hoppas och vill att den skall leda till?

Jag beskrev i problemställningen hur den skolmatematiska diskursen upprättar en dikotomi mellan å ena sidan matematiken – som får representera allt högt och gott – och å den andra skolan, vilken framställs som det hinder vilket gör att matematikens potential ännu inte realiserats. I denna retoriska figur spelar skolmatematikens förflutna en central roll. Skolmatematiken, sådan den faktiskt är, sägs nämligen vara tyngd av sitt traditionella förflutna. ”Vi vet nu hur man borde göra”, säger skolmatematikens företrädare, ”att skolmatematiken är som den är beror bara på att vi ännu inte kunnat omsätta detta vetande i praktisk verklighet.”

Det var strax efter mitten av 1800-talet som denna aspekt av den skolmatematiska diskursen tog form. Jag tror att uppkomsten av denna retoriska figur kan knytas till att skolmatematiken vid denna tid nått en relativt säker ställning i det svenska samhället. Denna kritiska hållning kan ju knappast ha utgjort en framgångsrik strategi i ett samhälle i vilket det var en öppen fråga om matematiken över huvud taget skulle ha någon plats i skolan. Skolmatematikernas sätt att tala pekar därför mot att denna grundläggande fråga nu hade avgjorts till de matematiska studiernas fördel. Att matematikens plats i skolan nu kunde tas för given, skapade förutsättningar för intern kritik. Denna tes får stöd av att den interna kritiken reducerades till att minimum strax efter sekelskiftet 1900, då det igen var en öppen fråga hur mycket plats matematiken skulle få ta i det framväxande utbildningssystemet.[46]

Kritiken riktades som sagt mot skolan, och mer specifikt undervisningsmetoderna, vilka var i behov av förändring. Dessa kontrasterades mot matematiken och dess inneboende potential, vilken framställdes som konstant. Låt mig nu illustrera denna figur med några exempel.

Objektet och metoden

Det var framför allt geometrin som i den skolmatematiska diskussionen tillmättes inneboende egenskaper. Bergius konstaterade att geometrin för lärjungarna ofta framstod som ”en abstrakt och torr vetenskap”. Men, skriver han,

> denna ungdomens obenägenhet för geometrien kan omöjligen härröra af annat, än en oriktig behandling af ämnet. Ty det vore eljest en högst besynnerlig företeelse, om en vetenskap, som företrädesvis sysselsätter sig med de i själen inneboende formerna, som lär att med klarhet och förstånd betrakta de yttre tingen, skulle vara främmande och oangenäm för menniskan.[47]

På ett karaktäristikt sätt inleder Bergius med en negativ karaktäristik av skolmatematikens tillstånd, som sedan leder över i en positiv karaktäristik av skolmatematikens objekt – här geometrin – och en konstitution av den felaktiga metoden som det negativa tillståndets orsak.

Siljeström skrev bland annat att geometrin är ”en ibland de saker, som gossen först och lättast kan fatta och utöfva”, och att ”[o]m förhållandet visar

[46] Månandet om en enhetlig positiv hållning till matematiken från skolmatematikens sida framgår i många av de artiklar av C. E. Sjöstedt som från och med 1933 publicerades i *Tidning för Sveriges Läroverk*, t.ex. ”'Matematikherraväldet'” (1933); ”Studentuppgifterna i matematik” (1949) och ”Den 'orimligt svåra' matematikskrivningen” (1950).
[47] Bergius, ”Om elementarundervisningen i matematik”, s. 88.

sig annordlunda, så ligger felet ej i ämnets beskaffenhet, utan i behandlingssättet, som är för abstrakt och icke afpassat efter nybegynnarens fattningsförmåga".[48] Sandberg skriver: "i sjelfva det geometriska läroämnet, såsom sådant, kan misslyckandet icke ligga, ty i så fall skulle ju alla lärjungar utan undantag visa sig otillgängliga för detsamma", utan istället måste problemet ligga i "sättet, metoden för undervisningen".[49] I en recension av Jan Erik Johanssons *Folkskolans geometri* formulerar signaturen J. J-n problematiken på följande sätt:

> Geometrien är ett ämne, som på grund af såväl sin praktiska betydelse som sin förmåga att utveckla och skärpa tankeförmågan väl försvarar sin plats i skolan. Att detta ämne dock icke alltid förmår tillvinna sig något större intresse, beror nog till icke ringa del på en mekanisk behandling af detsamma. Det kan blifva 'dödande tråkigt', då undervisningen inskränker sig till meddelande af några torra, blott halft förstådda satser; men det kan ock blifva högeligen intressant och äfven för barn i folkskoleåldern njutbart, då det behandlas åskådligt, med ständigt vädjande till barnens erfarenhet och i egentlig mening praktiskt.[50]

Kritiken mot geometriundervisningen träffade i stor utsträckning undervisning baserad på Euklides *Elementa*. Under 1700-talet var termen geometri i undervisningssammanhang ofta synonym med användande av just *Elementa*. Under 1800-talet blev det emellertid allt vanligare att skilja mellan å ena sidan euklides framställning och å den andra geometrin i allmänhet. Detta öppnade för möjligheten att kritisera Euklides, utan att denna kritik därmed också träffade själva geometrin.

Det tillsattes 1869 en kommission för "behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor". I det betänkande kommissionens arbete resulterade i kan man läsa att Euklides *Elementa* är "behäftad med åtskilliga fel", att det i den "saknas viktiga satser" som borde tas upp i undervisningen, och slutligen att den är uppställd på ett sätt som ligger långt från "de grunder, enligt hvilka kommissionen [...] tänkt sig en lärobok i geometrien böra vara uppställd".[51] Siljeström ger en målande beskrivning av de resultat undervisning baserad på Euklides *Elementa* kunde leda till:

> Hvad resultatet är af deras användande såsom lärobok uti skolorna, det vet nog hvarje nybegynnare, som, fastän med god fattningsgåfva för

[48] Siljeström, "Geometri för nybegynnare, af P. N. Ekman, Lektor i Matematiken vid Wexjö Gymnasium".
[49] Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, s. 150.
[50] Jan Erik Johansson, "Folkskolans geometri af J. E. Johansson, folkskollärare", *Folkskolans vän*, 1890.
[51] Kommissionen för behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor, *Underdånigt betänkande*, s. 29.

> öfrigt, likväl anser Euclides för skolans värsta buse; som i sitt anletes svett arbetar med dessa i sig sjelfva så förträffliga bevis, men hvilkas bevisande kraft och i synnerhet behöflighet han oftast icke inser, till dess han helt och hållet förlorar ur sigte sjelfva innehållet af hvad han läser; som till slut icke vet annat råd, än att inprägla alltsammans, satser och bevis, i minut, för att omsider möjligen lemna skolan, utan att af sina Euclideiska mödor medföra någon den ringaste vinst för sin bildning eller för det praktiska lifvets behof.[52]

I citaten ovan är det tydligt att kritiken mot Euklides inte tar sikte mot själva geometrin, eller ens mot Euklides framställning av geometrin. Utgångspunkten är framställningens relation till lärjungen och barnet. Det är som lärobok Euklides *Elementa* inte är lämplig. Med hänvisning till min tolkningsmodell kan man säga att kritiken konstituerar Euklides *Elementa* som en blott yttre representation, annan än det objekt som bär på geometrins potential.

Slutligen skall sägas att det inte bara var geometrin som gjordes till föremål för denna typ av retorik. Angående räkning kan man till exempel läsa följande:

> Näppeligen gifves på det lägre undervisningsstadiet något bildningsmedel, hvilket är ägnadt att i lika hög grad som räkningen befrämja en allsidig utveckling. Den plats, räkningen för närvarande intaget bland barndomsskolans läroämnen, är också ganska förmånlig. Räkneundervisningen har likväl i allmänhet icke burit sådan frukt, man kunde vänta. Orsaken härtill måste sökas i en felaktig metod.[53]

I de ovanstående exemplen kan man ibland se vilka aspekter av metoden som ansågs vara undervisningen till nackdel. Man talade om en undervisning som är allt för abstrakt, som består i meddelande av torra satser och mekaniska regler, och som framför allt inte är anpassad till barnens fattningsförmåga. Mot förmedling av satser och regler ställde man en undervisning som är åskådlig och praktisk. Situationen är emellertid problematisk. Sandberg skriver till exempel om *två* fel som måste undvikas: å ena sidan ”abstraktioner, som äro främmande för folkets sunda uppfattning”, å den andra ett ensidigt fokus på den praktisk nytta, vilket leder till ”andefattig mekanism [och] slentrianväsende”.[54] Vad det handlade om var med andra ord att hitta en riktig medelväg – och just medelvägen kom att spela en central roll i den skolmatematiska diskussionen.

[52] Siljeström, ”Geometri för nybegynnare, af P. N. Ekman, Lektor i Matematiken vid Wexjö Gymnasium”.

[53] A.A., ”Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar af K. P. Nordlund”.

[54] Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, s. 157.

Metoden och det förflutna

Konstitutionen av den felaktiga metoden som orsak till skolmatematikens misslyckande hängde som sagt ofta samman med ett förknippande av denna felaktiga metod med skolmatematikens förflutna. Man åstadkom på så sätt en disidentifikation med det rådande tillståndet i två steg: först skiljde man misslyckandet från objektet genom att förlägga det i metoden. Sedan förde man denna felaktiga metod till skolmatematikens förflutna. Detta argumentationssätt blev karaktäristiskt för skolmatematiken och det illustreras av nedanstående citat, som handlar om skillnaden mellan ”Den gamla och nya pedagogiken”:

> Det gifves väsentligen två sätta att undervisa barn på, kännetecknande genom sin uppfattning af det menniskoväsen, som skall mottaga undervisningen. För den ena, den gammalmodiga, småningom vikande, men ännu långt ifrån fullständigt öfvervunna metoden är barnasjälen att likna vid ett magasin eller ett skeppsrum med många afdelningar och behållare, som vänta att blifva fylda, och den pedagogiska uppgiften är då att fullpacka dessa rum med så många väl sorterade och väl etiketterade kunskaper som möjligt. Huruvida rummen egentligen egna sig för att mottaga just detta innehåll, det frågas icke efter. Hvilken rätt skulle den oförnuftiga barnsligheten hafva gent emot den goda kunskapen? Det är just den duglige lärarens konst att pressa in denna kunskap, om det också skulle ske med våld, och om barnanaturen våndas och vrider sig i smärta vid en sådan behandling, så är det ju så godt att den syndiga menniskosjälen tidigt lär känna tukt och aga. […] Mot denna hårda och mekaniska uppfattning af undervisningens väsen kämpar sig nu en riktning fram, som kunde kallas den organiska, derför att den icke sätter någon bestämd gräns mellan skolan och lifvet, utan betraktar skolan och skoltiden såsom väsentliga delar af menniskolifvet sjelft och häfdar åt barnaåldern såväl som åt den vuxna åldern den rätt, som tillkommer den lefvande organismen att efter sin natur upptaga det, som egnar sig för den, och förkasta det, som den icke kan smälta. Här blir sålunda icke tal om någon våldsam inpressning af kunskapsmaterial i barnets medvetande, utan om att välja och bearbeta det så, att det villigt upptages och sammansmälter med medvetandet. Den lärandes glädje vid mottagandet är för den organiska undervisningsmetoden icke en underordnad sak af tvifvelaktigt värde, utan ett ledande och afgörande kännetecken på, om undervisningen når eller förfelar sin afsigt.[55]

Citatet kan ses som ett paradigm för skolmatematikens sätt att förstå sitt förflutna från och med 1800-talets andra hälft. Det konstituerar samtiden som stadd i rörelse, bort från undervisningsmetoder präglade av torr och död förmedling, mot undervisning förknippad med glädje och anpassning till barnets natur.

[55] V. Pingel & N. J. Nörlund, ”Den gamla och nya pedagogiken”, *Svensk Läraretidning*, 1886.

Hur detta innebar en form av disidentifikation tydliggörs av följande kommentar angående föräldrar som riktar kritik mot skolans metoder: ”Ej sällan framlägga de för allmänheten en möjligen sann, möjligen också karikerad bild af tillståndet – för 20 à 30 år sedan, grundad på reminiscenser från deras egen skoltid”.[56] En följd av detta sätt att argumentera blir att endast de som befinner sig i skolan tillmäts förmågan att bedöma den. Kritik med utgångspunkt från de erfarenheter man haft som elev framställs som irrelevanta, eftersom de sägs handla om något som man i skolans värld redan vet är fel, något man sedan länge lämnat bakom sig.

1869 års granskningskommission inleder sitt avsnitt om geometri med delrubriken ”Hinder för undervisningen framgång”, och skriver:

> Tvenne omständigheter hafva i äldre tider, likasom väl äfven på sina ställen ända in i våra dagar, försvårat undervisningen i geometri och vållat, att alltför ringa framgång deraf vunnits. Dessa äro, att man utan lämplig inledning allt för tvärt börjat med den strängt vetenskapliga undervisningen samt att vid denna – äfven oafsedt de brister, hvarmed läroboken kunnat vara behäftad – en oriktig metod blifvit följd.[57]

Just att man båda talar om ”äldre tider” med tillägget ”ända in i våra dagar” gör det möjligt att tala om något som *de facto* är som likväl externt i förhållande till den skolmatematiska position från vilken man talar. Liksom i citaten i det föregående stycket är det dels frånvaron av anpassning till barnen och den felaktiga metoden som man tillskriver det förflutna. Det finns här anledning att påminna om att det ända sedan slutet av 1700-talet riktats kritik i Sverige mot *Elementa* som lärobok.[58] Det nya består inte i kritiken mot *Elementa* i sig, utan i den form denna kritik nu antagit.

Bergius ger uttryck för samma retoriska figur när han skriver att: ”Den fördel, som ungdomen i latinskolorna hämtade af sitt matematiska studium, var [...] obetydlig”. Lärarna var allt för upptagna av ”formler” och att vara matematiker förknippades med att vara ”torr [och] opraktisk”. Så är det emellertid inte längre. Under de sista 50 åren, skriver Bergius,

> har elementarskolväsendet i andra länder undergått en sådan ombildning, att geometrien numera utgör ett det vigtigaste bildningsmedel för gossar, ja till och med för flickor ända från det 10:de året. Pestalozzi's åsigt, att formläran (geometrien) utgör jemte talläran och språkläran ett oumbärligt hufvudmedel för hvarje grundlig bildning, blef snart allmänt erkänd, och de lärare i Tyskland, som följde

[56] Adn., ”Är professor Keys fordran på en reform af den naturvetenskapliga undervisningen vid våra läroverk berättigad?”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1875.
[57] Kommissionen för behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor, *Underdånigt betänkande*, s. 25.
[58] Se t.ex. förordet i Lithander, *Aritmetik och Euklides' Elementer.*

> med sin tids pedagogisk utveckling, vore angelägna att i sina skolor införa detta nya bildningsmedel.[59]

Bergius förknippar det förflutna med detta torra och opraktiska. Här är ytterligare ett exempel:

> Ända till början av 1800-talet var förfaringssättet vid räkneundervisningen i allmänhet mycket mekaniskt. Lärjungen fick i sin räknebok lära sig reglerna för det räknesätt, som skulle inhämtas, och därpå använda dem på de i boken upptagna exemplen. Att först åskådliggöra och förklara det, som var föremål för undervisningen, ansågo lärarna icke behövligt. Målet var att bibringa mekanisk färdighet; om insikt i räkning var det ej någon fråga.[60]

Jag har ännu inte sagt särskilt mycket om vad det på en mer konkret nivå var man såg som skolmatematikens hinder. Som framgått i kapitel 9 ovan var detta en synnerligen komplicerad fråga. Låt mig som avslutning på kapitlet illustrera detta med hänvisning till en tämligen animerad meningsväxling mellan Bergius och läroboksförfattaren Jacob Otterström.

Matematik som hinder

Jacob Otterströms *Utkast till lärobok i aritmetiken (för skolor i allmänhet och folkskolor i synnerhet)*, publicerad 1849, väckte stor uppmärksamhet genom att han i denna bok vävde samman aritmetik med algebra i en bok riktad till tämligen unga barn och dessutom till barn som skulle undervisas i folkskolan. I och med detta bröt han mot flera av skolmatematikens vid denna tid vedertagna principer: för det första att algebra och aritmetik skulle hållas åtskilda, för det andra att man skulle hålla den vetenskapliga matematikens teori och formalism på behörigt avstånd från barnen och i synnerhet från barnen i folkskolan.

Otterströms bok fick ett blandat mottagande. Den tycks inte ha fått någon större spridning. Samtidigt fick boken ett stor genomslag i den skolmatematiska diskussionen. Hans metod, som helt enkelt kom att kallas ”den nya metoden”, utgjorde en återkommande referenspunkt under andra halvan av 1800-talet – tillsammans med Kjelldals ”heuristiska metod” och Nyströms ”enhetsmetod” för lösning av *Regula de Tri*-uppgifter.

Otterströms bok väckte dock harm i flera läger, bland annat hos Bergius som recenserade boken då den kom ut 1849.[61] Nedanstående redogörelse bygger på denna recension, Otterströms replik, och Bergius avslutande

---

[59] Bergius, ”Om elementarundervisningen i matematik”, s. 86.

[60] G. W. Bucht & J. A. Svensk, *Anteckningar i räknemetodik för folkskolan och småskolan*, Stockholm, 1894, kapitel 1.

[61] Bergius, ”Utkast till Lärobok i Aritmetiken för skolor i allmänhet och folkskolor i synnerhet, af J. Otterström”.

bemötande av Otterströms svar.[62] Vad jag vill fästa uppmärksamheten på är hur Bergius och Otterström ger två delvis motsatta bilder av vad det var som utgjorde hindret för skolmatematikens framgång. Bergius ser (vid denna tidpunkt 32 år gammal) detta hinder i den matematiska formalismen. Otterström ser hindret i räknekonstens regler.

Bergius inleder sin recension av Otterströms med en typisk kritik av den tidigare och rådande skolmatematiken. Den har på senare år, skriver han, mer än tidigare kommit att syfta till att ”meddela lärjungarna en stor praktisk färdighet att med tillhjelp af griffel, föreskrifna reglor och räknetafla lösa en mängd sifferexempel”, något han menar beror på läroböckerna som på senare tid ”blivit nästan tabellariskt utarbetade, för att utgöra en samling af reglor och exempel”. Givetvis syftar han här på den allmänna trenden av ökande antal övningsuppgifter och i synnerhet på Zweigbergks *Lärobok i räknekonsten*.

Han konstaterar sedan att han och Otterström tycks vara eniga i denna syn på skolmatematikens problem och dess mål. ”[Otterström] synes oss likväl”, skriver han dock sedan, ”hafva misstagit sig, då han påstått att all undervisning i aritmetik hittills blifvit meddelad efter en alldeles falsk metod, som han gifvit namn af den upp- och nedvända”. Det Otterström syftar på här är helt enkelt räknekonsten och dess regler. Han menar att räknekonsten *till sitt väsen*, för att använda ett uttryck som tydliggör kärnpunkten i vad som skiljer Otterströms och Bergius ståndpunkter åt, är olämplig. Med andra ord: Otterström ser ingen potential i räknekonsten, han ser den som en i sig en felaktig metod.

Detta håller Bergius inte med om. Han ser istället räknekonstens behandling i skolan som orsaken till skolmatematikens misslyckande. Bergius och Otterström drar med andra ord gränsen mellan objektet och metoden på olika sätt. I motsats till Bergius placerar Otterström endast den vetenskapliga matematiken så att säga ”innanför” matematiken, och såväl pedagogiska metoder som räknekonst utanför. Otterström menar att det bara är genom att låta skolmatematiken följa den vetenskapliga matematikens uttryckssätt som den kan bli logisk och därmed stå i samklang med förståndet. Bergius kan inte förstå varför inte räknelärans tveklöst praktiskt användbara regler också de skulle kunna vara förståndsbildande – om de bara behandlades på ett metodiskt riktigt sätt. Reglerna har ju, menar Bergius, även de en matematisk grund, och i den mån lärjungarna förstår denna grund förstår de ju därigenom också matematik:

> Om lärjungen, först efter att hafva gjort sig förvissad om giltigheten af det vid lösningen använda förfaringssättet och sjelf så att säga utforskat det allmänna deruti, erhåller regeln, så emottager han den icke såsom

[62] Axel Theodor Bergius, ”Svar till Hr Otterström med anledning af hans replik”, *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare*, 1849; Jakob Otterström, ”Den 'nya' räknemetoden. Replik”, *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare*, 1849.

> en betungande och onyttig utanlexa, utan såsom en välkommen hjelpreda för minnet.[63]

Otterström fäster i förordet till sin bok stor vikt vid att lärjungen skall förstå vad han gör, och då han sätter likhetstecken mellan räknekonsten och brist på förståelse måste givetvis Bergius försvara sig. Även han tillmäter ju förståelse en avgörande betydelse. I sin replik konstaterar Otterström ungefär vad Bergius redan sagt, nämligen att de två är eniga i teorin, men oeniga i praktiken. Han skriver:

> Detta Rec. resonnemang, som förtjenade att i guld graveras på väggarne i alla nuvarande verkstäder för lefvande räknemaschiners producerande, är liksom ryckt ur min egen själ.[64]

Otterström kan inte förstå hur Bergius kan erkänna att skolmatematiken hittills varit allt igenom mekanisk utan att samtidigt se räknekonsten som orsak till detta förhållande. Där Bergius ser en i och för sig god räknekonst – förstörd av en felaktig behandling i skolan, ser Otterström en i grunden felaktig räknekonst, som goda lärare haft att *kämpa mot*, och detta föga framgångsrikt ”just för lärobokens felaktighet”. Det praktiska användandet av räknekonsten har inte varit oriktigt, skriver han, ”utan rigtigt och konseqvent”, och just därför har det inneburit ”det nesligaste träldomsok på svenska folkets intelligens”,

> ty något orimligt konstigare och svårare, än räknekonsten, sådan den i allmänhet varit framställd i läroböckerna och af lärarne enligt dem, har icke i något läroämne blifvit tillskapadt, om ej i astronomien före Copernicus. Resultaten af denna metod och dess conseqventa användning ligga för öppen dag öfverallt mellan Ystad och Torneå, i det att högst få af dem, som lärt räknekonsten i skolan, kunna utom slentrianen i yrket reda sig i de ofta enklaste aritmetiska frågors uppfattning och lösning.[65]

Otterström kräver revolution; Bergius vill reformera. Otterström kallar Bergius för ”mekanismens teoretiske förkastare, men praktiske försvarare” och förklarar:

> min hufvudafsigt har verkligen varit den, at åstadkomma ”en liten tids anarki”, för att sedan med sjelfva läroboken möjligtvis kunna rycka den reflekterande och lärgiriga svenska ungdomen undan det skamliga tyranni, som tryckt *oss*, som trampat ut barnaskorna.

---

[63] Bergius, ”Utkast till Lärobok i Aritmetiken för skolor i allmänhet och folkskolor i synnerhet, af J. Otterström”.

[64] Otterström, ”Den 'nya' räknemetoden. Replik”.

[65] Ibid. Jmf. den liknande kritiken i Albrekt Segerstedt, ”Om lösning af s.k. 'regula de tri' frågor i folkskolan”, *Tidning för Folkskolan*, 1871.

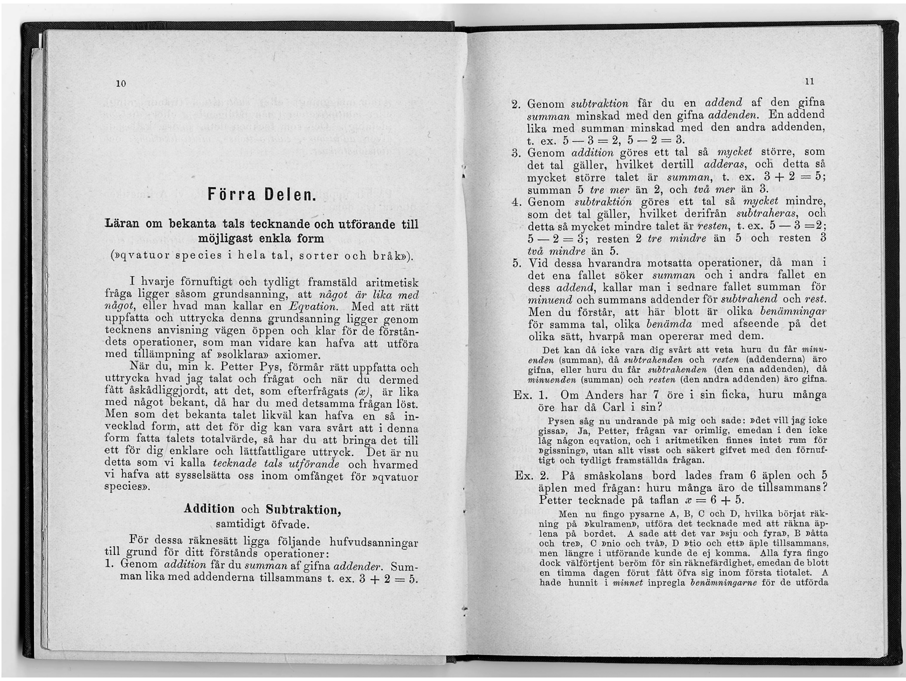
”Vi är”, skriver Otterström avslutningsvis, ”i fråga om praktiken, fullkompliga Antipoder, som med divergerande hufvuden nalkas hvarandra blott med fötterna”.

Bergius ”Svar till Hr. Otterström med anledning af hans replik” är klargörande. Istället för att fortsätta diskussionen återför han den till dess föremål, Otterströms bok. Det visar sig då att den förmodligen viktigaste skiljelinjen mellan de båda går i deras syn på språket och i viss mån även barnet, snarare än deras syn på matematiken. I sin bok försöker Otterström nämligen *förklara* matematiken och algebran. Han beskriver vad ett tal är, vad de matematiska tecknen betyder, hur de används, och så vidare. Angående dessa förklaringar skriver Bergius:

> Något konstigare och obegripligare, än hvad förf. här framställer, har man väl aldrig träffat i någon lärobok i aritmetiken, och ehuru denna indelning ligger till grund för hela den följande uppränningen af boken, är man frestad att begagna Hr O:s egna ord och anse såsom ett ”nesligt träldomsok på svenska folkets intelligens”, om något dylikt skulle inpräglas hos lärjungarna i våra skolor.[66]

Här syns att matematiken för Bergius inte är något man kan lära sig genom at läsa om den. I linje med Pestalozzis bildningstänkande (som han vid denna tid skriver om i andra artiklar) drar han istället en skarp gräns mellan å ena sidan matematiska begrepp, och å andra sidan de tecken och ord som representerar dessa begrepp. Begrepp var för Bergius liksom för Pestalozzi något som bara kunde växa fram inifrån genom åskådning och övning. Det var i ljuset av detta perspektiv som Otterströms förklaringar framstod som allt annat än ledande till förståelse. Otterströms betrodde lärjungarna med en förmåga att läsa löpande text och med denna som utgångspunkt lära sig algebra. Detta framgår av nedanstående figur, som visar ett uppslag ur Otterströms lärobok i en något senare upplaga, från 1880:

[66] Bergius, ”Svar till Hr Otterström med anledning af hans replik”.



10

Förra Delen.

Läran om bekanta tals tecknande och utförande till möjligast enkla form

(»qvatuor species i hela tal, sorter och bråk»).

I hvarje förnuftigt och tydligt framstäld aritmetisk fråga ligger såsom grundsanning, att *något är lika med något*, eller hvad man kallar en *Eqvation*. Med att rätt uppfatta och uttrycka denna grundsanning ligger genom tecknens anvisning vägen öppen och klar för de förståndets operationer, som man vidare kan hafva att utföra med tillämpning af »solklara» axiomer.

När du, min k. Petter Pys, förmår rätt uppfatta och uttrycka hvad jag talat och frågat och när du dermed fått åskådliggjordt, att det, som efterfrågats *(x)*, är lika med något bekant, då har du med detsamma frågan löst. Men som det bekanta talet likväl kan hafva en så invecklad form, att det för dig kan vara svårt att i denna form fatta talets totalvärde, så har du att bringa det till ett för dig enklare och lättfattligare uttryck. Det är nu detta som vi kalla *tecknade tals utförande* och hvarmed vi hafva att sysselsätta oss inom omfånget för »qvatuor species».

Addition och **Subtraktion,**
samtidigt öfvade.

För dessa räknesätt ligga följande hufvudsanningar till grund för ditt förstånds operationer:

1. Genom *addition* får du *summan* af gifna *addender*. Summan lika med addenderna tillsammans t. ex. $3 + 2 = 5$.

11

2. Genom *subtraktion* får du en *addend* af den gifna *summan* minskad med den gifna *addenden*. En addend lika med summan minskad med den andra addenden, t. ex. $5 - 3 = 2$, $5 - 2 = 3$.
3. Genom *addition* göres ett tal så *mycket* större, som det tal gäller, hvilket dertill *adderas*, och detta så mycket större talet är *summan*, t. ex. $3 + 2 = 5$; summan 5 *tre mer* än 2, och *två mer* än 3.
4. Genom *subtraktion* göres ett tal så *mycket* mindre, som det tal gäller, hvilket derifrån *subtraheras*, och detta så mycket mindre talet är *resten*, t. ex. $5 - 3 = 2$; $5 - 2 = 3$; resten 2 *tre mindre* än 5 och resten 3 *två mindre* än 5.
5. Vid dessa hvarandra motsatta operationer, då man i det ena fallet söker *summan* och i andra fallet en dess *addend*, kallar man i sednare fallet summan för *minuend* och summans addender för *subtrahend* och *rest*. Men du förstår, att här blott är olika *benämningar* för samma tal, olika *benämda* med afseende på det olika sätt, hvarpå man opererar med dem.

Det kan då icke vara dig svårt att veta huru du får *minuenden* (summan), då *subtrahenden* och *resten* (addenderna) äro gifna, eller huru du får *subtrahenden* (den ena addenden), då *minuenden* (summan) och *resten* (den andra addenden) äro gifna.

Ex. 1. Om Anders har 7 öre i sin ficka, huru många öre har då Carl i sin?

Pysen såg nu undrande på mig och sade: »det vill jag icke gissa». Ja, Petter, frågan var orimlig, emedan i den icke låg någon eqvation, och i aritmetiken finnes intet rum för »gissning», utan allt visst och säkert gifvet med den förnuftigt och tydligt framställda frågan.

Ex. 2. På småskolans bord lades fram 6 äplen och 5 äplen med frågan: huru många äro de tillsammans? Petter tecknade på taflan $x = 6 + 5$.

Men nu fingo pysarne A, B, C och D, hvilka börjat räkning på »kulramen», utföra det tecknade med att räkna äplena på bordet. A sade att det var »sju och fyra», B »åtta och tre», C »nio och två», D »tio och ett» äple tillsammans, men längre i utförande kunde de ej komma. Alla fyra fingo dock välförtjent beröm för sin räknefärdighet, emedan de blott en timma dagen förut fått öfva sig inom första tiotalet. A hade hunnit i *minnet* inpregla *benämningarne* för de utförda

Figur 4. Otterströms *Lärobok i aritmetik för skolans lägre stadium.* Man ser här hur Otterström talar till sin läsare på ett sätt som i viss mån känns igen från Olof Forssells läroböcker från 1800-talets första decennier, det vill med en ambition att förklara.[67]

Bergius skriver att lärjungen, i Otterströms bok, tvingas ”blott fästa sig vid tecknet och förbise saken, som derigenom betecknas”. För Bergius framstod tecknet snarast som ett hinder, som står i vägen för relationen mellan lärjungen och matematiken. Bergius ger i sin recension uttryck för en karaktäristisk rädsla inom skolmatematiken för att tecken skall vara tomma, att lärjungen å ena sidan skall ta dem till sig, men å andra sidan blott som tecken, utan det begrepp som de var tänkta att beteckna.

Vad Bergius mot bakgrund av denna syn på språket ser som nödvändig är därför en lärobok där orden inte kommer förrän begreppet är, så att säga, ”färdigt”. Undervisningen måste, skriver han ”utgå från omedelbara åskådningar, som öfverlemnas åt förståndet för att sedan de blifvit förvandlade til begrepp, användas i omdömen och slutledningar”. Denna förvandling kommer, enligt Bergius, till stånd genom övning – absolut inte genom förklaringar, vilka ju tvärtom ständigt introducerar fler och fler nya ord.

[67] Jakob Otterström, *Lärobok i aritmetik för skolans lägre stadium*, Stockholm, 1880, s. 10–11.

11. Skolmatematikens tid

Kapitelrubriken ”Skolmatematikens tid” skall förstås i en dubbel bemärkelse. Dels syftar den på att skolmatematiken diskuterades livligt under den period, mitten av 1880-talet, som kapitlet handlar om – det var en viktig tid, då det zweigbergkska läroboksparadigmet, med sina regler och övningsuppgifter, ersattes av ett annat. Titeln syftar emellertid också på frågan om *tidens* betydelse i den skolmatematiska undervisningspraktiken. Denna fråga stod nämligen i diskussionens centrum.

Jag skall här börja med att ge ett hypotetiskt svar på frågan om varför skolmatematiken kräver så mycket tid i skolan. Detta svar är mycket enkelt, nämligen att den skolmatematiska undervisningspraktiken under 1800-talets andra hälft utformades med det explicit formulerade syftet att ta upp elevens tid. Här var alltså inte så att skolmatematiken *krävde* tid. Tvärtom hade den ett krav på sig att *ta elevens tid i anspråk.* Vad gäller läroverket talade man om de matematiska studierna som en ersättning för de klassiska språken, med syfte att ge studierna på linjen för de som ”icke läsa klassiska språk” behövliga ramar.[1] För folkskolans del talade man om de matematiska studierna som ett verktyg för att hålla eleverna sysselsatta. Trots att läroverket och folkskolan verkade under tämligen olika materiella villkor, fanns därmed en gemensam grundsyn på de matematiska studierna som sträckte sig över gränsen mellan de två institutionerna, nämligen att själva förmedlingen av matematiskt stoff till lärjungarna var av underordnad betydelse, inte bara som tidigare i förhållande till det övergripande bildande målet, utan även i förhållande till studiernas funktion inom själva undervisningspraktiken.

Efter en beskrivning av tidens betydelse i folkskolan och läroverket gör jag några nedslag i den skolmatematiska diskussionen så som den gestaltade sig kring mitten av 1880-talet, med fokus på den första undervisningen i räkning. Jag utgår här från ett mindre antal sammanhängande framställningar av skolmatematikens mål, dess problem och hur dessa problem borde övervinnas. Jag redovisar även möten mellan olika ståndpunkter, framför allt mellan ståndpunkter företrädda av en äldre generation och ståndpunkter företrädda av den nya generation som tog plats på scenen just under 1880-talet. Undervisningens praktiska förutsättningar löper som en röd tråd genom såväl de uppsatser genom vilka enskilda individer presenterade sin syn på

[1] Edlund, *Underdånigt betänkande*, s. 43. Se även Petrini, ”Matematiken i skolan”.

skolmatematiken, som genom de stundtals animerade diskussionerna rörande, framför allt, hur en ändamålsenlig lärobok borde vara utformad.

Under den period som står i fokus för detta kapitel skedde ett paradigmskifte rörande läroböckernas utformning – i synnerhet rörande läroböcker i aritmetik. I kapitlets avslutande del beskriver jag detta nya läroboksparadigm, samt visar hur det i relativt oförändrad form kom att ligga fast fram till mitten av 1900-talet.

Skolmatematikens behov av tid

> *Varför är matematik ett av de ämnen i skolan som tar mest tid i anspråk?* Är det svårt att lära sig matematik? Vad är det eleverna lär sig under skolans matematiklektioner? Varför tas det för givet att det tar lång tid att lära sig matematik?

Min förklaring är enkel: skolmatematiken skapades för att ta tid. Mer specifikt tog undervisningspraktikerna form under inflytande av ett krav på att de skulle ta elevernas tid i anspråk. Detta krav gavs en rad klara uttryck under andra halvan av 1800-talet, något olika i läroverket respektive folkskolan. Redan ett par decennier in på 1900-talet kom emellertid denna anledning till undervisningspraktikernas utformning att glömmas bort. I linje med bildningstänkandet projicerades de praktiska omständigheternas krav på matematikens insida, så att det framstod som om det vore matematiken själv som tog elevernas tid i anspråk. Detta krav hänvisar man till även i dagens skolmatematiska diskussion.

Folkskolan

Folkskolan var, som vi såg i kapitel 9, från början huvudsakligen ett instrument för att, beroende på hur man väljer att uttrycka det, sysselsätta, bemästra, disciplinera eller helt enkelt ordna en strukturerad verksamhet för barn från samhällets lägre skikt.[2] Ordning var därför folkskolans främsta problem. Växelundervisningssystemet utgjorde ett av flera verktyg för att

[2] Jmf. *Underdånigt betänkande och förslag till Ordnande af Folkundervisningen i vissa städer* (1895), s. 63, citerad i Andersson, *Läsning och skrivning*, s. 72 (min kursivering): "Sedan fullständig klassindelning införts i folkskolorna, kan numera ett stort antal barn redan ganska lång tid före det år, under hvilket de fylla fjorton år, afgå från skolan. […] Att redan så tidigt fritaga barnen från skolans ledning och vård medför emellertid, särskildt i de större städerna, stora vådor för barnens sedliga utveckling, och skolans viktigaste uppgift, att genom sin uppfostrande verksamhet stärka och utveckla barnens sedliga egenskaper, förfelas ej sällan, då barnen vid så tidig ålder och under just de år, då de kanske mest äro i behof af skolans uppfostrande verksamhet, undandragas dess ledning, *helst som de flesta vid denna tidiga ålder ej kunna erhålla arbetsanställning.*"

åstadkomma denna ordning. Pestalozzis bildningsidéer ett annat. I förhållande till denna övergripande ordningsproblematik spelade de matematiska studierna en tämligen underordnad roll – även om de intog en central plats i Pestalozzis bildningstänkande.

Under 1860- och 1870-talet skedde ett skifte mellan två olika principer för ordningsskapande. Fram till 1850-talet hade växelundervisningssystemet utgjort den självklara utgångspunkten för anordnandet av folkundervisning. Från 1860-talet kom folkundervisningens dominerande talesmän att istället framhålla ”klassundervisning” som idealet att sträva mot. En nyckelroll i övergången mellan de två principerna brukar tillskrivas Torsten Rudenschiölds uppsats *Den svenska folkskolans praktiska ordnande* som publicerades 1856.[3] Jag skall därför säga några ord om denna uppsats och dess relation till undervisningen i räkning.

Torsten Rudenschiölds *Den svenska folkskolans praktiska ordnande* (1856)

Rudenschiöld utgick från två frågor: hur folkundervisningen skulle kunna komma alla till del och hur den borde utformas. Vad gäller skolmatematiken kan nämnas att han tog upp huvudräkning och ”[s]ifferräkning på tavla” som i och för sig nödvändiga ämnen, men med kommentaren att dessa ämnen knappast kunde sägas vara ”strängt taget” för alla nödvändiga.[4] Rudenschiöld tog avstamp i en skarp kritik mot växelundervisningsmetoden vilken han beskrev på följande sätt:

> Man fördelar barnen i små flockar eller Tabellcirklar, bland hvilka Läraren fruktlöst förspiller sin personliga kraft på tillsyn och undervisning åt några få barn i sender, och detta under ett tankestörande sorl – om icke skrik – från den öfriga skaran, som är öfverlemnad åt ledningen af i allmänhet vanmäktiga Monitörer.[5]

Det skall dock sägas att denna beskrivning gällde metodens användning i folkskolan, och att kritiken därmed egentligen inte riktades mot själva metodens särdrag – att barnen fick undervisa varandra – utan hur denna metod i praktiken kommit att tillämpas. Tvärtom gav faktiskt Rudenschiöld i sin uppsats exempel på hur metoden kunde användas med stor framgång. I en fotnot skriver han:

> Jag har en gång lyckats förmå den rikaste bonden i en Socken, en f. d. Riksdagsman, att medgifva sin villiga 12-åriga dotter att åt en närboende, utfattig, men äfven om sina barn ytterst vårdslös herregårstorpares 13-årige son under ett par korta stunder om dagen

[3] Torsten Rudenschöld, *Svenska folkskolans praktiska ordnande*, Götheborg, 1856. Se även Hertha Hanson, *J. H. Ekendal och den nya folkskolan*, Malmö, 1984.
[4] Rudenschöld, *Svenska folkskolans praktiska ordnande*, s. 2.
[5] Ibid, s. 24.

> gifva undervisning uti innanläsning, hvilket af flickan verkställdes med det besked, att gossen, ifrån att alls icke kunna läsa, hvarföre han ock ofta led mycken smälek, ej blott inom kort lärde sig sjelf läsa, utan sedan i glädjen häröfver blev en villig undervisare för andra. Barnen sjelfva äro för denna vexelundervisning i allmänhet mycket villige.[6]

I och med att Rudenschiöld tillmätte lärarens roll en så stor betydelse i undervisningen, ligger det nära till hands att se hans uppsats som knuten till den framväxande lärarkårens anspråk.[7] Bland annat ovanstående citat gör denna tolkning något mer problematisk. Än mer problematisk blir den av att Rudenschiöld också uttalar sig mycket positivt angående hemundervisning. Han skriver att man i folkskolorna ”långt ifrån sällan” hittar:

> lärjungar af ända till 12 års ålder, som efter flera års skolgång nästan helt och hållet sakna innanläsningskunskap. Deremot finner man mycket ofta i små fribildade Stugu-skolor med få lärjungar under en oexaminerad s.k. Läsmor, att barnen allmänneligen ända ned till 7-stundom 6-åringarne kunna läsa väl innantill, och att de detta lärt på mycket kort tid, jemfördt med förhållandet i de allmänna Folkskolorna.[8]

Tveklöst kom Rudenschiölds uppsats att bidra till den process genom vilken endast lärare ansågs lämpliga att undervisa. Inte desto mindre kan man här se att Rudenschiöld kanske inte skulle ställt sig entydigt positiv till denna rörelse. Klart är likväl att Rudenschiöld menade att undervisningen i folkskolan borde organiseras på ett sådant sätt att undervisningen huvudsakligen bedrevs av lärare.

Rudenschiöld hade många förslag rörande undervisning som vi idag känner igen och tar för givna. När det gäller läxförhör föreslår han att läraren inte skall förhöra *alla* elever, eftersom detta tar för lång tid. Istället skall man slumpvis välja ut några som får läsa läxan: ”Ovissheten om hvilken, som för dagen skall blifva hörd och i hvilken del af lexan, eggar alla att öfverläsa allt, för at icke misshaga en älskad lärare, som tillika är känd för att eftertryckligt, men rättvist straffa sjelfvsvåld”. Och vidare: ”Under lexors hörande, en i sender, skall i skolan vara tyst; ämnet får deraf högtid, och kamraternas deltagande i hörandet stegrar eggelsen af förrättningen”.[9] En tydlig formulering är följande:

---

[6] Ibid, s. 22.
[7] Frågan om folkskollärarnas ställning var ett hett diskussionsämne under andra halvan av 1800-talet. Aftonbladet riktade 1852 uppmaningen till landets folkskollärare att ”icke begära att monopolisera undervisningen för sig, och ej anse sig såsom ett nytt privilegieradt presterskap bredvid det gamla” (citatet har jag hämtat från Hanson, *J. H. Ekendal och den nya folkskolan*, s. 43).
[8] Rudenschöld, *Svenska folkskolans praktiska ordnande*, s. 25.
[9] Ibid, s. 33.

> Till en god läsordning för Folkskolan hörer nemligen efter min tanke bland annat, att under lectionerna i skolan icke får höras mer än ett utaf tvenne ljud: det ena är lärarens föredrag eller frågor, och det andra är lärjungarnes svar, stundom enstaka och stundom samfällt.[10]

En central fråga blev dock hur läraren skulle kunna få de elever som inte stod i fokus för han omedelbara uppmärksamhet att hålla sig så lugna och tysta som Rudenschiöld beskriver att de borde vara. För detta ändamål föreslår Rudenschiöld *tysta övningar.*

De tysta övningarna

De tysta övningarnas kännetecken är att deras främsta syfte är att se till att de barn som ägnar sig åt dessa övningar är tysta. I diskussionen förekommer givetvis en rad andra argument – om inte annat avslöjar dock själva namnet övningarnas band till sin praktiska funktion. Rudenschiöld skriver att de som inte kan ta del av lärarens omedelbara undervisning,

> turvis sysselsättas med tysta öfningar, såsom t.ex. i skrifning, för att icke störa den tystnad i skolan, som oeftergifligen måste äskas, för att lärarens till en skara af lärjungar på en gång ställda ord också måtte unna tilltvinga sig allas uppmärksamhet.[11]

Man bör här komma ihåg att även om Rudenschiöld införde så kallad klassundervisning, en term som känns välbekant, så var det inte fråga om samma typ av klasser som idag. I folkskolan var det långt in på 1900-talet vanligt att en ensam lärare hade att undervisa en mängd elever som var olika gamla och hade ”kommit olika långt” i de läroböcker som användes. Det var framför allt av denna anledning som de tysta övningarna var behövliga. Fortfarande var det nödvändigt att strukturera undervisningen med hänsyn till ett antal mindre grupper av elever som kunde göra samma sak. De tysta övningarna utgjorde därmed en tämligen direkt ersättning av monitörernas roll i undervisningen.

Jag skall nu redogöra för en del av den argumentation som föregick de tysta övningarnas införande i folkskolan. Särskilt fokus ägnar jag åt växelspelet mellan vad man kan se som argument på två olika nivåer: den ena knuten till undervisningspraktiken, den andra knuten till undervisningens högre mål. Detta växelspel sprider inte bara ljus över de tysta övningarna i sig – det utgör också en tydlig illustration av en av mina viktigaste teoretiska poänger rörande relationen mellan skolan och matematiken, nämligen att de högre målen (knutna till matematiken) å ena sidan gör en dygd av nödvändigheten, men att de å den andra aldrig helt lyckas dölja praktikens egentliga ”irrationella” orsak, i det här fallet nödvändigheten av att hålla eleverna tysta.

[10] Ibid, s. 34–35.
[11] Ibid, s. 35.

Det finns här en spänning mellan de två tolkningsnivåerna som jag menar är typisk. Utifrån vårt distanserade historiska perspektiv framgår inte vad diskutanterna egentligen *trodde*. Detta menar jag skall tolkas som ett symptom på att frågan om deras tro inte har något entydigt svar.

En artikel i *Folkskolans Vän* 1872 tar upp den då naturliga frågan: ”Bör läraren aldrig använda något af barnen till hjelp vid undervisningen?”[12] Svaret som ges är att man visst kan ”använda äldre barn till biträde vid undervisningen, utan att man derigenom bryter mot gällande lag eller mot pedagogikens regler”.[13] Växelundervisningsmetoden tas här, om än försiktigt, i försvar. Karl Kastman, artikelns författare, konstaterar att man ”ej kunnat begagna sig af nog starka uttryck vid fördömandet af vexelundervisnings-metoden” och att det blivit något av ett ”axiom, att läraren i folkskolan vi sin undervisning ej skulle få använda något af barnen till hjelp.” Växelundervisningen fick bära hela skulden för ”folkskolornas släta tillstånd under den tid, då detta förfaringssätt följdes.”[14] Vad man då emellertid förbisåg, menar Kastman, var metodens goda sidor. Nämligen att ”genom att lära andra lär man sig sjelf”. Att se det som ett ”pedagogiskt missgrepp” att låta barn undervisa – att man därigenom skulle ta tid från dessa barn, så att de skulle ”hindras från at göra så stora framsteg, som de annars skulle hafva gjort” – är därför, menar han, inte riktigt. Kastman tillbakavisar också två andra invändningar mot att använda barn i undervisningen: först att detta alltid leder till oordning. Det behöver det inte göra, skriver han: ”Äro barnen vana vid ordning och tukt, fullgöra de nog ordentligt, hvad dem förelägges, äfven om deras närmast upplysningsman är en äldre kamrat”. För det andra åsikten att undervisning förmedlad av barn ”ej kan var af någon synnerligt värde; ty dessa sakna ju tillräckliga insigter och nödig erfarenhet”. Kastman erkänner detta, men menar att barnen inte alls skall *ersätta* läraren, utan snarare fungera som ”en slags uppsyningsmän, hvilka skola se till, att de mindre barnen riktigt lösa de uppgifter som gifvas dem, för at inöfva något förut af läraren meddeladt och förklaradt”.[15] I artikelns avslutning blir det tydligt att den användning av lärjungar för undervisning som Kastman tänker sig, ligger nära de tysta övningarnas princip. Han skriver:

> Har läraren genomgått, huru tal af ett visst slag böra behandlas, och han sedan vill låta barnen inöfva detta till full färdighet; kan han gifva dem till uppgift att uträkna en visst mängd sådana tal, hemtade ur deras exempelsamlingar, samt uppdraga ett äldre barn att se till dels att de flitigt arbeta, des om att de rätt löst sina uppgifter. Under tiden kan läraren ostördt egna sig åt de öfriga afdelningarna. [16]

[12] Karl Kastman, ”Bör läraren aldrig använda något af barnen till hjelp vid undervisningen?”, *Tidning för Folkskolan*, 1872, s. 118.
[13] Växelundervisningsmetoden hade förbjudits 1864, och detta utgör artikelns utgångspunkt.
[14] Kastman, ”Bör läraren aldrig använda något af barnen till hjelp vid undervisningen?”, s. 118.
[15] Ibid, s. 119.
[16] Ibid, s. 120.

Artikeln är skriven i ett övergångsskede, mellan användande av växelundervisningsmetoden, och en klassundervisning som de tysta övningarna möjliggjorde. Vad man inte får glömma är att det är en konst att utforma tysta övningar. Som vi skall se kretsade diskussionen under 1880-talet bland annat kring hur väl läroboksförfattare fått sina uppgifter att motsvara de tysta övningarnas syfte. Kastman låter de tysta övningarna få ett sorts stödhjul i de äldre övervakande lärjungarna.

Fem år senare konstaterar Kastman, angående ett läraremöte, att många där ”uttalade [...] den erfarenheten, att dessa öfningar i allmänhet ej burit några goda frukter”. Kastman ser orsaken till detta i att dessa ”ej veta att rätt använda dem”.[17] I artikeln förklarar han hur detta bör gå till. Först ger han dock en rad argument för varför tysta övningar bör användas.

Man kan här notera att Kastman i sina argument kombinerar hänvisningar till skolmatematiken högre mål (bildning och praktisk färdighet), med hänvisningar till övningarnas praktiska funktion för att strukturera undervisningspraktiken. Först säger han att det bara är genom dessa övningar som barnen lär sig ”fritt och sjelfständigt förfoga öfver vad de inhämtat”. Han talar sedan om att övandet leder till att barnen ”ännu klarar uppfatta, ännu fastare i minnet inpregla hvad läraren meddelat dem”. Han tar upp fördelen att övningarna den bästa tänkbara kontroll på om barnen lärt sig vad de skall, och slutligen att den typ av självverksamhet som tysta övningarna innebär är karaktärsutbildande – de fyller, menar Kastman, en uppfostrande funktion. Sedan följer dock ett argumentet som tycks överskugga de andra:

> Slutligen är det ju endast genom användandet af de så kallade tysta öfningarna, som det blir möjligt för läraren att samtidigt undervisa flere afdelningar af barn, som ega olika kunskapsmått.[18]

Kastman konstaterar att tysta övningar av denna anledning helt enkelt är *nödvändiga* både i småskolan och i folkskolan, och i alla undervisningsämnen, och går sedan vidare med förslag till hur dessa övningar kan utformas. Mot bakgrund av detta sista argument är det svårt att se de första ”riktiga” argumenten som annat än ett försök att få denna praktiska nödvändighet att framstå i mer positiv dager.

Vad gäller de tysta övningarnas konkreta utformning föreslår Kastman för småskolematematikens del att man ”gifver barnen till uppgift att skrifva siffror; att uppskrifva siffror i viss ordningsföljd; att uträkna små tal”.[19] I folkskolan kan man, skriver han, låta lärjungarna ”på sina taflor uträkna exempel ur exempelsamlingarna”.[20] Kastman avslutar med att ge anvisningar rörande hur de tysta övningarna bör organiseras. Framför allt är det, menar

---

[17] Karl Kastman, ”De tysta öfningarna i skolan”, *Tidning för Folkskolan*, 1877, s. 229.
[18] Ibid, s. 230.
[19] Ibid, s. 231.
[20] Ibid, s. 233.

han, viktigt att de anordnas enligt en förutbestämd plan, snarare än att de anordnas efter lärarens godtycke, vilket med nödvändighet leder till ”oregelmässighet och planlöshet” som då ”förhindra undervisningen från att bära de goda frukter, som hon annars skulle alstra af sig”.[21] Man måste i förväg precisera vad barnen skall göra och sedan se till att de gör just detta och inget annat. Övningarna måste vara avpassade så att det inte är för svåra, och därför ”förtager [barnens] lust att lära”. Slutligen är det nödvändigt att ”en god disciplin är rådande” för att de tysta övningarna skall bli fruktbringande: ”Barnen böra veta och känna, att lärarens ögon alltid hvila på dem äfven då, när han ej omedelbart undervisar dem”. Detta inte minst för att förhindra att de skriver av varandra – ”de måste lära att reda sig sjelfva, om de skola blifva sjelfständiga”.[22]

Fem år senare tar Kastman upp frågan om de tysta övningarna igen.[23] I denna artikel, från 1877, framgår att en invändning mot de tysta övningarna är att de leder till ”mekanik”. Att låta barnen arbeta själva var nämligen inget nytt på 1870-talet; snarare betraktades denna metodik som något man äntligen lagt bakom sig. Frågan var hur de tysta övningarna skiljde sig från gångna tiders döda minnesläsning och ofruktbara mekanism. Kastman argumenterar här på ett välbekant sätt i förhållande till det förflutna. Han skriver att problemet med gångna tiders tysta räknande är att man låtit barnen arbeta med uppgifter de inte förstod – vilket ledde till mekanik. Idag är, fortsätter han, problemet istället det motsatta: att läraren ”rödjer bort alla hinder, på det att barnen måtte kunna gå framåt lugnt och beqvämt, utan ansträngning och möda”, vilket leder till ”tankekraftens förslappning”. Det rätta ligger, menar Kastman, ”i midten”:

> att det sålunda är för barnens utbildning till hurtiga, omdömesgoda, och dugande menniskor fördelaktigast, om de först under läraren handledning få lära att lösa uppgifterna och sedan på egen hand få öfva sig med lösning af likartade, till dess de vunnit fullgod insigt och färdighet derutinnan.[24]

Som många gånger förut, kan vi här se hur den rätta medelvägen hotas av mekanik från flera håll: dels i barnens arbete med det allt för lätta, som kan göras tanklöst, dels i barnens arbete med det allt för svåra, som oförstått måste läras utantill. Kastman föreslår artikeln, vad gäller småskolans räkneundervisning, att barnen ”sysselsättas med skrifning av siffror i ordningsföljd, fram- och baklänges [...] att uppskrifva en mängd siffror på det sättet, att man hoppar öfver hvar annan, hvar tredje o. d.”.[25] Detta förutom att

[21] Ibid, s. 233–234.
[22] Ibid, s. 234.
[23] Karl Kastman, ”De tysta öfningarna i Folkskolan”, *Tidning för Folkskolan*, 1877.
[24] Ibid, s. 73.
[25] Ibid, s. 74.

räkna enkla uppgifter, vilket var den övning som kom att stå i centrum för folkskolans tysta övningar.

Två år senare, 1879, tycks diskussionen rörande de tysta övningarna fortfarande ha varit i allra högsta grad levande. Kastman har mött motstånd under ytterligare något lärarmöte och är nu irriterad över att de tysta övningarna inte accepteras.[26] De har ett fel, skriver han, och detta är, "att de äro något nytt". Det är därför de stöter på motstånd. Men det torde inte desto mindre, skriver han, vara "något djerft att uttala förkastelsedomen öfver dem, innan de ännu hafva visat sig vara olämpliga, ty att en eller annan lärare ej med fördel kunnat begagna dem, bevisar ingenting".[27] Kastman knyter igen problemen till bristande systematik. Tysta övningar fungerar inte, skriver han, utan noggrann planering. Tydligen har kritik mot de tysta övningarna nu vävts samman med en mer allmän kritik mot seminarierna. Det har, skriver Kastman, "antydts att läraren, sedan han kommit uti tjenstgöring vid skolan, ej behöfver synnerligen fästa sig vid hvad vid seminerierna inhemtats, enär detta ej lämpar sig i folkskolan". Ett sådant synsätt tyckte givetvis Kastman, som var seminarielärare, var mycket olyckligt. Dels bör, skriver han, seminarierna och folkskolan stå i "nära samband med hvarandra". Till detta kommer att "Seminarierna hafva bättre tillfälle än den enskilde läraren att följa med pedagogikens och metodikens utveckling", och av denna anledning borde läraren "tid efter annan göra sig reda för de åsigter, som nu der äro rådande; de förfaringssätt, som nu der följas".[28] Och, med andra ord, inte vara så kritiska till de tysta övningarna.

Det står emellertid klart att många lärare misslyckats med att få de tysta övningarna att fungera. Detta knyter Kastman till folkskolans övergripande problem att åstadkomma *ordning*. För att nå detta mål borde man inte, skriver han, strida inbördes, utan arbeta gemensamt. Kastman identifierar sedan barnens föräldrar som folkskolans huvudsakliga fiende, den viktigaste orsaken till bristande ordning:

> Föräldrarna hafva menat sig haft rätten att sätta in sina barn i skolan, när de behagat; att låta dem gå der, då det synts dem för godt; samt att taga dem ur skolan, när de velat. Hvem vet ej huru mycket lärarens arbete härigenom försvårats och förtyngts?[29]

Kastman tecknar sedan en bild där systematisk organisation och noga uttänkta undervisningsplaner fungerar som ett sammanbindande kitt för folkskollärarna, vilket ställer dem enade och effektiva i förhållande till den yttre fienden. Och en del av detta är, givetvis, planerna för de tysta

[26] Motståndet mot de tysta övningarna diskuteras för övrigt av Andersson, *Läsning och skrivning*, s. 79–80 i anslutning till hennes redogörelse för undervisningen i skrivning.
[27] Karl Kastman, "Ytterligare om 'de tysta öfningarna'", *Tidning för Folkskolan*, 1879, s. 209.
[28] Ibid, s. 211.
[29] Ibid.

övningarna. Sedan följer liknande argument som tidigare, med samma slutkläm:

> Slutligen – vi upprepa det ännu en gång – kunna vi ej förstå, hur man kan undvara de tysta övningarna, när endast en lärare skall samtidigtundervisa barn, som stå på olika utvecklingsgrad och hafva inhemtat olika kunskapsmått, så vidt ej alldeles detsamma skall genomgås det ena året efter det andra.[30]

Denna artikel av Kastman genererade ett svar från folkskolläraren Sven Kellin, i vilket han bland annat gjorde lite reklam för ett system han utformat genom vilket elevernas uträkningar kunde kontrolleras utan användande av särskilt facit.[31] Kellins artikel tyder på att de tysta övningarna 1879 i stor utsträckning hade accepterats inom folkskollärarkåren. De föreskrevs i den normalplan för folkskolan som kom ut 1878, och Kellin menar att de påyrkades ”vid våra skolmöten”.[32]

Nästan ett decennium senare, 1886, påpekar signaturen ”hgm” att tysta övningar inte används i den utsträckning som de borde.[33] Även denna artikel resulterade i ett svar, innehållandes reklam för ett praktiskt hjälpmedel, denna gång en sorts ”räknestavar” utformade av en viss P. Hagström, vilka tycks ha blivit synnerligen populära under de följande decennierna.[34] Vi får reda på att det ofta är ”förenadt med mycken tidspillan att lemna barnen i småskolans och folkskolans första årsklass uppgifter till tyst öfning, om näml. uppgifterna skola uppskrivas å svarta taflan”.[35] I en annan artikel, författad av folkskolläraren L. C. Lindblom, anförs även som ett problem att lärarna, när de skriver uppgifter på tavlan, ”icke alltid [väljer] de för tillfället lämpligaste exemplen”, samt att barnen ofta saknar pengar för att köpa läroböcker.[36] Hagströms räknestavar var utformade för att lösa dessa problem.

I de ovan refererade artiklarna tecknas en bild av de tysta övningarna som ledandes till två väsensskilda typer av mål: dels högre mål – vilka känns igen från den skolmatematiska diskussionen i allmänhet. Tydligt är emellertid att ett andra, praktiskt mål, utgör övningarnas huvudsakliga motivering.

---

[30] Ibid, s. 213.

[31] Sven O. Kellin, ”Ett strå till frågan om 'de tysta öfningarne'”, *Tidning för Folkskolan*, 1879. Angående hans räkneböcker och system, se Sven O. Kellin, *Den omutlige monitören: gm hvilken läraren kontrollerar utan facitbok uträkningen af Räknenötter*, Höör, 1878.

[32] Kellin, ”Ett strå till frågan om 'de tysta öfningarne'”, s. 282.

[33] ”Hgm.”, ”Om tysta öfningar i räkning (inom talområdet 1–1 000)”, *Folkskolans vän*, nr 21, 1886.

[34] Se P. Hagström, *Nyckel till Hagströms räknestafvar*, Trelleborg, 1885.

[35] Hgm., ”Om tysta öfningar i räkning (inom talområdet 1–1 000)”, *Folkskolans vän*, nr 21, 1886, s. 5.

[36] L. C. Lindblom, ”Räknestafvar af P. Hagström. Utgifvarens förlag, Kyrkoköpinge, Trelleborg.”, *Folkskolans vän*, nr 7, 1886.

Nödvändigheten av att hålla eleverna tysta satte ramarna för hur övningarna kunde utformas.[37]

Läroverket

I tidigare kapitel har det framgått att man ända sedan 1700-talet, vad gäller de matematiska studierna, ofta betonat att deras syfte inte är att leda till ett så stort matematiskt kunnande som möjligt, utan att deras första syfte är att eleverna, genom själva arbetet med matematiken, på olika sätt skall formas och bildas. Denna syn på matematiken låg, som jag nämnde i kapitel 9 ovan, till grund för Pestalozzis bildningstänkande, inom vilket inhämtande av kunskaper framstod som högst oväsentligt och i det närmast något farligt som måste undvikas. Vad gäller läroverket kom denna ståndpunkt till exempel till uttryck i 1820 års läroverksstadga, vilken var uppenbart inspirerad av Pestalozzis idéer.[38]

Det ligger nära till hands att betrakta denna syn på matematiken som ett uttryck för en viss ambivalens i förhållande till matematiken som vetenskap. Uppenbarligen var det ju inte det vetenskapliga vetandet man placerade i undervisningens centrum – ett vetande som givetvis ständigt förändrades – utan snarare en sorts tidlös essens vilken man menade fanns förborgad i matematiken. Jag skall här visa hur denna ambivalens, helt i linje med det ovanstående resonemanget rörande folkskolan, kan knytas till en ambivalens rörande de matematiska studiernas praktiska funktion i läroverket. Låt mig utgå från var Henrik Petrini skrev 1905, när han blickade tillbaka på matematikens ställning i läroverket under 1800-talet:

> För att slippa rötäggen i klassen inrättade man för deras skull i mediet af förra århundradet en speciell linje, reallinjen, hvars hufvudsakliga särmärke var: ingen latinläsning. Men för att eleverna ej skulle slå dank under den tid kamraterna läste latin, satte man dem i brist på annat att räkna. Å andra sidan kunde man nu peka på de många matematiktimmarna och säga, att reallinjen var afsedd för dem som vilja välja den praktiska banan; detta lät ju bättre.[39]

Det betänkande som föregick 1859 års stadga ger faktiskt visst stöd åt det Petrini påstår. För det första står det klart att matematik inte stod högst på

[37] Det problem som de tysta övningarna löser är i allra högsta grad aktuellt även idag. I artikeln ”Roligt + Lärande = Sant”, *Göteborgsposten*, 16 oktober 2008 kan man läsa följande: ”Det tråkigaste med skolan är att det är så stökigt i klassen, tycker [en av eleverna som intervjuas] och de andra håller med. De tror att stöket beror på att eleverna i klassen befinner sig på väldigt skilda nivåer vilket gör det svårt för läraren att hinna med. –När några behöver hjälp och får vänta så börjar de prata istället. Det skulle behövas två lärare i klassen […].”

[38] *Anvisningar och råd till lärare, om sättet att verkställa hvad Kongl.: Maj:t i nåder uti skolordningen af den 16 Dec. 1820 stadgat och anbefallt. Bihang till uppfostrings-comiteens underdåniga förslag till skol-lag*, Stockholm, 1821.

[39] Petrini, ”Matematiken i skolan”.

utredarnas dagordning. Man skriver att man ”vid uppgörandet af planen för undervisningen i detta ämne”, varit tvungen att ta hänsyn till en rad omständigheter, genom vilka ”uppgiften blifvit i ej ringa grad försvårad”. Tydligen har det varit svårt att avsätta tid till matematiken på grund av ”andra ämnens behof” – behov som uppenbarligen ansågs viktigare än matematikens.[40]

Det är tydligt att det vid denna tidpunkt var tämligen oklart hur den nya reallinjen skulle utformas. Klart var att den inte skulle innehålla klassiska språk. Men sedan? ”Högst ofullkomligt skulle likväl det härmed afsedda ändamålet vinnas”, skriver man ”om den reala undervisningen skulle förblifva endast, för att så säga, en negativ sida af den klassiska och icke tillika utveckla en sjelfständig, för densamma egendomlig, positiv karakter”. Reallinjen hade dittills definierats genom frånvaron av språk – vad den behöver, skriver man, är en medelpunkt, för om man ”från en med följdriktighet och sammanhang uppgjord undervisningsplan borttager just de ämnen, som vid dess uppställande och utbildning tjenat till medelpunkt, kan det återstående föga egna sig att utgöra ett tillfredsställande helt för sig”.[41] Vad som krävs är att man ger ”åt dessa lärjungars undervisning en öfvervägande styrka i andra ämnen”, vilka då kan fungera som denna linjes medelpunkt. Det reala ämnet framför andra blev givetvis matematiken. När matematiken tog plats i läroverket var det alltså först och främst för att fylla ut den lucka som orsakats av att argumenten mot de klassiska språken slutligen fått genomslag. En uppenbarligen oönskad konsekvens av 1856 års stadga hade blivit att lärjungar som valt bort till exempel latinet ställdes sysslolösa under de timmar då det stod latin på schemat. Matematiken tog därmed plats som en utfyllnad av lärjungarnas tid.

Till saken hör att det fanns en skarp argumentation mot hemläxor i matematik – med hänvisning till risken för ”överansträngning”. Man menade att det ”vid bibringandet af detta läroämne [var] ännu mera nödigt än i andra fall, att göra större afseende på grundligheten och säkerheten af de inhemtade kunskaperna, än på deras omfattning”, eftersom:

> Den inre styrkan af en lärjunges mathematiska kunskaper ersätter för honom i ännu högre grad saknaden af en vidsträckt kurs, än fallet är på andra undervisningsfält, och en blott minneskunskap är i mathematiken af ytterst ringa värde. Vidare har Komitén, vid uppställningen af skolans fordringar inom detta ämne, liksom vid de öfriga, bordt omsorgsfullt tillse, att icke omfånget vidgades derhän, att öfveransträngning uppstode för lärjungarne.[42]

[40] Edlund, *Underdånigt betänkande*, s. 31.
[41] Ibid, s. 43.
[42] Ibid, s. 32.

De matematiska studierna skulle med andra ord fylla den tid som de med hänsyn tagen till övriga ämnen fått sig anvisad – varken mer eller mindre.

Denna syn på de matematiska studierna kom till uttryck vid ett rektorsmöte 1869, vilket förtjänar uppmärksamhet på grund av att det resulterade i en ilsken och belysande kommentar av E. G. Björling – författaren till den lärobok i algebra som jag berättat om i kapitel 8 ovan. Vad som sades under detta möte ter sig ganska harmlöst. Helt i linje med den gängse diskussionen kring skolmatematik under 1850- och 1860-talet månar man om att på olika sätt underlätta studierna. Vi känner igen argumenten: om lärjungen själv får läsa sig till hur uträkningarna skall göras, det vill säga lära sig regler ur en bok, blir den därpå följande övningen ”mekanisk”.[43] Istället måste *läraren*, långsamt och noga gå igenom allt nytt. Av denna anledning behövs knappast några ”hemlexor” och knappast alls någon räknebok över huvud taget – utom ”till hjelp för de mindre begåfvade”. Undervisningen skall, säger man, ”gå från det konkreta till det abstrakta” och ”vid den geometriska undervisningen borde läraren så leda ynglingarna, att de likasom af sig sjelfva efterhand framtaga satserna”. Över huvud taget upprepar man många gånger att matematikstudierna inte bör ta ”ynglingarnas tid för mycket i anspråk”, utan att den borde begränsas till övningar ”på lärorummet och meddelad lämplig handledning”. Övningar (i motsats till lärande av matematisk teori) är desto mer berättigade och nödvändiga, tilläger man, på grund av de ”vid afgångsexamen nu gällande fordringarna” – ett argument som för övrigt skulle få allt större betydelse under följande decennier.[44]

Björling tycks ha blivit rasande över detta resonemang. Den artikel där han kommenterar rektorsmötet, publicerad i *Pedagogisk Tidskrift* 1869, är så genomdränkt av sarkasm att det många gånger är svårt att förstå vad det är vad han vill ha sagt. I en not efter artikeln skriver tidskriftens redaktion, begripligt nog, att de ”aldrig kunde föreställa sig” att deras lilla referat från rektorsmötet skulle resultera i denna våldsamma reaktion.[45] Björling motiverar sitt inlägg med att referatet i fråga – vilket enligt honom bör betraktas som en redogörelse för ”de församlade rektorernas yttranden om sina erfarenheter och åsigter” – förmodligen inte desto mindre riskerar att tolkas som ”anvisningar och råd”, något som ”nödgar honom” att ingripa. Han ger sedan en kort beskrivning av diskussionens bakgrund. 1856 års läroverksstadga innebar, skriver han, en ”betydlig förhöjning” av läroverkets matematikkurs.[46] Syftet med denna var ”som ju hvarje sakkunnig vet”, att ge Sverige en ”ståndpunkt i ämnet någorlunda jemnhög med den, som motsvarande

[43] ”Rektors-mötet 1868”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1868.
[44] Ibid, s. 7.
[45] E. G. Björling, ”Några reflexioner, beträffande elementarundervisningen i mathematik, i anledning af den i Bihang till paedagogisk tidskrift intagna berättelsen om Rektorsmötet 1868”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1869, s. 70.
[46] Ibid, s. 60.

läroverk i Frankrike och Tyskland redan länge hade innehaft".[47] Utvidgningen av matematikstudiet resulterade emellertid i "ett i sanning kompakt motstånd". Mot de "sakkunniga" stod, skriver Björling, en väldig falang av dem "som fostrade af den gamla skolan, måste finna de nya fordringarna alltför öfverdrifna, ör att icke säga rentaf orimliga". Faktum kvarstod dock; det nya matematiska pensat låg fast, och "den dag som i dag är", skriver Björling, "stå de qvar dessa förhöjda fordringar, med några modifikationer allenast".[48]

Han kommer sedan till sin poäng. Den hänger ihop med det faktum att man brukar argumentera för matematik med hänvisning till två olika mål: "både [att] utveckla själsförmögenheterna och [att] bereda för samfundslifvets praktiska förhållanden". Det är, menar Björling, det första av dessa mål som gör att man nu betraktar matematiken som ett av läroverkets huvudämnen. Men, skriver han, såg man inte matematiken som ett huvudämne i denna bemärkelse även före 1856? Hans poäng är, att i samma mån som man argumenterar med hänvisning till matematikens formalbildande egenskaper, så framstår det som mindre viktigt *vilken matematik*, *och hur mycket matematik* lärjungarna lär sig. Han går så långt som till att se detta argumenterande som inget annat än ett nytt sorts *motstånd* mot matematiken. "Ty – märk väl –", skriver han,

> om det blott kan lyckas att få *all* uppmärksamhet rätt skarpt fixerad på *den* sidan af saken allenast, så blir ju sedan helt lätt att komma öfverens om obehöfligheten, jag väl ock obehörigheten af lärokursens utsträckning *utöfver dess förra gränser* [...][49]

Detta sätt att argumentera "för" matematiken, hänger, konstaterar Björling sedan, ihop med en viss syn på metodik, vilken också den kom till uttryck vid rektorsmötet, nämligen ett framhållande av den "sokratiska" eller "heuristiska" metodens användande i matematikundervisningen, den metod som, enligt Björling, föreskriver att "ungdomen bör muntligen ledas att *sjelf*, helt oförmärkt, stycke för stycke inventera och konstruera hela sin theori".[50] Björlings uppfattning är klar: matematik är något som kan och måste förklaras, den är, skriver han, ett språk med en bestämd grammatik, som man måste lära sig. Precis som latinets eller grekiskans grammatik kan den givetvis inte upptäckas av lärjungarna själva. Han argumentation ligger här helt i linje med Gullbrand Elowsons, som jag refererade i det förra kapitlet och i avhandlingens inledning.[51] Björlings analys sprider inte bara ljus över den

[47] Ibid. Här kan man för övrigt notera en stor överensstämmelse med A. T. Bergius syn på matematiken, så som den kommer till uttryck i "Om skolundervisningen i Matematik".
[48] Björling, "Några reflexioner, beträffande elementarundervisningen i mathematik, i anledning af den i Bihang till paedagogisk tidskrift intagna berättelsen om Rektorsmötet 1868", s. 61.
[49] Ibid, s. 61–62.
[50] Ibid, s. 62.
[51] Gullbrand Elowsson, "Om den aritmetiska undervisningsmetoden. 1 Diskussion om undervisningen i aritmetik", *Tidskrift för matematik och fysik*, 1868.

heuristiska metodens plats i diskussionen under 1800-talet. Jag tror att Björling här även närmar sig en sanning rörande det mer övergripande bildningstänkandet, nämligen att det innehåller en dold nedvärdering av det som skall ”bildas” – i skolmatematikens fall matematiska begrepp – i förhållande till de bildande praktikerna. Bildningstänkandet har aldrig varit de forskande matematikernas eller de yrkesarbetande ingenjörernas. Istället kan det ses som ett instrument för att (givetvis bortom varje individs medvetna kontroll) skänka skolan en viss autonomi i förhållande till det stoff den på ett plan syftar till att förmedla. I linje med vad jag skrev i kapitel 9 ovan (s. 14ff), kan bildningstänkandet i detta fall ses som ett uttryck för motsättningen mellan å ena sidan ambitionen att leda lärjungarna mot den matematiska vetenskapen och å andra sidan undervisningens *symbolisk-mekaniska* funktion, att hålla eleverna sysselsatta. Bildningstänkandet får den praktiskt nödvändiga sysselsättande praktiken att framstå som *också* meningsfull – eller mer exakt *potentiellt* meningsfull, eftersom praktiken (som jag upprepat många gånger, till exempel s. 14f ovan) aldrig motsvarar de krav som matematikens insida reser.

Offentlig diskussion av undervisningen i räkning

Jag skall nu göra några nedslag i den svenska skolmatematiska diskussionen under 1880-talet, med fokus på undervisningen i räkning. Denna diskussion var, liksom under de föregående decennierna, innehållsrik och kan inte reduceras till något sorts svar på undervisningens praktiska behov. Inte desto mindre kom överväganden rörande just undervisningspraktiken att ta relativt stor plats vid just denna tidpunkt. I synnerhet gäller detta diskussionen knuten till undervisningen i folkskolan.[52]

Talsortsmetoden

En viktig roll i diskussionen spelade en metodisk innovation som gick under namnet ”talsortsmetoden”. Den påminner intressant nog om de idéer inspirerade av läsundervisningen som C. O. Fineman gav uttryck för angående

[52] Det tycks ha varit mot slutet av 1870-talet som diskussionen rörande undervisningsmetoder i folkskolan började ta fart. Jmf. A., ”Återblick”, *Tidning för Folkskolan*, 1878 där man kan läsa: ”Att meningarna begynna bryta sig rörande undervisningen, att man begynner orda hit och dit om metodisk eller icke metodiskt förfaringssätt o. d. anse vi såsom ett synnerligen godt och förhoppningsfullt tecken till en fortgående lifaktighet inom skolan. Det synes oss innebära vittnesbörd derom, att man begynt komma ifrån de många förberedande bestyren för att sätta skolan igång, samt att man börjat få ögonen öppna för det pedagogiska axiomet, att det icke göra detsamma, huru undervisningen bedrifves, utan att det äfven inom detta område, liksom inom hvarje annat verksamhetsfält, gifves ett bättre och ett sämre förfaringssätt: m. e. o. att man fått syn på den vigtiga betydelsen af något slags *metod* vid undervisningen.”

räkneundervisningen i hans växelundervisningssystem. Detta så till vida att man inom talsortsmetoden delade upp talen i (vad man uppfattade som) sina beståndsdelar, till exempel ental, tiotal, hundratal, och så vidare, och lade lärjungarnas förmåga att genomföra och förstå denna uppdelning till grund för undervisningen. Men man gick även längre än så. Genom en sorts generalisering av denna uppdelningsprincip betraktade man även ”benämnda” tal, det vill säga enheter eller sorter, som delar av samma, menade de, enhetliga och logiska system. ”Genom undersökning af talen och talsystemet finner man”, kan man läsa,

> 1) att antalen alltid hänföra sig till någon talsort, 2) att talsorterna alltid ingå åtskilda i talen, och 3) att, när vid talens bildning nya talsorter uppkomma, dessa alltid sammanföras med dylika af samma slag, när sådana förut finnas. Ur dessa förhållanden framgår lagen för talsorterna, och emedan äfven konkreta dekadiska sorter samt andra storheter kunna underordnas under den samma, kan den erhålla följande allmänna formulering: (1) *blott storheter af samma sort kunna sammanläggas, fråndragas eller omedelbart jemföras*. Såsom en omedelbar följdsats häraf och af undersökningen om sorters förhållande och förvandling framgår, att (2) *storheter af samma klass* (se terminologien) *måste först förvandlas till storheter af samma sort, innan de kunna behandlas enligt den först nämnda lagen*. I närmaste samband härmed står ock följande för undervisningen vigtiga grundsats, hvilken bör tillämpas så ofta det är möjligt, nämligen (3): *i talen behandlas hvarje talsort för sig*, eller med andra ord: talen behandlas uppdelade i talsorter.[53]

Det ligger mycket nära till hands att betrakta denna metod som en följd av ett specifikt skolmatematiskt sätt att förhålla sig till räknandets praktik. Man kan nästan ordagrant i citatet ovan känna igen räknelärornas anvisningar för hantering av sorter, det vill säga, att lika sorter skulle ställas upp ovanför varandra och hanteras för sig själv, liksom att man måste förvandla alla tal till ”samma sort” innan de kan behandlas. Till detta kommer inspirationen från läsundervisningens sönderplockande av orden. Avgörande inflytande hade säkert även att det metriska systemet var på stark frammarsch, sedan länge i Europa, sedan relativt nyligen i Sverige.[54] Genom talsortsmetoden fick en rad aspekter av den skolmatematiska undervisningspraktiken en teoretisk förankring, väsensskild från såväl den vetenskapliga matematiken som matematikens tekniska tillämpningar.

Tämligen fascinerande är emellertid att talsortsmetodiken, samtidigt som den sammanfattade en rad praktiska aspekter av den skolmatematiska

---

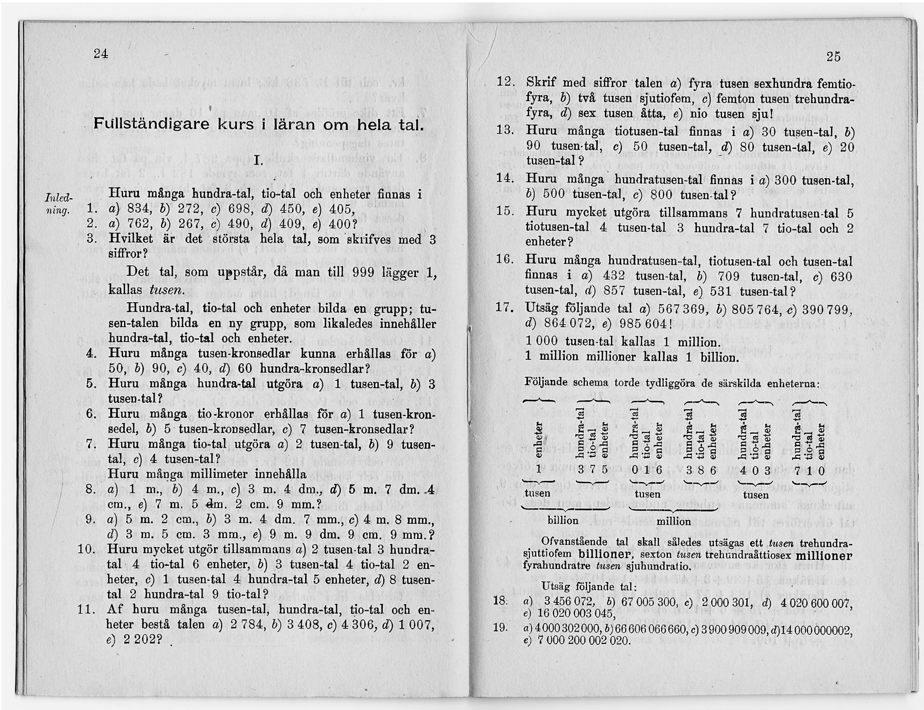
[53] *Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande. Räkning*, s. 4.

[54] Det franska metriska systemet infördes i Sverige på slutet av 1880-talet. Innan dess hade man dock infört andra typer av lokala decimalsorter. Det väsenliga här är att sorträkning på 1880-talet i stor utsträckning kretsade kring dekadiska sorter.

verkligheten – hur man adderar sorter, hur man i praktiken gjorde för att lära de yngsta barnen att läsa tal – framställdes som en metod att ställa matematikens *essens* i undervisningens centrum. Talsortsmetodiken betraktades inte som en metodik för praktiskt räknande utan ett sätt att göra undervisningen bildande. I och med talsortsmetodiken fick ”talbegreppet” en betydligt mer precis innebörd än tidigare. Man knöt nu denna term till en förmåga att uppfatta och ”se” talen enligt talsortsmetodikens principer, det vill säga som sammansatta av å ena sidan talsorter och å andra sidan ”antal” av dessa talsorter. Som en del av denna konkretisering av innebörden av talbegreppet började man fästa ännu mer uppmärksamhet än tidigare på skillnaden mellan siffra och tal. ”Den första undervisningen bör”, kan man i en text inspirerad av talsortsmetodiken läsa, ”afse talbegreppens inlärande och derefter deras beteckning, ej tvärtom; följden torde annars blifva, att siffran träder för det outvecklade förståndet i stället för det begrepp den betecknar”.[55]

Talsortsmetoden kan betraktas som en teoretisk sammanfattning av en rad aspekter av den skolmatematiska praktiken. Metoden kom emellertid att uppfattas som ett uttryck för själva matematiken. De egenskaper som knutits till matematiken, kom att knytas till talsortsmetodens principer, framför allt att de skulle vara möjliga för lärjungarna att *upptäcka* med minimal inblandning från lärarens sida. I och med detta uteslöts successivt just de praktiska anvisningar som talsortsmetodiken utgjorde en sammanfattning av från själva undervisningspraktiken. De framstod, kan man säga, inte längre som nödvändiga, eftersom de utgjorde en logisk följd av själva matematiken. De ansågs vara så naturliga att eleverna borde kunna upptäcka dem på egen hand. Nedanstående figur visar hur talsortsmetoden kunde ta sig uttryck i läroböckerna:

[55] Ad. Meyer, ”Granskning af läroböcker i Aritmetik verkstäld af komiterade, utsedde af Stockholms folkskollärareförening. Stockholm 1883. C. E. Fritze”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1884, s. 7.


24

Fullständigare kurs i läran om hela tal.

I.

Inledning. Huru många hundra-tal, tio-tal och enheter finnas i
1. *a*) 834, *b*) 272, *c*) 698, *d*) 450, *e*) 405,
2. *a*) 762, *b*) 267, *c*) 490, *d*) 409, *e*) 400?
3. Hvilket är det största hela tal, som skrifves med 3 siffror?

Det tal, som uppstår, då man till 999 lägger 1, kallas *tusen*.

Hundra-tal, tio-tal och enheter bilda en grupp; tusen-talen bilda en ny grupp, som likaledes innehåller hundra-tal, tio-tal och enheter.

4. Huru många tusen-kronsedlar kunna erhållas för *a*) 50, *b*) 90, *c*) 40, *d*) 60 hundra-kronsedlar?
5. Huru många hundra-tal utgöra *a*) 1 tusen-tal, *b*) 3 tusen-tal?
6. Huru många tio-kronor erhållas för *a*) 1 tusen-kronsedel, *b*) 5 tusen-kronsedlar, *c*) 7 tusen-kronsedlar?
7. Huru många tio-tal utgöra *a*) 2 tusen-tal, *b*) 9 tusen-tal, *c*) 4 tusen-tal?

Huru många millimeter innehålla

8. *a*) 1 m., *b*) 4 m., *c*) 3 m. 4 dm., *d*) 5 m. 7 dm. 4 cm., *e*) 7 m. 5 dm. 2 cm. 9 mm.?
9. *a*) 5 m. 2 cm., *b*) 3 m. 4 dm. 7 mm., *c*) 4 m. 8 mm., *d*) 3 m. 5 cm. 3 mm., *e*) 9 m. 9 dm. 9 cm. 9 mm.?
10. Huru mycket utgör tillsammans *a*) 2 tusen-tal 3 hundra-tal 4 tio-tal 6 enheter, *b*) 3 tusen-tal 4 tio-tal 2 enheter, *c*) 1 tusen-tal 4 hundra-tal 5 enheter, *d*) 8 tusen-tal 2 hundra-tal 9 tio-tal?
11. Af huru många tusen-tal, hundra-tal, tio-tal och enheter bestå talen *a*) 2 784, *b*) 3 408, *c*) 4 306, *d*) 1 007, *e*) 2 202?

25

12. Skrif med siffror talen *a*) fyra tusen sexhundra femtiofyra, *b*) två tusen sjutiofem, *c*) femton tusen trehundrafyra, *d*) sex tusen åtta, *e*) nio tusen sju!
13. Huru många tiotusen-tal finnas i *a*) 30 tusen-tal, *b*) 90 tusen-tal, *c*) 50 tusen-tal, *d*) 80 tusen-tal, *e*) 20 tusen-tal?
14. Huru många hundratusen-tal finnas i *a*) 300 tusen-tal, *b*) 500 tusen-tal, *c*) 800 tusen-tal?
15. Huru mycket utgöra tillsammans 7 hundratusen-tal 5 tiotusen-tal 4 tusen-tal 3 hundra-tal 7 tio-tal och 2 enheter?
16. Huru många hundratusen-tal, tiotusen-tal och tusen-tal finnas i *a*) 432 tusen-tal, *b*) 709 tusen-tal, *c*) 630 tusen-tal, *d*) 857 tusen-tal, *e*) 531 tusen-tal?
17. Utsäg följande tal *a*) 567 369, *b*) 805 764, *c*) 390 799, *d*) 864 072, *e*) 985 604!

1 000 tusen-tal kallas 1 million.
1 million millioner kallas 1 billion.

Följande schema torde tydliggöra de särskilda enheterna:

enheter	hundra-tal tio-tal enheter	hundra-tal tio-tal enheter	hundra-tal tio-tal enheter	hundra-tal tio-tal enheter	hundra-tal tio-tal enheter
1	3 7 5	0 1 6	3 8 6	4 0 3	7 1 0
tusen		tusen		tusen	
billion		million			

Ofvanstående tal skall således utsägas ett *tusen* trehundrasjuttiofem **billioner**, sexton *tusen* trehundraåttiosex **millioner** fyrahundratre *tusen* sjuhundratio.

Utsäg följande tal:

18. *a*) 3 456 072, *b*) 67 005 300, *c*) 2 000 301, *d*) 4 020 600 007, *e*) 16 020 003 045,
19. *a*) 4 000 302 000, *b*) 66 606 066 660, *c*) 3 900 909 009, *d*) 14 000 000002, *e*) 7 000 200 002 020.

Figur 5. Ett uppslag i Alfred Bergs *Folkskolans räknelära* från 1889. Talsortsmetoden genomsyrar framställningen, med kombinerat fokus på talsystemets uppbyggnad och sorträkning.[56]

I praktiken var det emellertid inte möjligt att få eleverna att själva så att säga uppfinna talsortsmetoden. Den spänning som därmed genererades mellan metodens anspråk och den undervisningserfarenhet den resulterade i, spelade en viktig roll inom den skolmatematiska diskussionen.

Den heuristiska metoden

En viktig roll i diskussionen spelade även den heuristiska metoden. Det var många gånger oklart vad som menades med detta uttryck. En gemensam nämnare var dock att lärjungen *inte* skulle få sig kunskap till del genom lärarens förklaring, eller att han läste sig till den i en bok. Metodens grunddrag känns igen i följande stycke från Rousseaus *Émile* (1762):

> Rikta din lärjunges uppmärksamhet på naturföreteelsena, så skall du snart göra honom vetgirig; men för at nära denna vetgirighet bör du aldrig skynda att tillfredsställa den. Förelägg honom frågor, som lämpa sig för hans fattningsförmåga, och låt honom själv finna lösningen på dem. Han får icke hava din undervisning utan sin egen iakttagelse och eftertanke att tacka för vad han vet; han får icke *lära sig* vetenskapen,

[56] Alfred Berg, *Folkskolans räknelära*, Stockholm, 1889, s. 24–25.

> utan måste själv *finna den på nytt*. Om du en enda gång i hans sinne låter auktoriteten ersätta förståndet, skall han icke mera bruka sitt förstånd till eftertanke och blir då blott en lekboll för andras åsikter.[57]

Rousseaus tanke är att man, liksom Sokrates, skall leda lärjungen till sanningen – istället för att helt enkelt tala om för honom vad man vill att han skall lära sig. Inte heller skall man berätta när lärjungen gör fel. Man skall istället visa honom att det han tror och säger inte kan vara riktigt. ”Säger lärjungen till exempel att 'radie' är en linie, som går från medelpunkten till 'periferien', så drager man från medelpunkten i en uppritad cirkel en krokig linie till periferien och frågar, om detta är en radie o. s. v.”, skriver Albrekt Segerstedt i ett lektionsutkast från 1880-talet inspirerat av den heuristiska metoden.[58]

Den första som förespråkade den heuristiska metoden i Sveriges har av många ansetts vara Anders Magnus Kjelldal, som verkade i Uppsala 1831-1865. I Nordisk familjebok kan man läsa att han ”kan betraktas såsom en vågbrytare inom den matematiska undervisningen i Sverige”, och att han ”uppträdde såsom en skarpsinnig och energisk motståndare mot det sätt att lära matematik, som utgår från läroboken och regeln samt nöjer sig snart sagdt med att den förra återgifves utantill och den senare tillämpas mekaniskt, och för hvilket således summan af inlärda kunskaper blir ensam hufvudsak”. Istället satte Kjelldal utvecklingen av lärjungarnas kunskapsförmåga främst. Han ville att lärjungarna ”genom eget tankearbete, liksom med egen kraft skapade sig sitt matematiska vetande”. När lärjungen skall lära sig något nytt, en ny regel, skall läraren därför inte, menade Kjelldal, tala om denna regel, utan ”genom exempel, som nära sluta sig till det för lärjungen redan bekanta, och hvilka denne derför utan stort biträde kan reda, efter hand öfvergående från lättare till svårare, åstadkomma, att lärjungen kan tillämpa regeln, innan han vet, huru den lyder eller att den ens finnes”.[59]

Karl Petter Nordlunds lärogång

I den skolmatematiska diskussionen under andra halvan av 1800-talet var det framför allt C. A. Nyström och Karl Petter Nordlund som förknippades med den heuristiska metoden. Nyström var den äldre av de två. Hans huvudargument var att om lärjungarna förstod ”orsaken till sitt förfaringssätt” och lärde sig ”weta, att så är, och icke blott minnas”, så skulle de inte så lätt

[57] Rousseau, *Emil eller om uppfostran*, s. 216. Jmf. Dahm, *Skolmästarkonst. Antydningar för Lärare och Skolinspektörer*, s. 43: ”Den heuristiska läroformen består deri, att läraren i frågan framställer en uppgift, som barnet genom svaret skall utreda och lösa.”

[58] Albrekt Segerstedt, *Geometrien i folkskolan och för nybegynnare. Metodiska anvisningar af Albrekt Segerstedt, seminarii-adjunkt*, Stockholm, 1883. Det bör kanske påpekas att det jag talar om här uteslutande är den heuristiska metodens användning inom skolmatematiken. Den användes även vid undervisning i andra ämnen, t.ex. vid undervisningen i kristendom, se Andersson, *1878 års katekes: debatten om katekesens form och innehåll 1810–1878*, s. 23.

[59] Th. Westrin (ed.), *Nordisk familjebok*, Stockholm, 1911, fjortonde bandet, s. 775.

glömma bort hur man gjorde för att lösa de olika räkneuppgifterna och det skulle bli ”en omöjlighet för honom att göra så stora misstag, som den, hwilken blott äger en mängd reglor i minnet, ofta utan förmåga att urskilja, wilken regel som wid hwarje fall bör tillämpas”. Här kan man se att Nyström egentligen snarare knyter an till 1700-talets idéer om rationalitet och logik än till bildningstänkandet. Han skriver att räknandet inte skall utföras ”efter recepter eller handtwerksmessigt, såsom i en handtwerkarwerkstad”, och detta i synnerhet som undervisningen i läroverket ”hufwudsakligen hafwa till uppgift att utweckla lärjungarnes förstånd och eftertanka”.[60]

Karl Petter Nordlund (1830-1909) vigde sitt liv åt skolmatematiken och kommer vad gäller engagemang och uthållighet troligtvis att förbli oöverträffad. Liksom Nyström anslöt han sig till Kjelldals heuristiska metod, men han gav även denna metod en personlig och vad gäller svenska förhållanden unik utformning. Han introducerade sina idéer kring mitten av 1860-talet och ägnade sig sedan åt att sprida dem genom läroböcker, metodhandledningar, artiklar och även omfattande kursverksamhet för lärare.[61] Karaktäristiskt för Nordlund är för det första att han utformade skolmatematiken som ett system, anpassat till såväl undervisningssituationen som vad han uppfattade som lärjungarnas förutsättningar, samt för det andra att han ansåg att undervisningens högsta mål borde vara förståndsutveckling, snarare än förmedling av kunskaper. Nordlund var bekant med den vetenskapliga matematiken, men han menade att denna matematik inte passade för den typ av undervisning som borde erbjudas i folkskolan och läroverket. Istället utformade han en ny, enligt honom själv mer logiskt sammanhängande terminologi, speciellt utformad för den grundläggande undervisningens behov. Han förespråkade kort sagt en autonom skolmatematik.

Nordlund skriver i inledningen till *Räkneöfningsexempel för skolor uppställda med afseende på heuristiska methodens användande* (1867) att den ”i flere afseenden skiljer sig från sina föregångare”.[62] Det hade han i viss mån rätt i. Nordlund betraktades av sina samtida som en udda fågel. Denna bild av Nordlund som i någon mening unik, kom sedan att förstärkas av senare generationer. Många av hans idéer – dock inte alla – passade emellertid mycket väl med tidens diskussion och de nydaningar han införde ter sig i efterhand som en integrerad del av den förändring den svenska skolmatematiken genomgick under andra halvan av 1800-talet. Ett tidigt uttryck för Nordlunds grundsatser är följande:

---

[60] Nyström, *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran*, förord.

[61] Till exempel av K. P. Nordlund författade: *Räkneöfningsexempel för skolor: uppställda med afseende på heuristiska methodens användande*, Gefle, 1867; *Räkne-öfningsexempel i algebra för skolor*, Gefle, 1872 och *Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar*, Stockholm, 1890.

[62] Nordlund, *Räkneöfningsexempel för skolor: uppställda med afseende på heuristiska methodens användande*, s. 3.

> *Att* undervisningen i räkning bör begynna med och grundas på åskådning;
> *Att* lärjungen genom vinkar af läraren och ändamålsenligt uppställda exempels uträknande på egen hand sättes i tillfälle att sjelf finna regeln;
> *Att* lärjungen tillhålles att muntligen redogöra för sin tankegång vid exemplens uträknande och för de räknesätt, som blifvit använda; samt
> *Att* lärjungen först då tillåtes börja med något nytt, när han utan tankeansträngning kan besvara frågor, som röra det föregående, samt sjelf uppgifva sådana.[63]

I Nordlunds metod spelade lärjungens ”redogörelse för sitt resonemang” en central roll, vilket alltså ger en delvis annan innebörd till den heuristiska metoden än den som citatet ur *Émile* ovan exemplifierar. Detta moment anger Nordlund att han utformat efter modell från geometriundervisningen, eftersom det är just detta moment av geometriundervisningen som, menar han, ”mest bidrager till lärjungens andliga utveckling”. Han ger följande exempel på hur en motsvarande typ av redogörelser kan utformas som del av undervisningen i räkning:

Tabell 10. ”Såsom ett litet prof meddelas följande enkla exempel”, skriver Nordlund, och fortsätter, ”En gosse köpte en griffeltafla för 35 öre, papper för 75 öre och en bok för 1 kr. 80 öre. Gossen lemnade som betalning en sedel å 5 kr”. Nordlund tänker sig att uppgiften skall lösas genom följande dialog:

Läraren	**Lärjungen**
Hvar är uppgifvet i exemplet?	Att en gosse köpte en griffeltafla för 35 öre, papper för 75 öre och en bok för 1 kr. 80 öre, samt att gossen som betalning lemnade en sedel å 5 kr.
Hvar är det som sökes?	Penningsumman, som gossen fick tillbaka.
Hvilken var denna penningsumma?	2 kr. 10 öre.
Hvad gjorde du först?	Jag lade tillsammans 35 öre, 75 öre och 1 kr. 80 öre eller 180 öre.
Hvad erhöll du?	290 öre eller 2 kr. 90 öre.
Hvad anger i detta fall 2 kr. 90 öre?	Priset på de saker, gossen köpte.
Hvad gjorde du vidare?	Jag tog bort 2 kr. 90 öre eller 290 öre från 5 kr eller 500 öre.
Hvad erhöll du?	210 öre eller 2 kr. 10 öre.
Hvad utmärka dessa 2 kr. 10 öre.	Den penningsumma, som gossen fick tillbaka.[64]

Denna precisa beskrivning av en dialog mellan lärjunge och lärare kan ses som ytterligare ett tecken på den rörelse jag många gånger pekat på i tidigare kapitel, av hur de böcker som låg till grund för den skolmatematiska

[63] *Förhandlingar vid Femte Allmänna Svenska folkskolläraremötet i Gefle den 25, 26, och 27 Juli 1865*, Gävle, 1865, s. 27.
[64] K. P. Nordlund, *En samling räkneuppgifter jemte fullständig redogörelse för deras lösning för seminarier, skolor och sjelfstudium bihang till samme utgifvares Räkneöfningsexempel*, Gefle, 1879, s. 3.

undervisningen i allt större utsträckning kom att strukturera själva praktiken. Här lämnas föga utrymme för improvisation.

Nordlund utformade på sätt och vis en hel filosofi för grundläggande matematikundervisning. Jag har dock valt att lämna denna filosofi utanför min framställning. Det skulle ta allt för mycket plats att göra den rättvisa. Låt mig bara nämna att Nordlunds ambition var att helt reformera den grundläggande undervisningen i aritmetik. Till exempel ville han helt frångå den brukliga indelning av aritmetiken i ”de fyra räknesätten”, och istället bygga räkneläran på de egna begreppen *det hela, delarna och delarnas antal.* Fritz Wigforss, en av 1900-talets viktigaste skolmatematiker, beskriver det fina med Nordlunds terminologi så här, i sin *Den grundläggande matematikundervisningen* från 1925:

> I stället för de många latinska namnen på i de olika räknesätten ingående storheterna (addend, minuend, etc.) kan användas tre svenska ord: det hela delarnas antal och delarnas storlek (enl. förslag av K. P. Nordlund). Man inser genast, hur uppklarande denna terminologi blir i fråga om sambandet mellan räknesätten. I addition äro delarnas storlek känd, och det hela sökes, i subtraktion äro det hela och den ena av två delar kända, och den andra delens storlek sökes, i multiplikation äro delarnas antal och storlek kända, och det hela sökes, i delningsdivision äro det hela och delarnas antal kända, och delarnas storlek sökes, i innehållsdivision äro det hela och delarnas storlek kända, och delarnas antal sökes. Man ser, hurusom genast olikheten mellan de båda divisionerna uppdagas, medan vid terminologien dividend, divisor, kvot ingenting märkes av denna olikhet.[65]

Wigforss konstaterar dock sedan att Nordlunds terminologi för bråkräkning var mindre lyckad. Viktigt att nämna är också att Nordlund såg räkneundervisningen som först och främst ett verktyg för uppfostran. Det var på grund av detta uppfostrande mål som det var nödvändigt att ge den grundläggande aritmetiken en mer logisk form som samtidigt var anpassad till barnets förutsättning. Nordlunds magnum opus var *Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning* som gavs ut 1890.[66]

J. P. Velander om ”Hela tal i folkskolan” och ”Om ämnet räkning i folkskolan”

Under 1880-talet började diskussionen rörande folkskolans undervisning att allt mer föras av folkskolans egna företrädare, snarare än som tidigare av läroboksförfattare som i och för sig skrev för folkskolan, men själva hade en annan institutionell hemvist. En av de folkskollärare som deltog i

[65] Frits Wigforss, *Den grundläggande matematikundervisningen: översikt av folkskolans kurs i räkning och geometri ur metodisk synpunkt*, Stockholm, 1925, s. 34.
[66] Nordlund, *Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar.*

diskussionen var J. P. Velander. Dels författade han ett par läroböcker,[67] men han förtjänar sin plats i min redogörelse framför allt genom två innehållsrika artiklar införda i den då nystartade *Svensk Läraretidning*: "Om ämnet räkning i folkskolan" från 1884 och "Hela tal i folkskolan" från 1885.[68]

Velander utmärkte sig genom sin ambition att låta läroboken i så stor utsträckning som möjligt strukturera undervisningen. Han argumenterade för denna ambition i sina artiklar, vilket gör dem till tydliga illustrationer av hur man mer allmänt under denna tid flyttade fokus mot själva undervisningspraktiken. Velander hade emellertid mycket mer än detta att säga.

En av de frågor Velander diskuterade var studiernas hastighet. Pestalozzi förespråkade som vi såg i kapitel 9 ett extremt långsamt fortskridande. Även folkskolans normalplan hade utformats i linje med det långsamma fortskridandets princip. Detta är något Velander gillar. Han ger följande kommentar till normalplanens föreskrift att lärjungarna de två första åren i folkskolan bara skall syssla med hela tal:

> Mången med oss torde vid första läsningen af detta stadgande ha undrat, om en sådan långsamhet i framstegen kunde vara nödig, men vi närmare undersökning af saken hafva vi funnit, att föreskriften vittnar om mogen pedagogisk erfarenhet, och att den i sina verkningar bör blifva högst välgörande, ja i vissa afseenden rent af reformerande.[69]

Velander hörde till dem som menade att en ytterligare inbromsning av studietakten borde ha välgörande effekter. Artikeln om "Hela tal i folkskolan" kretsar i stor utsträckning just kring vikten av att ägna mer tid åt det allra enklaste. Han konstaterar i denna artikel att såväl de "äldre" som de "största nyare" räkneböckerna, ägnar relativt lite utrymme åt lärokursens första del. Ofta, skriver han, ägnas så lite som tre procent av boken åt folkskolans första år. Dessa böcker passar därmed inte bra med normalplanen och, fortsätter han,

> utan misskännande af den pedagogiska sanningen, att både grunden bör läggas med hjelp af det enkla och lättfattliga, och en mångsidig användning af detta enkla göras, innan man bygger vidare, så hade ett sådant missförhållande aldrig kunnat uppstå.[70]

Velander kallar de hela talen "ett stjufbarn". Läroböckerna efter Zweigbergk fick allt fler övningsuppgifter och dessa passade allt bättre för skolans behov av att fylla ut tiden. Velander skriver att han därför alls inte vill förneka det

[67] J. P. Velander, *Velanders Räknebok för folkskolan*, Stockholm, 1884.
[68] Velander, "Ämnet räkning i folkskolan" och J. P. Velander, "Hela tal i folkskolan", *Svensk Läraretidning*, 1885.
[69] Velander, "Hela tal i folkskolan", s. 77.
[70] Ibid, s. 78.

goda i att ”exempelsamlingen tilltages i sådant omfång, att den räcker till äfven för de raskaste lärjungarne”.[71] Problemet är bara att de uppgifter som fyller exempelsamlingar brukade framstå som ganska svåra för lärjungarna. Detta kunde, trodde Velander, avhjälpas, om de först fick en större mängd uppgifter med hela tal. Bara genom en systematisk progression av långsamt ökande svårighetsgrad, kan, menade han, lärjungarna i större utsträckning sköta sig själva.

Angående sin egen lärobok skriver han att han haft god lust att använda ännu mindre tal än han nu gör, om han inte ”trott det vara betänkligt att alltför tvärt bryta med gammal sed”. Till detta kommer, skriver han, att uppgifter med större tal – om de tillämpas ”med urskilning” – ju har det goda med sig att de kan ”gifva den ena årsklassen sysselsättning med tyst räknande i sådant omfång, att lärarens tid ej alltför mycket blir upptagen af förfrågningar”.[72]

Velanders uppsats ”Ämnet räkning i folkskolan” som publicerades i *Svensk Läraretidning* 1884 är i princip ett brandtal för att de matematiska studierna i folkskolan borde syfta till att ge eleverna praktiskt nyttiga kunskaper, snarare än bildning.[73] Den betecknar en allmän rörelse vid just denna tid från bildning mot praktisk nytta som skolmatematikens främsta mål.[74] Rörelsen skedde i samma takt som folkskolelärare tog allt större plats i diskussionen. Det fascinerande är emellertid att den väg mot praktisk nytta som Velander förespråkade, bara högst marginellt skiljde sig från den väg som tagit form under det att de matematiska studierna syftade till bildning. Velander kan därför sägas ha tillhört den första generation som ”ärvde” bildningstänkandets praktiker och gav dem en ny mening. De repetitiva övningar som skapades med hänvisning till deras bildande effekter, framstod för Velander som en nödvändig väg mot praktiskt nyttiga kunskaper. Velanders uppsats har åtta punkter. Den första innehåller en inledning till artikeln. Jag skall nu gå igenom de återstående sju punkterna.

2. Räkneundervisningen förr och nu

Efter inledningen, tar han i sin andra punkt upp frågan om ”Räkneundervisningen förr och nu”.[75] Här kontrasterar han den ”mekaniska” undervisning som kretsade kring Zweigbergks regler och övningar mot den förståndsodlande heuristik vilken (i läroverket) enligt honom uppstod som en protest mot denna metod. Båda dessa metoder karaktäriserar Velander som bristfälliga. Det rätta måste, skriver han, ”ligga någonstädes mellan de båda

[71] Ibid, s. 85.
[72] Ibid, s. 86.
[73] Velander, ”Ämnet räkning i folkskolan”.
[74] Jmf. Tomas Englund, *Medborgerlig läroplanskod för folkskola, fortsättningsskola och grundskola 1918/19-?*, Stockholm, 1980, s. 8, som talar om det nya som en ”realistisk läroplanskod”.
[75] Velander, ”Ämnet räkning i folkskolan”, s. 381.

ytterligheterna", det vill säga både innefatta praktiskt räknande som syftar till färdighet, och att lärjungarna förstår vad de gör.[76]

Ett viktigt argument för denna nödvändighet är emellertid för Velander undervisningens praktiska villkor. Heuristik, det vill säga det noggranna sönderplockandet av räkneuppgifter som Kjelldal och Nyström förespråkade och ägnade sig åt, hade aldrig varit något för folkskolan. Sådant fanns det ingen tid till. Och det är just dispositionen av lärarens *tid* som utgjorde ett de centrala problem som folkskolans räkneundervisning måste lösa. Den paradoxala lösning som Velander ser är att läroböckerna måste innehålla uppgifter som främst syftar till mekanisk färdighet, för att läraren, genom att eleverna huvudsakligen hålls sysselsatta med dessa övningar, då får tid att undervisa de som är i behov av undervisning. Böckerna får med andra ord inte innehålla svårigheter som ställer barnen i behov av lärarens uppmärksamhet. Uppgifterna måste vara enkla och progressivt ordnade, det mekaniskt vara huvudsaken. De måste syfta till att hålla barnen sysselsatta – "hvilket ej behöfver hindra", skriver Velander, "att åtskilligt annat af värde kan komma med liksom *på köpet*".[77]

3. Räkneundervisning bör syfta till praktiskt användbara kunskaper

I sin tredje punkt opponerar sig Velander mot uppfattningen att räkneundervisningen i första hand skall, som kommittén för granskning av folkskolan läroböcker i aritmetik skrev 1883, syfta till "förståndets utveckling och tankekraftens stärkande".[78] Undervisningens syfte bör istället, skriver Velander, vara praktiskt. All undervisning måste givetvis vara bildande – men knappast räkneundervisningen mer än andra ämnen, något han argumenterar för med hänvisning till en rad andra ämnen, till exempel modersmåls- och religionsundervisning. Väsentligt för Velander är att det är just när undervisningen får förståndsutveckling som eget mål, som dess praktiska utformning tenderar att missa det. Om tvärtom undervisningen är praktisk, om eleverna i räkneundervisningen får arbeta med exempel som förekommer i livet,

> fullt konkreta och åskådligt framställda, inbjudande lärjungen att tänka sig in i situationen och fästa sig vid de lämnade mått- och prisuppgifterna, för öfrigt intressanta och mångsidiga, omvexlande, små och lätt uträknade, istället för att vara hopkonstruerade efter några gifna räknesätts-schemata, abstrakta, dunkla och skefva, tröttande honom genom väldiga tal, bråk som vid prestval och en själlös erfarenhet, som måste hos honom väcka intrycket af, att han blott hade att köra i samma hjulspår, så länge räknesättet varade,

[76] Ibid, s. 382.
[77] Ibid, s. 382.
[78] Dalström, et al., *Granskning af läroböcker i aritmetik.*

då skulle räkneundervisningen – utan att detta mål uttryckligen eftersträvades – ändå bli påtagligt "förståndsutvecklande".[79] Säkert kan man, skriver Velander, nå förståndsutveckling även på andra sätt, men i folkskolan måste den praktiska nyttan ställas i första rummet. Man har inte tid att ägna sig åt förståndsövningar, som inte också tjänar detta mål.

4. Man måste börja med små tal

I sin fjärde punkt beskriver Velander hur det praktiska mål kan nås. För det första måste undervisningen kretsa kring *små tal*. Inte minst för att undervisningen på så sätt kan göras intresseväckande och lustfylld. Som vi sett innehöll emellertid de flesta läroböcker i räkning en hel del tämligen stora tal. Velander såg sådana räkneuppgifter som ett uttryck för hänsynslöshet; ett sätt att fullständigt döda barnets intresse för att räkna, utan minsta insikt om dess känslor. "Om ändå lärarna hade tid", skriver han angående dessa stora tal, "klokhet och omtanke nog – ja, rättighet med, förstås! att med ogenomskådlig trycksvärta öfversmeta dem!!".[80] Man anar här att det i diskussionen fanns ståndpunkter tämligen olika de Velander gav uttryck åt. Nedanstående citat, hämtat från en helt annat artikel, ger en bild av vad det var Velander talade om:

> I våra dagar kan man ej fästa nog stor vigt vid denna säkerhet och det däraf alstrade rätta sjelfförtroendet, som ensamt är i stånd att skapa män. En sådan karaktärens bestämdhet och allvar kan räkneundervisningen i sin mån bidraga att fostra. Märk därföre noga: läraren får aldrig nöja sig med facit, som äro något så när rätta, i hvilket 'endast en' siffra är oriktig; är ej resultatet *alldeles* riktigt, måste lärjungen utan miskund tillhållas att räkna om hela exemplet, och först då han upprepade gånge misslyckats, må läraren lämna honom en vink om, hvar felet ligger.[81]

Velander pekar i sin omsorg om barnet fram mot det tidiga 1900-talets barncentrerade pedagogik. Han såg inte räkneundervisningen som ett redskap för att, som det står i citatet ovan, "skapa män".[82] Samtidigt var han, som nämnt ovan angående hans artikel om hela tal, inte helt främmande inför idén om stora tal i räkneböckerna. Det är här undervisningens praktik som komplicerar bilden. De stora talen har nämligen den fördelen att de kräver tid för att uträknas och det är, skriver Velander, "nödvändigt, att materialet för de tysta övningarna någorlunda räcker till, så att ej läraren blir allt för mycket upptagen af de barn, som skulle sköta sig sjelfva". För detta ändamål kan de stora talen möjligen få anlitas. Men i så fall inte "förr än barnet är så pass

[79] Velander, "Ämnet räkning i folkskolan", s. 390.
[80] Ibid, s. 401.
[81] -K-, "Den första räkneundervisningen", *Pedagogisk Tidskrift*, 1878.
[82] Ibid.

säkert, att det ej känner sig modstulen eller ryggar tillbaka för de stora siffrorna".[83]

För Velander är det självklart att räkneundervisning till största delen består i att eleverna löser uppgifter. Det viktiga är därför att dessa uppgifter är lämpligt valda, något som, menar han, i första han åligger räkneboken. I sin redogörelse för vad som utgör lämpliga exempel tar Velander upp: *För det första* att uppgifterna måste ligga "barnets erfarenhet så nära, att det kan tänka sig det beskrifna fallet såsom verkligt eller måla det i sin föreställning med full åskådlighet och klarhet".[84] Något som å andra sidan inte hindrar att uppgifterna samtidigt vidgar lärjungens erfarenhetsvärld.[85] *För det andra* att uppgifternas innehåll och form är så konkret som möjligt: "hellre Anders och Bengt än A. och B.", och så vidare. *För det tredje* att uppgifternas utgångspunkt är naturlig. Uppgifterna skall med andra ord inte vara räknegåtor, utan vara av ett sådant slag som faktiskt förekommer i det verkliga livet. *För det fjärde* att uppgifterna "ej taga något för gifvet, som ej är gifvet". Hit hör till exempel att utgå från att "en vara säljes till samma pris i parti och minut" – ett vanligt antagande i räkneböckernas exempel på *Regula de Tri*. Än värre är, skriver Velander, att man försöker inbilla barnet "uppenbara orimligheter", som att "6 man, som arbeta 12 timmar om dagen, böra medhinna lika mycket som 9 man med 8 timmars arbetstid eller 18 med 4". I exempel på *Regula de Tri* måste givetvis, skriver Velander, "verklig proportionalitet" vara för handen. Till detta kommer att sifferuppgifter i exemplen bör vara "ej blott rimliga, utan så vidt möjligt [...] *äfven sanna*".[86] Lärjungarna skall, menar Velander, kunna lita på sakuppgifterna i sina räkneböcker lika mycket som de lita på uppgifterna i läroböckerna i geografi eller historia. Tillfället bör utnyttjas, skriver han, att göra räkneundervisningen bildande även i denna bemärkelse (se även s. 14f nedan).

[83] Velander, "Ämnet räkning i folkskolan", s. 402.
[84] Ibid. Ambitionen att knyta an till barnens egen erfarenhetsvärld växte sig än starkare under 1900-talets första decennier, en rörelse som dock huvudsakligen faller utanför ramarna för denna studie. Det står även klart att denna förändring i synen på skolmatematiken skedde samtidigt om – eller kanske till och med var inspirerad av – en motsvarande förändring i synen på andra ämnen, se Andersson, *1878 års katekes: debatten om katekesens form och innehåll 1810–1878*, s. 105, som citerar en text från 1860 där man angående kristendomsundervisningen kan läsa att: "Stoffet måste ges en verklighetsanknytning i barnets värld." Mitt material pekar mot att denna typ av påståenden inte blev en del av den skolmatematiska diskussionen förrän ett par decennier senare. Även mer allmänt verkar det finnas flera paralleller mellan folkskolans undervisning i kristendom och den i matematik, där förändringarna ofta kommer något tidigare i fråga om kristendomsundervisningen, se Andersson, *1878 års katekes: debatten om katekesens form och innehåll 1810–1878*, s. 125–128. I Andersson, *Läsning och skrivning*, s. 88–112 kan man hitta flera paralleller till den undervisningsmetodiska diskussionen rörande läsning och skrivning strax före sekelskiftet 1900.
[85] Ett tydligt exempel på sådana räkneuppgifter är de i Per Adam Siljeström, *Samling af räkneexempel till folkskolornas tjenst: första häftet innehållande omkr. 1100 exempel i de fyra räknesätten med hela tal: med svar*, Stockholm, 1870.
[86] Velander, "Ämnet räkning i folkskolan", s. 403.

5. Räkneuppgifterna bör inte delas in i ”konkreta” och ”abstrakta”

Den femte punkten av sin uppsats ägnar Velander åt en kritik av den gängse uppdelningen av exempel i ”konkreta” och ”abstrakta”. Hos Zweigbergk kom de abstrakta uppgifterna först – med syfte att öva reglerna – följda av konkreta tillämpningar. På 1880-talet var det en metodisk sanning att de konkreta uppgifterna – genom sin större åskådlighet – borde föregå de abstrakta, vars syfte blivit att ”fästa” reglorna i minnet. Velander problematiserar själva indelningen, som han menar är artificiell. För vad betyder det, frågar han retoriskt, att något är åskådligt? I vilken bemärkelse är ”12 gossar” mer åskådligt än 12? Frågorna är inte lätta att besvara. Och det är, menar Velander, uppenbart befängt att låta exempel med stora tal, som dessutom kräver användande av flera olika räknesätt, föregå ett exempel som ”1+2+3+4”, bara för att talen i det första exemplet skulle vara ”konkreta”.[87] Istället för ”konkret” vill Velander tala om ”åskådlig”. Små tal kan i så fall, menar han, sägas vara åskådliga i den bemärkelsen att man kan så att säga tydligt ”föreställa sig” vad talet representerar. Detta skulle gälla med tal som ett, två, tre och kanske fyra. Men när talen blir bara något större, uppåt något tiotal, behöver vi, skriver Velander, något att ”fästa dem vid”; de kan så att säga, inte tänkas i sig själva. Vi kan inte överblicka en mängd med 12 element, vi måste räkna elementen för att se att de faktiskt är just 12. Mängden kan därför inte i sig själv ”representera” talet 12. Velander överraskande påstående är att det vi vanligen fäster talen vid är – den siffra som representerar talet.[88]

Bilden har nu komplicerats betänkligt. För om tal alltid behöver representeras för att kunna tänkas, vari består då gränsen mellan ”konkreta” och ”abstrakta” tal? Vi kan här se varför Velander inte fäster så stor vikt vid talbegreppet, utan istället fokuserar på det man måste kunna göra med talen. Räkneundervisningens betydelsefulla gräns gick alltså inte mellan det konkreta och det abstrakta för Velander, utan mellan det meningsfulla och det meningslösa. Det man gör, måste – så tolkar jag Velander – ha *mening*, och det får det om, som vi sett ovan, uppgifterna knyter an till det praktiska livet, är konkreta och naturliga, bygger på rimliga antaganden, har sanna sifferuppgifter, och så vidare.

6. Räkneuppgifterna bör delas in med avseende på deras ”funktion”

I sin sjätte punkt föreslår Velander en annan ordning än den baserad på skillnaden mellan konkreta och abstrakta tal, nämligen en ordning baserad på

[87] Ibid, s. 418.

[88] Velanders resonemang kring representation kan jämföras med de filosofen Edmund Husserl för i ”Philosophie der Arithmetik” [1891] (återgiven i Lothar Eley (ed.), *Husserliana. Edmund Husserl. Gesammelte Werke. Band XII: Philosophie der Arithmetik.*, Haag, 1970). En hypotes som väckts under min studie av den svenska skolmatematiken är att den matematiska filosofi som tog form kring sekelskiftet 1900, bland annat Husserls, åtminstone i viss mån måste förstås mot bakgrund av hur matematiken vid denna tid diskuterades i relation till grundläggande utbildning.

uppgifternas *funktion*. Undervisningen måste, menar Velander, syfta till att eleverna skall kunna räkna i det dagliga livet. Därför måste man först göra klart för sig vad ett sådant räknande innebär och vilken typ av förmågor ("kompetenser" skulle vi säga idag) det kräver. Han skiljer här mellan: för det första, en förmåga att "göra uppgiftens innehåll klar och åskådligt för tanken". Detta är det viktigaste – och det är väsentligt att det har ganska lite med matematik i egenskap av räknefärdighet att göra. Sedan: förmåga att tänka ut "sättet att lösa frågan". Och slutligen: "förmåga att utföra sjelfva räkningen". Velanders förslag består i att förskjuta fokus från den tredje punkten – som skolan enligt Velander alltid månat om fullt tillräckligt – till de två första. Just i fråga om att förstå vad det är som skall göras, står eleverna efter den rådande undervisningen enligt Velander alldeles handfallna. Detta är orsaken till "den vunna räknefärdighetens ringa användbarhet i lifvet". Velander förslår följande "skema" för att uppnå denna förändring: först bör eleverna ägna sig åt små och lätta uppgifter, vars svar "genast inses". Givet denna förutsättning må de vara "konkreta" eller "abstrakta", det spelar ingen roll. Sedan bör själva "räkneoperationerna" introduceras successivt, efter regeln "*lär blott en sak åt gången!*". Då räkneoperationerna fattats, bör uppgifterna ta sikte på att lära lärjungen "inse, när han har användning för [dem]". Slutligen, först när "inom hvarje exempelgrupp lösningssättets utfunderande öfvats så mycket, att det går lätt", bör man introducera svårare uppgifter, som kräver "särskild ansträngning".[89] Genom att leda eleven längs en lärogång där själva räknandet introducera successivt, vill Velander förhindra att detta räknande hamnar i fokus och stjäl lärjungarnas energi. Då kan istället tänkandet ägnas åt det mer väsentliga: att förstå räknandets sammanhang.

7. Räkneuppgifterna måste vara realistiska

Velanders sjunde punkt innehåller en sammanfattning. Här framgår att den för honom viktigaste frågan är räkneuppgifternas utformning, i första hand att dessa måste vara verkligheten trogna. Han riktar specifik kritik mot bruket att anpassa uppgifterna till skolans villkor. Resultatet blir, menar han, uppgifter som i och för sig kan lösas "i teorin", men inte i praktiken. Och vad lär sig lärjungen av detta? Knappast det rimliga: att sådana uppgifter bör *förkastas* "såsom olösliga". En annan konsekvens är ofta att uppgifterna i och för sig blir "svåra" – men svåra i en specifikt skolmässig bemärkelse, på ett sätt som kan hanteras med skolmatematikens metoder. Verkliga uppgifter är tvärtom, konstaterar Velander, ofta tämligen enkla vad gäller själva räknandet. Svårigheten kan istället ligga i "en eller annan biomständighet". Men exakt sådana biomständigheter brukar läroböckerna vänja lärjungen vid att "förbise". Följden av skolans räkneundervisning – som den nu bedrivs – är därför, menar Velander, en hög grad av räkneskicklighet, men bara på att lösa problem specifika för skolan.

[89] Velander, "Ämnet räkning i folkskolan", s. 419.

8. Räkneboken bör vara skriven för lärjungen och utformad på ett sådant sätt att lärjungarna kan reda sig själva med boken, utan att ta lärarens tid i anspråk

Velanders sista punkt handlar om relationen mellan läroboken och läraren, och mer specifikt om hur han tänkt vid utformandet av sin egen lärobok. Här spelar dispositionen av lärarens *tid* huvudrollen. Frågan är hur läraren skall få tid att undervisa, i detta ämne, där lärjungarnas begåvning skiljer sig så mycket åt, och framsteg kräver – det var så man såg det – ett så stort mått av klokt bistånd från läraren. Som vi sett var både Zweigbergks och Almqvists läroböcker utformade för att ge lärarens utrymme att undervisa. Detta i kontrast mot de tidigare räknelärorna – vilka snarare var utformade som handböcker för självstudier. Instruktioner hade rensats ut, med omsorg om lärarens individualitet. Velander försöker med sin lärobok att lösa ett annat problem, nämligen att lärarens utrymme är till föga nytta, om han inte har tid att fylla det med något. Paradoxalt nog är det, menar Velander, bara genom att inskränka lärarens utrymme, genom att i så stor utsträckning som möjligt göra lärarens jobb, som läroboken kan befria lärarens från den börda som – hindrar honom från att göra sitt jobb. Lösningen heter "tysta övningar", tillsammans med så goda anvisningar och instruktioner som möjligt. Allt för att lärjungarna skall kunna "reda sig sjelfva". Det är viktigt att komma ihåg att de anvisningar och instruktioner det här rör sig om, är något helt annat än de som fyllde räknelärorna. De instruktioner det nu är fråga om syftar till att förhindra att lärjungarna stoppas upp och söker hjälp hos läraren. Anvisningarna rör därför huvudsakligen *lärobokens uppgifter.* De säger hur uppgifterna skall lösas, hur de specifika svårigheterna vid varje moment skall övervinnas. Detta, snarare än att förklara hur praktiska situationer utanför skolan kan hanteras. Läroböckernas text är ett hjälpmedel att hålla lärjungarna kvar på banan, nära den uttänkta lärogången. De beskriver inte lärogångens mål – detta vore tvärtom helt förkastligt. Målet kan bara nås genom en kontinuerlig rörelse, längs raden av uppgifter. Anvisningarnas syfte är att förhindra att denna kontinuerliga rörelse bryts.

J. E. Johansson "Om räkneundervisningen i folkskolan"

En delvis annan bild av skolmatematiken får man av J. E. Johanssons uppsats "Om räkneundervisningen i folkskolan", vilken publicerades som en serie artiklar i *Folkskolans Vän* 1889. Johansson knyter i sin artikel an till en lång rad samtida pedagoger, och det är inte tydligt om han kommer med något eget bidrag utöver dessa hänvisningar. Därför kan hans artikel betraktas som tämligen typisk för tidens skolmatematiska ståndpunkter.

I jämförelse med Velander är Johansson mer positiv till bildningsmålet. Han inleder med att citera "den tyske pedagogen Dinter", som säger: "Räkningen bör betraktas dels såsom bildningsmedel och dels såsom färdighet för lifvet".[90] På klassiskt manér ställer han sedan den förflutna och den samtida skolmatematiken mot varandra:

> Beklagligtvis har man i de flesta fall nöjt sig med en mekanisk färdighet, som långt ifrån tillfredsställer lifvets kraf och ännu mindre tillgodoser det första momentet, nemligen att räkneundervisningen också bör betraktas såsom ett vigtigt bildningsmedel.[91]

I åtta punkter redogör sedan Johansson för hur skolmatematiken kan förändras från sitt beklagansvärda tillstånd, till att bli det bildningsmedel och det praktiskt nyttiga redskap det borde vara.

För det första måste, skriver Johansson, undervisningen utgå från åskådningen. Detta eftersom "Barnen står på åskådningens ståndpunkt". Den är, skriver Johansson, "räkneundervisningens grundval, eller den kanal, genom hvilken kunskapen likasom införes i barnasjälen". Åskådning är emellertid inte nog – det som åskådas måste även "befästas". Detta sker genom övning. Och efter övning krävs även användning. I denna skall insikten och övningen "sammansmälta till en lefvande enhet". Johansson citerar här "pedagogen Borman", som skriver: "Denna innerliga förbindelse af *veta, kunna* och i lifvet *utföra* gör räkneundervisningen till ett värdefullt bildningsmedel för lärjungen".[92]

För det andra måste talbegreppen vara "klart inhemtade" innan lärjungarna får börja räkna. Här gör Johansson en skarp åtskillnad mellan å ena sidan siffrorna och talorden och å andra sidan de "förställningar" som måste vara förknippade med dessa. Får barnen räkna utan klara talbegrepp, skriver han, blir räknandet mekaniskt. Och talbegrepp är inget som uppstår för att man *säger* till barnet, till exempel "den der siffran betecknar två" eller "siffran till venster om enheterna (entalen) betecknar tiotal", eller något liknande. Ett begrepp om talen är, förklarar Johansson, något som uppstår successivt genom (som sagt i den första punkten) åskådning, övning och användning. Först får man, menar Johansson, ett begrepp om talet ett, sedan om talet två, tre, och så vidare. Antag, skriver han vidare, att barnet "lärt sig betydelsen af ett ental, ett tvåtal och ett tretal och således står vid fyratalet". Då skulle man kunna lära fyratalet ungefär på följande sätt:

> Nå, huru många tal har ni nu lärt er? Nemligen? Räkna dessa kuber (ett, två, tre, fyra)! Nu! (läraren borttager en, hvarefter barnet räknar: 4, 3, 2, 1.) Räkna t. o. m. 4 fram! Tillbaka! Drag 4 streck! Sträck upp 4 fingrar! Gå 4 steg! Bocka dig 4 gånger! Uppgif några saker, hvaraf det finnes 4 i detta rum! Huru många fötter har katten? Uppgif något annat djur, som har 4 fötter! Hvad kallar man det tal, som uttrycker ett antal af 4? Hvad menas således med ett fyratal? Med hvilket tecken

---

[90] Jan-Erik Johansson, "Om räkneundervisningens i folkskolan", *Folkskolans vän*, 1889, s. 14.
[91] Ibid, s. 14.
[92] Ibid, s. 14.

> betecknar man 4-talet? Skrif siffran 4! Låt denna siffra beteckna böcker och gif mig så många![93]

Genom att delta i denna praktik – som alltså innefattar så väl åskådning och övning, som användning – menar Johansson att barnet skall tillägna sig *talbegreppet fyra*.

För det tredje talar Johansson om ”snabbhet och reda”. Han menar att om detta mål skall uppnås, så måste barnet få en ”klar insigt” i tiotalssystemet. Här hänvisar han, som många andra vid denna tid, till talsortsmetoden. Den klara uppfattning av tiotalssystemet som talsortsmetoden leder till har enligt Johansson flera fördelar: dels leder den till klara talbegrepp, vilket gör undervisningen bildande, dels gör den barnen till snabba och säkra räknare. Undervisning som tar detta mål på allvar blir ”lefvande” och ”hindrar barnen att försjunka i slöa funderingar”, och den leder dessutom till en större praktisk nytta, eftersom det är bra att kunna räkna snabbt och säkert i det dagliga livet. Man kan här notera hur Johansson förknippar en tämligen disparata mål med talsortsmetoden.

För det fjärde poängterar Johansson vikten av att räknande föregås av en ”ordentlig förberedelse”. Med detta syftar Johansson på en förberedelse ordnad av läraren. ”Hvar och en, som något sysselsatt sig med räkneundervisning”, skriver han

> vet också huru lönlöst det är att i vanlig mening börja undervisa barnen i något räknesätt, om de ej fått en viss förberedelse derför, ty icke en tiondel af hvad läraren säger fastnar qvar hos dem. De, så väl som sjelfva läromaterialet, måste bearbetas för den följande undervisningen, likasom man bereder jorden, innan man utsår säden.[94]

Metaforiken passar bra med bildningsbegreppet. Förberedelsearbetet består först och främst i åskådning med tillhjälp av konkreta föremål. Främst måste man tillsammans med barnen ta sig an talen 1-9, ”så att de hafva en fast basis att operera på”. Johansson lyfter här fram betydelsen av huvudräkningsövningar, som till att börja med bör ske i nära anslutning till ”åskådningsföremål”.

För det femte bör inget ”pedantiskt regelmakeri” äga rum vid räkneundervisningen. Istället bör barnen ”medelst exempel ledas till insigt af reglerna”. Johansson knyter med andra ord an till den heuristiska metoden. Det faller sig därför naturligt att han poängterar att undervisningens syfte *inte* är att lärjungarna skall räkna så många exempel som möjligt, och att läroböckerna *inte* bör bestå av ”korta regler, uttryckta i ord eller formler för exemplens uppställning och uträkning”. Man bör istället, skriver han, ”lämna alla direkta förklaringar å sido” och istället ”genom antydningar och frågor”

[93] Ibid, s. 15.
[94] Ibid, s. 15.

förmå lärjungen att leta sig fram till reglerna. I en sådan undervisning är eleven inte längre passiv "mottagare av lärarens tankar och idéer", utan får vara produktiv. Han får, skriver Johansson, "vara menniska". Tydligen är människovarandet för Johansson synonymt med aktivitet och produktivitet och tål varken förklaringar eller lyssnande. Han citerar gillande en rad tidigare skolmatematiker vilka förenas i en "skarp, men i allo berättigad protest mot den förnuftslösa 'räknemetod', hvars högsta grundats är att med minsta möjliga ansträngning af tanken uträkna ett problem".[95] Att räkna bör enligt Johansson kräva ansträngning.

Som sjätte punkt tar Johansson upp nödvändigheten av att inskränka antalet av de många "räknesätten". Minns samma önskemål hos till exempel Celsius på 1740-talet och Almqvist på 1830-talet. Utöver de argument som framfördes då har nu ett nytt tillkommit. Det rör indelningen av de elever som undervisas i "räknelag". Johansson konstaterar nämligen att det är påtagligt att "ju fler räknesätt man har, desto flere afdelningar får man, och åt desto flere håll måste lärarekrafterna delas". Och detta problem blir än större, i den mån "blott några få exempel vid de särskilda räknesätten förekomma".[96] Då måste läraren skynda mellan olika grupper av elever som blivit "klara" med de korta avsnitt i räkneboken som hör till varje räknesätt. Av denna anledning är det, skriver Johansson, *nödvändigt* med en inskränkning. Här syns alltså återigen hur undervisningspraktiken får fungera som utgångspunkt för läroböckernas utformning.

För det sjunde, skriver Johansson, måste övningsexemplen vara "praktiska". Detta på grund av att skolan skall förbereda för livet, inte för "examen". I detta avsnitt talar Johansson mindre om bildning än om praktisk nytta. Genom "obenämnda tal" kan lärjungarna i och för sig lära sig multiplicera och dividera, men knappast att *använda* matematiken i det praktiska livet. Intressant nog tar Johansson sedan genast upp en annan fördel med att uppgifterna knyter an till det dagliga livet, nämligen att de har "den stora förtjensten, att de roa barnen och bidraga således till att göra ämnet intressant".

I sin sista och åttonde punkt knyter Johansson an till den heuristiska metoden så som den framställdes av framför allt Nyström och senare Nordlund. Han betonar nämligen vikten av att lärjungarna kan "redogöra för sitt förfarande". De skall inte få "skriva en siffra", förklarar Johansson, "utan att kunna svara på frågan hvarför". Samma regler bör gälla även huvudräkningen – man måste kunna redogöra för hur man tänkt! Här återkopplar Johansson till det han skrev i sin inledning – att undervisningens syfte, förutom att vara till praktisk nytta, är att *bilda* lärjungarna. Genom att de tvingas ställa upp sina exempel med matematikens tecken, tala om vad de gjort och på så sätt "komma till fullt medvetande af sin handling", kan

[95] Ibid, s. 18.
[96] Ibid, s. 28.

aritmetiken fylla denna bildande funktion och, skriver han, på så sätt utgöra ”folkskolans logik”.[97]

Gammalt möter nytt

Under 1880-talet genomfördes två granskningar av läroböcker för folkskolan. Först en granskning 1883 på initiativ av Stockholms folkskollärarförening.[98] Sedan en statligt sanktionerad granskning vars utlåtande publicerades 1887.[99] Bland annat granskades många av de böcker som kom ut under 1850-talet. Granskningarnas utlåtanden utgör därför, tillsammans med de talrika läroboksrecensionerna, ett ypperligt redskap för att förstå hur skolmatematiken 1880 skiljde sig från den 1850. Jag skall här redogöra för vad man hade att säga om två läroböcker i räkning: den ena författad av C. A. Nyström 1853, den andra av P. A. Siljeström 1866.

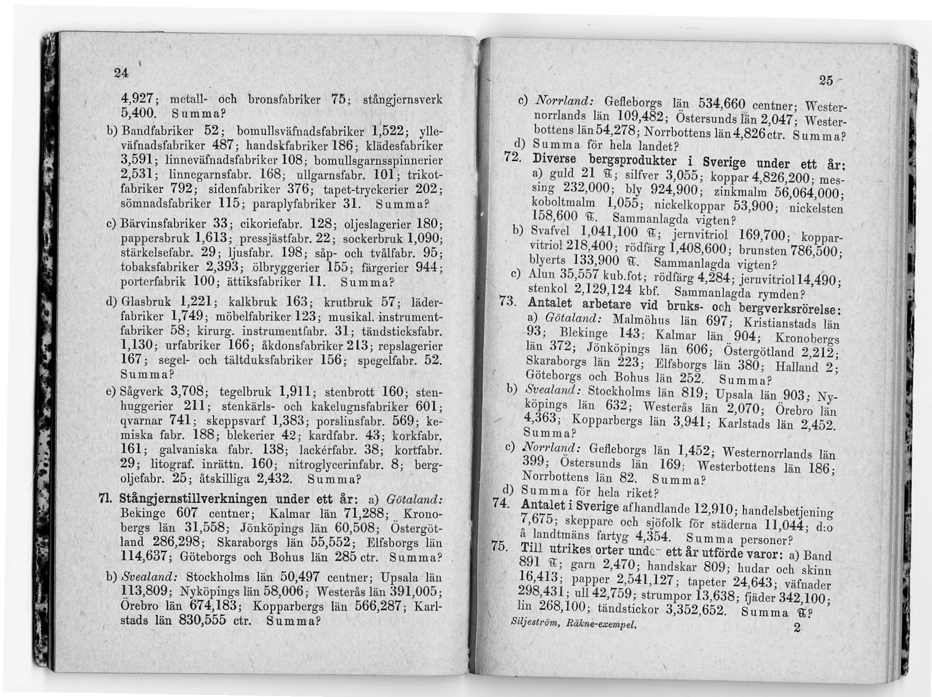
Siljeström

1866 gav Siljeström ut två böcker: *Lärobok i räknekonsten, till Folkskolornas tjenst utarbetad* och *Lärobok i aritmetik, till skolornas tjenst utgifven.*[100] Man kan av dessa böcker dra vissa generella slutsatser rörande hans syn på skolans matematik. Ambitionen är uppenbarligen att så långt möjligt lära eleverna *matematik.* Undervisningen måste förvisso anpassas till ”barnets ståndpunkt”, det vill säga ”åskådningens” ståndpunkt, men målet ligger bortom både barnet och skolan. ”Så vidt ske kunnat”, skriver han, ”har samma betecknings- och uttryckssätt som i algebran blifvit begagnadt, och framförallt har ett flitigt bruk gjordts av likhetstecknet, till framhållande och inpräglande af eqvations-begreppet”, och vidare: ”Så som divisionstecken har alltigenom användts bråktecknet, för att sålunda desto mer inskärpa den viktiga sanningen, att hvarje bråk kan anses såsom en tecknad division och tvärtom: hvilket icke framstår lika klart, om olika beteckningar nyttjas”.[101] Skolan skall, enligt Siljeström, använda samma beteckningar som används i matematiken – detta är viktigt, för det kontrasterar mot många samtida och senare skolmatematikers ståndpunkt att matematiken i sin helhet bör anpassas till barnen och skolan. Nyström ville till exempel, som vi sett ovan, ”ställa sifferräkneläran på egen botten”, det vill säga göra den till en separat och ”avrundad” helhet, användbar i sin egen rätt, tjänande som förberedelse för matematiken, vilken skulle komma först senare. Nordlund såg skolmatematiken som ett autonomt redskap för förståndsbildning – så att säga härlett från den vetenskapliga matematiken, men likväl fristående.

---

[97] Ibid, s. 32.
[98] Dalström, et al., *Granskning af läroböcker i aritmetik.*
[99] *Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande*, .
[100] Per Adam Siljeström, *Lärobok i räknekonsten til folkskolornas tjänst*, Stockholm, 1866.
[101] Ibid, förord.

En andra aspekt av Siljeströms skolmatematiska gärning som skiljer honom från mängden är hans försök att göra undervisningen i matematik vad man kan kalla ”faktaförmedlande”. I sin *Samling av räkne-exempel, till Folkskolornas tjenst* från 1870, som i undertiteln stoltserar med hela *1100 exempel i de fyra räknesätten med hela tal*, har han uteslutande använt riktig, statistisk information som material för uppgifterna.[102] Man får i denna bok lära sig om allt mellan himmel och jord. Ett flertal exempel ges i figuren nedan:



24

4,927; metall- och bronsfabriker 75; stångjernsverk 5,400. Summa?

b) Bandfabriker 52; bomullsväfnadsfabriker 1,522; ylleväfnadsfabriker 487; handskfabriker 186; klädesfabriker 3,591; linneväfnadsfabriker 108; bomullsgarnsspinnerier 2,531; linnegarnsfabr. 168; ullgarnsfabr. 101; trikotfabriker 792; sidenfabriker 376; tapet-tryckerier 202; sömnadsfabriker 115; paraplyfabriker 31. Summa?

c) Bärvinsfabriker 33; cikoriefabr. 128; oljeslagerier 180; pappersbruk 1,613; pressjästfabr. 22; sockerbruk 1,090; stärkelsefabr. 29; ljusfabr. 198; såp- och tvålfabr. 95; tobaksfabriker 2,393; ölbryggerier 155; färgerier 944; porterfabrik 100; ättiksfabriker 11. Summa?

d) Glasbruk 1,221; kalkbruk 163; krutbruk 57; läderfabriker 1,749; möbelfabriker 123; musikal. instrumentfabriker 58; kirurg. instrumentfabr. 31; tändsticksfabr. 1,130; urfabriker 166; åkdonsfabriker 213; repslagerier 167; segel- och tältduksfabriker 156; spegelfabr. 52. Summa?

e) Sågverk 3,708; tegelbruk 1,911; stenbrott 160; stenhuggerier 211; stenkärls- och kakelugnsfabriker 601; qvarnar 741; skeppsvarf 1,383; porslinsfabr. 569; kemiska fabr. 188; blekerier 42; kardfabr. 43; korkfabr. 161; galvaniska fabr. 138; lackérfabr. 38; kortfabr. 29; litograf. inrättn. 160; nitroglycerinfabr. 8; bergoljefabr. 25; åtskilliga 2,432. Summa?

71. **Stångjernstillverkningen under ett år:** a) *Götaland:* Bekinge 607 centner; Kalmar län 71,288; Kronobergs län 31,558; Jönköpings län 60,508; Östergötland 286,298; Skaraborgs län 55,552; Elfsborgs län 114,637; Göteborgs och Bohus län 285 ctr. Summa?

b) *Svealand:* Stockholms län 50,497 centner; Upsala län 113,809; Nyköpings län 58,006; Westerås län 391,005; Örebro län 674,183; Kopparbergs län 566,287; Karlstads län 830,555 ctr. Summa?

25

c) *Norrland:* Gefleborgs län 534,660 centner; Westernorrlands län 109,482; Östersunds län 2,047; Westerbottens län 54,278; Norrbottens län 4,826 ctr. Summa?

d) Summa för hela landet?

72. **Diverse bergsprodukter i Sverige under ett år:** a) guld 21 ℔; silfver 3,055; koppar 4,826,200; messing 232,000; bly 924,900; zinkmalm 56,064,000; koboltmalm 1,055; nickelkoppar 53,900; nickelsten 158,600 ℔. Sammanlagda vigten?

b) Svafvel 1,041,100 ℔; jernvitriol 169,700; koppar-vitriol 218,400; rödfärg 1,408,600; brunsten 786,500; blyerts 133,900 ℔. Sammanlagda vigten?

c) Alun 35,557 kub.fot; rödfärg 4,284; jernvitriol 14,490; stenkol 2,129,124 kbf. Sammanlagda rymden?

73. **Antalet arbetare vid bruks- och bergverksrörelse:** a) *Götaland:* Malmöhus län 697; Kristianstads län 93; Blekinge 143; Kalmar län 904; Kronobergs län 372; Jönköpings län 606; Östergötland 2,212; Skaraborgs län 223; Elfsborgs län 380; Halland 2; Göteborgs och Bohus län 252. Summa?

b) *Svealand:* Stockholms län 819; Upsala län 903; Nyköpings län 632; Westerås län 2,070; Örebro län 4,363; Kopparbergs län 3,941; Karlstads län 2,452. Summa?

c) *Norrland:* Gefleborgs län 1,452; Westernorrlands län 399; Östersunds län 169; Westerbottens län 186; Norrbottens län 82. Summa?

d) Summa för hela riket?

74. **Antalet i Sverige** afhandlande 12,910; handelsbetjening 7,675; skeppare och sjöfolk för städerna 11,044; d:o å landtmäns fartyg 4,354. Summa personer?

75. **Till utrikes orter under ett år utförde varor:** a) Band 891 ℔; garn 2,470; handskar 809; hudar och skinn 16,413; papper 2,541,127; tapeter 24,643; väfnader 298,431; ull 42,759; strumpor 13,638; fjäder 342,100; lin 268,100; tändstickor 3,352,652. Summa ℔?

Siljeström, Räkne-exempel. 2

Figur 6. Ett uppslag i Siljeströms *Samling af räkne-exempel* från 1870. Siljeströms ville att räkneundervisningen skulle vara bildande i en faktaförmedlande bemärkelse. Han fyllde därför sin räknebok med ”sanna” statistiska uppgifter. Karaktäristiskt är emellertid att själva de problem som eleverna skulle lösa för den sakens skull inte nödvändigtvis var realistiska i räknekonstens bemärkelse. Siljeström tog sig till och med friheten att ändra lite i de statistiska uppgifterna, för att göra dem bättre lämpade som föremål för övningar på räkning. De statistiska uppgifterna var nämligen ofta avrundande, vilket gjorde uträkningarna allt för enkla för Siljeströms syften.[103]

Vid denna tid 1870, och särskilt något framåt 1890 när folkskollärarna tagit plats i diskussionen, var övningsuppgifternas utformning ett hett diskussionsämne. Deras faktaförmedlande potential var en aspekt av denna diskussion.

[102] Siljeström, *Samling af räkne-exempel till folkskolornas tjenst: första häftet innehållande omkr. 1100 exempel i de fyra räknesätten med hela tal: med svar.*
[103] Ibid, s. 1.

Tre recensioner av Siljeströms räkneböcker ger en bild av skolmatematikens förändring under 1870-talet. Den första recensionen handlar om Siljeströms *Samling av Räkneexempel till Folkskolornas tjenst* som kom ut 1870. Knut Kastman, som recenserar, är mycket positiv.[104] Han menar att boken fyller ett stort tomrum – nämligen när det gäller just samlingar av räkneexempel lämpade för folkskolans behov. Kastman beskriver i sin recension hur han skulle önska att dylika exempelsamlingar var uppställda. Av denna beskrivning framgår att skolmatematiken just då var stadd i ganska kraftig förändring. Det första önskemålet är nämligen att regler framställs ”ej förklarade och utvecklade – utan i största korthet vid de respektive exemplen”, det andra önskemålet är att dessa regler skall följas av ”abstrakta tal för inöfvandet af sjelfva räkneoperationerna”.[105] Kastman vill med andra ord att exempelsamlingarna skall ha ungefär samma struktur som Zweigbergks räknelära, ett synsätt som redan 1871 av många måste ha ansetts vara tämligen förlegat. Till dessa önskemål lägger Kastman sedan i och för sig att uppgifterna skall vara ”strängt systematiskt ordnade”, gå ”från enklare till mera komplicerade”, och så vidare. Likväl ger han reglerna en central plats i exempelsamlingen. Denna uppställning kontrasterar skarpt mot de ståndpunkter hos Velander och Johansson som jag redogjorde för ovan.

Den andra recensionen är från 1874 och handlar om andra upplagan av samma samling av räkneexempel. Den första upplagan innehöll 1100 exempel, i den andra har antalet ökats till 1400. Den korta recensionens första mening lyder: ”De på senare tid af flere författare utgifna goda och värderika exempelsamlingar utgöra ett glädjande tecken till en pågående revolution i sättet att undervisa i räkning”. Karaktäristiskt för revolutionen är framför allt det ökande antalet exempel och recensionen fortsätter: ”Vi hoppas, att det gamla sättet med dess mekaniska inlärande af en mängd konstiga regler och dessas tillämpning på långa och tidsödande abstrakta siffertal snart skall öfverallt i våra folkskolor kunna lemna rum för en förnuftigare och mera praktisk behandling af det viktiga läroämnet”.[106]

Den tredje recensionen är från 1883 och handlar om Siljeströms *Lärobok i Aritmetik*. Den tillhör nu, enligt recensenten, skolmatematikens förflutna. Kanske var den, skriver recensenten, ”på sin tid en banbrytare på detta undervisningsområde”.[107] ”Nekas kan emellertid icke”, fortsätter han, ”att flere bland de öfriga under senare åren utgifna läroböckerna i aritmetik synas hafva tagit försprånget, särskildt beträffande ämnets metodiska behandling”. Och vad var då felet? Jo, att exemplen inte är ”systematiskt” ordnade. Risken

[104] Knut Arvid Kastman, ”Samling af Räkneexempel, till Folkskolornas tjenst utgif.”, *Tidning för Folkskolan*, 1871.
[105] Ibid.
[106] Knut Arvid Kastman, ”Samling af Räkneexempel, till Folkskolornas tjenst utgif.”, *Tidning för Folkskolan*, 1874.
[107] M., ”Lärobok i Aritmetik. Till skolornas tjenst utgifven af P. A. Siljeström”, *Svensk Läraretidning*, 1883.

syntes påtaglig att deras oregelbundet varierande svårighetsgrad skulle tvinga lärjungarna att allt för ofta ta lärarens uppmärksamhet i anspråk. Siljeströms lärobok var inte i tillräckligt hög utsträckning anpassad till undervisningens praktik.

Nyström

C. A. Nyström var med sin *Försök till Lärobok i Aritmetik* publicerad 1853 en av de första som försökte bryta med det zweigbergska paradigmet för räkneundervisning.[108] Hans credo lydde: eleverna måste veta vad de gör! Att veta betydde för honom att förstå räknesättens grund, vilket i sin tur innebar att kunna ”bevisa” dem. Därför fick hans elever inte räkna några uppgifter, innan de kunde redogöra för *varför* uppgifterna kunde lösas på det ena eller andra sättet. Räkneundervisningen skulle bestå i en dialog mellan lärare och elev, genom vilken läraren, som Nyström själv uttryckte det, ”skruvade” eleven genom bevisen.[109] Nyströms lärobok blev mycket populär – dess 18 upplagor fram till 1896 pekar mot att hans syn på räkneundervisning hade stor spridning.

Som vi sett ovan riktades emellertid samtidigt kritik mot denna ”heuristiska” metod. Nyström försök till lärobok var en av de böcker som granskades av Stockholms folkskollärareförening 1883. Deras utlåtande lyder i sin helhet:

> Detta arbete, som genom den heuristiska metodens användande vid lösningen af s.k. regula de tri m.fl. frågor reformerande ingripit i räkneundervisningens metodiska behandling och som innehåller en större samling värdefulla öfningsexempel, torde dock inom folkskolan ej komma till någon vidsträcktare användning, ity att detsamma upptager en mängd synnerligen långa regler, beskrifningar och resonnemang, hvilket allt gör boken både vidlyftig och dyr.[110]

Kanske var det denna kritik som ledde honom att 1884 publicera en *Räknelära för folkskolor* speciellt avpassad för folkskolans undervisning.[111] Denna recenserades i *Svensk Läraretidning*. Recensionen inleds med ett allmänt erkännande av själva ambitionen att skriva en lärobok för folkskolan. Sedan börjar kritiken. Boken har två delar, en textavdelning och en exempelavdelning. Det kunde väl vara gott och väl. Men i så fall, menar recensenten, borde givetvis textavdelningen rikta sig till läraren. Så har emellertid inte Nyströms tänkt. Recensenten konstaterar att även denna avdelning ”tydligen [är] företrädesvis afsedd för eleven”. För *om* läraren skulle anses vara i behov av denna typ av förklaringar, ”innebure detta att bevis för

---

[108] Nyström, *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran.*

[109] Jmf. not 33, s. 90, angående relationen mellan denna metod och det under 1970-talet upptäckta fenomenet lotsning.

[110] Dalström, et al., *Granskning af läroböcker i aritmetik*, s. 35–36.

[111] Carl Alfred Nyström, *Räknelära för folkskolor*, Stockholm, 1884.

hans inkompetens att undervisa i förevarande ämne". Vad recensenten vänder sig mot är alltså frånvaron av tydlig gräns mellan lärare och elev. Texten är för svår för eleven, men för lätt för läraren. Denna omständighet får sedan negativa konsekvenser även för exempelsamlingen. För genom att den ansluter sig till textdelen, är den så att säga inte sig själv nog. Vi känner vid det här laget igen synpunkten: boken tvingar lärjungen att "i hvarje förekommande fall anlita lärarens biträde och sjelf i allmänhet blott blifva den passive". När det gäller exempelsamlingen är alltså felet det motsatta jämfört med Zweigbergks regler: här är anvisningarna för *få* – "Har undervisningen förr ofta inskränkt sig till ett upprabblande af regler och definitioner, så synes nu en motsatt ytterlighet vara för handen". Det vill säga: skriftlig heuristik, att eleven på egen hand skall kunna ta sig fram genom övningsexemplen, kräver inte bara att dessa är ordnade på ett systematiskt sätt. Den skriftliga heuristiken kräver även "ledningar", små anvisningar till hur exemplen kan lösas. Sådana saknades i Nyströms exempelsamling. Recensenten kan inte dra någon annan slutsats att Nyströms kombination av textavdelning med exempel bäst lämpar sig för "sjelfstudium", men som sådan "torde den i våra dagar hafva allt för liten betydelse, alldenstund den elementära räknekunskapen med högst få undantag inhemtas i skolorna".[112] Denna kommentar är träffande: Nyströms räknelära knyter faktiskt an till de äldre räknelärorna så till vida att den faktiskt innehåller allt det man behöver veta för att kunna räkna, tillsammans med bistånd att lära sig det. Så skulle läroböckernas inte se ut på 1880-talet.

Nyströms textavdelning är relativt teoretisk. För Nyström stod förståelse av teori i motsats till mekanik. Förstår man teorin, menade han, räknar man inte mekaniskt. Recensenten drar en annan gräns mellan teori och mekanik när han skriver: "Sålunda förefaller läran om bråk vara allt för teoretisk, stundom gränsande till det rent mekaniska".[113] Här blir det tydligt att mekaniken är, så att säga, utspridd, på flera platser vid sidan om "den gyllene medelvägen" (ett uttryck som recensenten också använder) – både i det allt för myckna räknandet, men även i det överdrivna läsandet.

Den avslutande kritiken rör Nyströms användande av ganska stora tal i exempelsamlingen. Man skulle kunna göra en undersökning som visade att den totala summan av de tal eleven mötte 1850 respektive 1880 under ett år i folkskolan var ungefärligen konstant: ty uppgifternas antal ökades precis samtidigt som talens storlek krympte. Nyström anpassade sig emellertid inte till denna trend. Detta faktum beskriver recensenten som att han "förbisett elevens låga ståndpunkt och den stora betydelse för framgången af undervisningen allra helst på detta stadium, som ligger deri, att exemplen innehålla små tal och äro många till antalet".[114] Nyström såg exemplen med

[112] -Id-, "Räknelära för folkskolor af C. A. Nyström", *Svensk Läraretidning*, 1884, s. 321.
[113] Ibid, s. 322.
[114] Ibid.

stora tal som övningar på att använda aritmetikens algoritmer, i linje med det synsätt som genomsyrade de äldre räknelärorna. Recensenten ser istället de stora talen som redskap att ”mörda tiden och döda intresset”.[115]

Granskningskommittén vars utlåtande publicerades 1887 var än mer kritisk mot Nyströms *Räknelära för folkskolor.*[116] De använde uttrycket ”mekaniskt” tio gånger på recensionens fem sidor. Drar man samman dessa stycken, tillsammans med liknande, som istället använder begrepp som ”onaturlig” och ”konstgrepp”, får man följande:

> [...] tankedödande mekanism [...] mekaniska föreskrifter [...] måste förefalla lärjungarna såsom ett rent konstgrepp [...] i allmänhet är behandlingssättet mekaniskt [...] de många mekaniska föreskrifterna i textafdelningen [...] i högsta grad mekanisk [...] inpregla i minnet [...] denna minneskunskap [...] högst mekanisk [...] och af åtskilliga andra mekaniska åtgärder [...] alltigenom mekanisk och svårfattlig [...] Språket bär i allmänhet spår af det mekaniska framställningssättet [...] regler med vidlyftiga förklaringar och i allmänhet bär svår af ett mekaniskt behandlingssätt [...][117]

Låt mig, istället för att redogöra för granskningen, utgå från vad Nyström själv hade att säga om kritiken. Våren 1888 hade *Svensk Läraretidning* särskilda bilagor enbart för diskussionen kring folkskolans räkneundervisning. En av dessa bilagor bestod till stor del av en ”Vidräkning med kommiterade för granskning af folkskolans läroböcker” författad av Nyström.[118]

Hans vidräkning kretsar nästan uteslutande kring vad det egentligen betyder att något är ”mekaniskt”. På två sätt är denna vidräkning unik: för det första gör den problematiken kring användandet av begreppet ”mekaniskt” explicit, för det andra visar den ganska exakt på hur skolmatematikens förändring mellan 1850 och 1890 hänger samman med en förskjutning av innebörden av det mekaniska. Av det Nyström skriver kan man identifiera åtminstone sex olika förskjutningar av innebörden av vad det innebär att något är mekaniskt.

1. Teoretiska förklaringar. Nyström såg teoretiska förklaringar som medel att förhindra att räknande utförs mekaniskt, ”enär det för den mekaniska räkningen kännetecknande just är bristande förmåga att kunna framlägga skälet, hvarför man går till väga på det eller det sättet”. Så icke längre. Eftersom lärjungarnas ståndpunkt är så låg, menar man nu, blir den typ av

---

[115] Ibid.

[116] Denna kommitté var för övrigt synnerligen kritisk mot de allra flesta läroböcker i räkning. Den kritiska hållningen var tydligen inte begränsad till enbart detta ämne. Av de 35 granskade böckerna för undervisning i kristendom godkändes *ingen* (Richardsson, *Kulturkamp och klasskamp. Ideologiska och sociala motsättningar i svensk skol- och kulturpolitik under 1880-talet*, s. 324).

[117] *Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande. Räkning*, s. 62–67.

[118] Nyström, ”Vidräkning med kommitterade för granskning af folkskolans läroböcker”.

redogörelser Nyström talar om, endast ”tomma ord”. Precis på samma sätt som lärjungarna, när de räknar mekaniskt, inte förstår vad de gör, blir även dessa redogörelser mekaniska, eftersom lärjungarna inte förstår vad de pratar om.

Nyström erkänner att han ibland ”kan hafva behandlat vissa delar mera vidlyftigt, än för mången kan synas nödigt”, men frågar: ”månne någon skada skett derigenom?”[119] Han sätter därmed fingret på en central aspekt av den nya skolmatematiken, nämligen dess omsorg om lärjungarna, vilken bland annat tog sig uttryck i ambitionen att aldrig låta dem ens i förbigående se eller höra något som inte var avpassat just för dem och deras ståndpunkt. Vi minns Fineman och hans genetiska lärokurser som skulle vara ”concreta, genetiskt förenande Theori och Practik, så att Lärjungen, utan genomgången abstractionsprocess, [kunde] fatta det hela [och] oafbrutet likasom lefva i detsamma”.[120] Finemans syfte var att förhindra abstraktion och forma eleverna till ”olärda”. Den skriftliga heuristikens företrädare talade om helt andra syften, som att forma talbegrepp och att hålla eleverna sysselsatta. Det är emellertid inte svårt att se likheten mellan ambitionerna, att hålla det diskursivt förmedlade budskapet under kontroll, att servera det i små portioner som delar av ett strikt reglerat praktiskt sammanhang – motsatsen till räknelärornas öppna överlämnande av räknekonsten till vem som helst (jmf s. 14ff ovan).

Nyström förespråkade användande av en muntlig heuristik för att få lärjungarna att förstå. Paradoxalt nog ser han skolmatematikens utveckling som en rörelse mot *mer* ”teoretiserande” än det han själv förespråkade. Nyström menar nämligen att man bör avbryta heuristiken när lärjungarna (helst av sig själva, men oftast med lärarens hjälp) ”sjelf upptäckt” regeln för ett visst räknesätt. Han går så att säga på djupet med teorin men lämnar den sedan, när lärjungarna väl förstått. Då är tiden inne att ge lärjungarna den explicit formulerade regeln och övergå till övning på dess användning. Denna punkt av definitiv förståelse ser man inte längre inom skolmatematiken. Den har bytts ut mot en formande process som är kontinuerlig, omedveten, och alltid möjlig att driva ett steg längre. Talbegreppet antas ta form genom elevens praktiska arbete, men bara i samma mån som eleven *inte* känner till grunden för sitt förfaringssätt – det vill säga regeln.

2. *Algoritmer och regler.* Skillnaden mellan de två synsätten blir tydligare om vi går några decennier framåt i tiden, till Edward Thorndikes *The psychology of arithmetic* från 1922.[121] Thorndike utgår från en modell av tänkandet där ”associationer” spelar en central roll. Det rör sig till exempel om associationen mellan ”2+2” och det riktiga svaret ”4”. Precis som bildningstänkandets talbegrepp är dessa associationer enligt Thorndike något

---

[119] Ibid, s. 118.
[120] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation.*
[121] Edward L. Thorndike, *The psychology of arithmetic*, New York, 1922.

som måste formas över tid. Liksom den tidigare eftersträvade bildningen är de väsentligen omedvetna, och liksom bildningstänkandets förmågor var *övning* det enda medlet att forma dem. Givet detta teoretiska ramverk blir det begripligt hur vetskapen om en *regel* kan betraktas som ett hinder. För om man känner regeln behöver inte tänkandet tas i anspråk, just det tänkandet som hos Thorndike bidrar till att forma associationer, och hos 1880-talets skolmatematiker ansågs leda till formandet av riktiga talbegrepp.

Nyström anslöt sig inte till detta synsätt. Han såg istället det heuristiska förfaringssättet som en förberedelse, som en väg mot insikt och förståelse, vilken sedan tryggt kunde ersättas av effektiv tillämpning av matematikens regler och formler. Nyströms *börjar* alltså med muntlig heuristik. ”Men härmed bör ej fortsättas”, skriver han,

> längre, än till dess att lärjungen, under lärarens medverkan, sjelf likasom utfunnit den erforderliga regeln, hvilken derefter utan all tvekan tillämpas sådan den bör vara att i läroboken återfinna under en mera koncis form.[122]

Att räkna är alltså för Nyström att följa (matematikens) regler. Dessa regler kan man förstå. Förstår man dem följer man dem inte mekaniskt. Inte desto mindre finns de där att följa. Nu får sådana regler över huvud taget inte längre förekomma. De är i sig själva – förstådda eller inte – uttryck för mekanik. Har man ett riktigt talbegrepp, menar man nu, behövs inga regler.

3. *Uträknade exempel.* Liksom regler kan uträknade exempel ”följas”. För Nyström, liksom i de äldre räknelärorna och även i Zweigbergks räknebok, spelar uträknade exempel en central roll för att klargöra reglernas innebörd och användning. Nu skulle alltså reglerna bort. Man kunde tänka sig att de uträknade exemplen då skulle ta deras plats. Inte alls. Lärjungarna skall ledas framåt, steg för steg, via *eget* arbete, och ledningar för hur detta arbete skulle utföras. Ett exempel markerar, så kan man förstå det, en punkt längre fram på vägen, att sträva mot. Sådana punkter kan nu inte längre tillåtas och det är inte svårt att förstå varför: de ligger bortom elevens ståndpunkt.

4. *Minnet.* Nyström använder ibland, trots hans totala avståndstagande från den ”memorering” av regler som tillskrivs Zweigbergk, ordet ”minne”. Granskarna kritiserar här helt enkelt Nyströms språkbruk, som de menar ”bär spår af det mekaniska framställningssättet”. Ordet minne har, kan man säga, blivit tabu. Detta hänger givetvis samman med talbegreppet, som per definition är helt oberoende av minnet. Bilden som framträder, är av lärjungen som långsamt rör sig längs lärogången, omedveten både om vad som ligger framför honom och vad han passerat. Rörelsen formar honom, bildar honom, och i detta ligger dess syfte.

5. *Praktiska anvisningar.* Nyström är till synes perplex, och skriver:

[122] Nyström, ”Vidräkning med kommitterade för granskning af folkskolans läroböcker”, s. 114.

> Särskildt är det mig obegripligt, hvad kommiterade syfta på, då de här återigen tala om "mekaniska föreskrifter". Skulle de härmed afse anvisningarna för de i ett exempel förekommande sifferuppgifternas uppskrifvande på ett sådant sätt att de bli lättare öfverskådliga än i sjelfva exempeltexten? Man skulle då ej heller få anvisa lärjungen att för underlättandet af uträkningen vid addition och subtraktion uppskrifva talen så, att samma slags enheter [...] komma öfver och under hvarandra.[123]

Det är en riktig observation: denna typ av anvisningar har, liksom ordet minne, blivit tabu. Sådant hör, menar man nu, inte till matematiken. Nyströms beskrivning för hur man kan hantera sorter, konstaterar han, "förefaller kommitterade så främmande för all matematisk metod, att de hänföra detsamma till 'konstgrepp'". Problemet för de kommitterade är att Nyströms beskrivning huvudsakligen är praktisk. Man kan säga att Nyströms rör sig med en distinktion, mellan den matematiska teorin, och dess praktiska användning. När man väl förstått teorin, bör man, menar han, självklart sträva efter det mest praktiska sättet att använda den. Nyströms ståndpunkt är, att om:

> lärjungen, i den mån han utvecklar sin förmåga att raskt och säkert verkställa förekommande räkneoperationer, skulle fästa mindre vigt vid den teoretiska grunden för sitt förfarande, så vore dock mycket vunnet, ty sjelfva räknesäkerheten värderas i och för sig med rätta högt och bör derföre i skolan ingalunda skjutas undan.[124]

För de kommitterade ligger tvärtom det bildande hos matematiken inte minst i dess användning, vilket gör att även denna måste utformas efter bildningens krav.

6. Siffror. Den fullständiga titeln på Nyströms första bok lyder *Försök till lärobok i Aritmetik eller Siffer-Räknelära med talrika öfningsexempel och särskildt häftad Facitbok.* Som vi sett ville Nyström ställa räkneläran "på egen botten", genom att ge dess räknesätt grundliga bevis – utan användande av algebra. Nyström har, skriver han, "från början sökt grunda [sin] framställning af räkneläran uteslutande på *lagen för tals betecknande medelst siffror*".[125] De kommitterande talar mycket om talbegreppet, men, skriver Nyström, "endast på talbegreppet, såsom sådant, lärer någon räknelära ej kunna uppkonstrueras". För de kommitterade spelar emellertid just siffrorna en allt för central roll i Nyströms räknelära. Man måste, menar de, skilja mellan tal och siffra, och det är talet som skall stå i undervisningens centrum. Nyström har förstått att det är "den allra nyaste uppfinningen" *talsorter*, som man menar

[123] Ibid, s. 115.
[124] Ibid, s. 114.
[125] Ibid, s. 117.

gör det möjligt att omsätta denna ambition i praktisk undervisning. Detta nya sätt att tala om matematik använder emellertid inte Nyström.

I sin vidräkning undrar han om det inte varit mer fruktbringande om de kommitterade kommit ut med en egen räknebok och på så sätt visat hur sina grundsatser borde tillämpas – än som nu uteslutande ägna sig åt kritik. Ntström visste då inte att en av de kommiterade, J. E. Johansson, faktiskt kommit ut med en lärobok som, i och med att han ingick i kommittén, rimligtvis måste utgöra ett sådant exempel på hur grundsatserna borde tillämpas. Följaktligen ägnas en bilaga till Svensk Läraretidning i april 1888 åt en av Nyströms författad granskning av "J. E. Johanssons 'Räknelära' och folkskolekommitterades 'utvecklande metod' m.m.".[126]

Om hans vidräkning kretsade kring innebörden av den "mekanik" som han så många gånger anklagats för, handlar hans granskning här om vad som kan åsyftas med "utvecklande metod". Nyström inleder emellertid med en kritisk granskning av Johanssons användande av "talsortsbegreppet", som ju stod i centrum för granskningskommitténs grundsatser. Vad han konstaterar är kort sagt att detta nya sätt att tala – precis som Nordlund också konstaterade – innebär att vissa problem försvinner, men att andra tillkommer. Typiskt för detta fenomen är begreppet "antalsenhet", som Johansson nödgas använda. Den relativt blygsamma slutsats Nyström drar är att det inte är självklart att den nya terminologin kommer att verka till lärjungarnas fördel.

Vad Nyström är mest intresserad av är emellertid, som sagt, att genom Johansson bok ta reda på "hvad kommitterade afse med den 'utvecklande metod', som utgör den röda tråden i deras betänkande". Nyströms kommentar angående de första 15 sidorna av Johanssons bok är karaktäristiskt för hans slutomdöme, nämligen att den för honom ter sig som – "exercis". Johansson förbereder och inleder med hjälp av enkla uppgifter – på så sätt skall lärjungarna utvecklas. Men sedda ur ett annat perspektiv, till exempel Nyströms, blir dessa uppgifter givetvis blott mekanik.

Nyström utgår från sin egen grundats; att lärjungarna skall förstå vad de gör. Och då ter det sig föga utvecklande att eleverna i Johanssons bok inte får förklarat för sig vad *siffrorna* betyder, och hur *siffersystemet* är uppbyggt. Den "överenskomna lagen" för hur vi betecknar tal, skriver han,

> hade väl kunnat i boken uttalas i tydligare ord, så att man ej behöft af hvad som förekommer uti allmänna inledningen söka gissa sig till den i fråga varande konventionela grunden för talbeteckningen, hvilken grund icke kan på heuristisk väg framräsonneras.[127]

Nyckelordet är här "konvention". I granskningen, liksom i Johanssons bok, framstår matematiken som helt befriad från konventioner; den är alltigenom

---

[126] Nyström, "J. E. Johanssons 'Räknelära' och folkskolekommitterades 'utvecklande metod' m.m.".

[127] Ibid, s. 147.

”naturlig”. Den slutsats Nyström drar av Johanssons bok är att: ”denna framställning är mindre utvecklande än i onödiga svårigheter och förvillande uppfattning invecklande”.[128]

Ett nytt läroboksparadigm

Mellan 1850 och 1890 kom det zweigbergkska läroboksparadigmet att ersättas av ett nytt. Den nya sortens räkneböcker bestod uteslutande av en noga uttänkt följd av räkneuppgifter, kombinerade med anvisningar för hur de skulle lösas. De var på ett plan gjorda för att hålla eleverna sysselsatta. På ett annat plan syftade de till bildning. Metoden de implementerade kallades ibland för *skriftlig heuristik.*

Vägen mot den skriftliga heuristiken kan delas in i tre faser. Som utgångspunkt kan tas den syn på huvudräkning som kommer till uttryck till exempel i Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica.*[129] Hos Andersson utgjorde förmågan att räkna i huvudet en del av räknekonsten. Huvudräkning innebar för honom att ha memorerat tabeller och sorter, och genom övning nått en förmåga att i huvudet utföra relativt enkla beräkningar. Nyttan med detta var inte i första hand att kunna svara på räknefrågor helt utan griffel och tavla. De realistiska frågor som räknekonsten syftade till att besvara involverade ofta besvärliga kombinationer av sorter och uträkningar i flera led, som i regel krävde skriftliga algoritmer. Huvudräkning sågs därför istället som ett redskap för att underlätta och snabba upp det skriftliga räknandet.

Den första fasen, i omvandlingen från denna instrumentella syn på huvudräkning till den bildande skriftliga heuristiken, sträcker sig från omkring 1850, fram till mitten av 1870-talet. Den karaktäriseras av att huvudräkning börjar värdesättas som en nödvändig förberedelse för den skriftliga räkningen. O. E. L. Dahm poängterar vikten av huvudräkning i sin *Skolmästarkonst* 1846.[130] Nyström talar om vikten av muntlig förberedelse i förordet till sin *Försök till lärobok i aritmetik eller sifferräkneläran.*[131] Båda menade att det bara var genom att själv muntligen ”upptäcka” sina nya kunskaper, och genom att muntligen kunna ”redogöra” för dem, som de blev riktigt förstådda. Men efter dessa muntliga metoder följde skriftlig räkning. Väsentligt för denna första fas är dels en skarp gräns mellan muntlig och skriftlig räkning, dels att de muntliga övningarna inte fanns tryckta i själva läroboken. Om detta skrev Nyström:

---

[128] Ibid.
[129] Andersson, *Arithmetica tironica.*
[130] Dahm, *Skolmästarkonst. Antydningar för Lärare och Skolinspektörer.*
[131] Nyström, *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran,* förord.

> Ursprungligen hade Utg. ernat att, före hwarje abstrakt framställning af reglorna för werkställandet af något räknesätt, wisa deras konkreta tillämpning genom lätta öfningsexempel, ämnade att med tillhjelp af några widfogade, lätt beswarade frågor af lärjungen uträknas, såsom man säger, i hufwudet, d. w. s. med egen eftertanke och utan regel. Men utom det materiella hindret, ett förökadt omfång och ett följaktligen högre boklådspris, för werkställandet af denna afsigt, har Utg. äfwen insett, att dylika exempel måste till antal och beskaffenhet lämpas olika efter olika förmågor, hwadan de swårligen af läroboken kunna i dessa båda hänseenden bestämmas.[132]

Man ser här hur huvudräkning betraktas som en inledning, vilken som sådan måste anpassas till lärjungen. Huvudräknandet, besvarandet av enkla inledande frågor, måste utgöra en dialog mellan lärare och elev för att kunna fylla sin inledande (och därmed bildande) funktion.

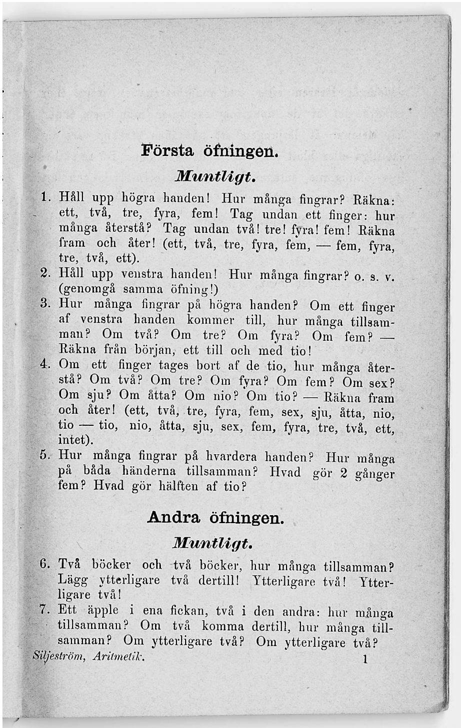
Under den andra fasen börjar de muntliga övningarna tryckas i läroböckerna. A. T. Bergius hade (som titeln anger) särskilda övningar i huvudräkning i sin *Elementarkurs i Räknekonsten, jemte öfningar i Hufvudräkning* från 1850.[133] Att denna bok kom ut redan 1850 visar att faserna överlappade varandra. Inte desto mindre var det först senare som det blev självklart att böckerna skulle innehålla muntliga övningar. Typiska i detta avseende är Siljeströms läroböcker i räkning, vilka alla inleds på det sätt som figuren nedan visar.[134]

---

[132] Ibid, förord.

[133] Axel Theodor Bergius, *Elementarkurs i räknekonsten jemte öfningar i hufvudräkning*, Stockholm, 1850. Han talade även om huvudräkningens betydelse vid det andra allmänna svenska läraremötet i Stockholm 1852, se Sigurd Åstrand (ed.), *Berättelser om de Allmänna Svenska Läraremötena 1852, 1854 och 1863*, Stockholm, 1971, s. 81.

[134] Till exempel Siljeström, *Lärobok i räknekonsten til folkskolornas tjänst.*



Första öfningen.

Muntligt.

1. Håll upp högra handen! Hur många fingrar? Räkna: ett, två, tre, fyra, fem! Tag undan ett finger: hur många återstå? Tag undan två! tre! fyra! fem! Räkna fram och åter! (ett, två, tre, fyra, fem, — fem, fyra, tre, två, ett).
2. Håll upp venstra handen! Hur många fingrar? o. s. v. (genomgå samma öfning!)
3. Hur många fingrar på högra handen? Om ett finger af venstra handen kommer till, hur många tillsamman? Om två? Om tre? Om fyra? Om fem? — Räkna från början, ett till och med tio!
4. Om ett finger tages bort af de tio, hur många återstå? Om två? Om tre? Om fyra? Om fem? Om sex? Om sju? Om åtta? Om nio? Om tio? — Räkna fram och åter! (ett, två, tre, fyra, fem, sex, sju, åtta, nio, tio — tio, nio, åtta, sju, sex, fem, fyra, tre, två, ett, intet).
5. Hur många fingrar på hvardera handen? Hur många på båda händerna tillsamman? Hvad gör 2 gånger fem? Hvad gör hälften af tio?

Andra öfningen.

Muntligt.

6. Två böcker och två böcker, hur många tillsamman? Lägg ytterligare två dertill! Ytterligare två! Ytterligare två!
7. Ett äpple i ena fickan, två i den andra: hur många tillsamman? Om två komma dertill, hur många tillsamman? Om ytterligare två? Om ytterligare två?

Siljeström, Aritmetik. 1

Figur 7. Första sidan i Siljeströms *Lärobok i aritmetik för små nybegynnare* från 1874. Alla Siljeströms läroböcker i aritmetik inleds med dessa muntliga övningar.[135]

Denna andra fas präglades av de tysta övningarnas växande betydelse. De fick till följd att läroböckerna utformades så, att eleverna i större utsträckning än tidigare fick ledningar till hur uppgifterna skulle lösas, samtidigt som större omsorg ägnades åt att ordna uppgifterna så att eleverna inte ställdes frågande – allt för att de inte skulle ta lärarens uppmärksamhet i anspråk. Velander ger principen ett klart uttryck, då han skriver att man bör:

> gå från det empiriska till det rationella, alltså *visa först* och *förklara sedan.* I första årskursen vilja vi derför inrymma *endast anvisningar* till uppställning och uträkning, och dessa anvisningar böra sluta sig till bestämda, valda exempel samt få ej ha formen af abstrakta redogörelse för huru man bör bära sig åt.[136]

I och med att växelundervisningsmetoden började fasas ut, kom eleverna att i allt större utsträckning ägna sig åt läroboken under tystnad. Fortfarande under denna tid betraktade man det tysta räknandet som huvudsakligen

[135] Siljeström, *Lärobok i aritmetik för små nybegynnare*, Stockholm, 1874, s. 1.
[136] Velander, ”Ämnet räkning i folkskolan”, s. 403.

"mekaniskt", även om man, som Velander uttryckte det, givetvis kunde hoppas att en och annan kunskapsbit kunde komma med liksom "på köpet".[137]

Karaktäristiskt för den tredje fasen, som inleds kring mitten av 1870-talet, är att gränsen mellan muntlig förberedelse och efterföljande skriftlig räkning allt mer suddas ut. Istället för två skiljda faser, karaktäriserade av elevens tal respektive elevens tystnad, blir istället så att säga "hela vägen" inkluderad i läroboken. Eleven kan då på egen hand ta sig an en sorts skriftlig form av (extremt enkla) muntliga övningar och därifrån – så var det åtminstone tänkt – röra sig från avsnitt till avsnitt helt på egen hand, med hjälp av ledningar, uträknade exempel och logiskt ordnade uppgifter av långsamt växande svårighet. En senare generations skolmatematiker, Harald Dahlgren, skrev 1905 att de tidigare reglerna, följda av övningsuppgifter,

> mehr und mehr aus dem Gebrauch in den Schulen geschwunden und durch Aufgaben Sammlungen ersetzt worden sind, in welchen man die Aufgaben so geordnet, dass sie Schritt für Schritt die mathematische Kunde der Schüler entwickeln und ihn dabei auch mit Rechenaufgaben des praktischen Lebens verteuer machen werden. Wenn man in diesen Sammlungen von Beispielen Regeln gibt, so sind sie als Zusammenfassungen von dem eingeschaltet, was infolge einer Reihe von Beispielen verstanden sein muss. Die Gedankenfolge ist nicht mehr: mathematische Kenntnis auf praktische Aufgaben angewendet, sondern: mathematische Kenntnis bei und durch Auflösung praktischer Aufgaben. *Die heuristische Methode* ist somit immer mehr zum Durchbruch gekommen.[138]

Dahlgren beskriver här den tanke som låg till grund för de nya böckerna, nämligen att *läroboken* kunde fungera som ett utvecklande redskap – något som man inte hade kunnat acceptera 1850.[139] Skolmatematiken kom i och med detta än tydligare att framställa matematiken som en väg, och den process genom vilken matematiken bemästras som en väl reglerad rörelse från det lättare till det svårare.

---

[137] Ibid, s. 350.

[138] Dahlgren, "Die Mathematik an den Volksschulen und volksschullehrerseminarien Schwedens", s. 15.

[139] I ett längre tidsperspektiv kan man se att denna ambition, att med lärobokens hjälp leda eleven framåt, växte sig allt starkare under 1900-talets första hälft, för att nå ett klimax i de förhoppningar som knöts till *programmerade läromedel* under 1950- och 1960-talen. Detta gäller i synnerhet undervisningen i matematik. I dessa läromedel integrerades elevens självständiga fortskridande med (i bästa fall) metoder med vars hjälp eleven själv kunde mäta sin egen förmåga. På så sätt skapades möjligheter till *vägval*, vilka i praktiken bestod i att eleven valde ett av ett flertal (t.ex. tre) olika räknehäften att fortsätta arbetet i. Den avgörande nyheten i detta skede var just självskattningarna, vilka kan ses som en lösning av ett av de svåraste problemen läroboksförfattarna under 1880-talet hade att brottas med, nämligen att göra uppgifterna lagom svåra – för att på så sätt undvika å ena sidan att eleven blev uttråkad och därmed ofokuserad, och å den andra att hon ställdes frågande och därför krävde lärarens uppmärksamhet. Från 1970-talet förskjöts undervisningsmetodikens ideal åter mot dialog och kommunikation mellan elev och lärare, se t.ex. Andersson, *Läsning och skrivning*, s. 174.

Det finns här anledning att återknyta till räknelärornas sätt att presentera räknekonsten. Där kom reglerna först, följda av kommenterade exempel och ett fåtal övningar. Angående sina övningsuppgifter på tillämpad sammansatt *Regula de Tri* skrev till exempel Roloff Anderson:

> Härefter följa några blandade Öfnings-Exempel, som hwar och en sjelf kan öfwa sig uti, att känna hwad slags exempel det är, och till hwilken förändring hwart och ett hörer. Den som will hafwa flere, kan sjelf formera sig så många och sådana han behagar.[140]

Räknekonsten framställdes i räknelärorna som ett system av regler. Dessa var man delvis tvungen att lära sig utantill och för att kunna använda dem krävdes dessutom en hel del annan kunskap; man behövde kunna multiplikationstabellen, gärna den stora (upp till 20), relationen mellan en mängd olika sorter, och helst även ha memorerat en rad särskilda tabeller för reduktion av sorter för att kunna räkna ”i part” utan att behöva ta till griffel och tavla. Att ett bemästrande av räknekonsten krävde mycket övning framgick av räknelärornas framställningar. Räknelärorna överlät emellertid detta övande till sin läsare. Av Roloff Anderssons kommentarer framgår att han knappast ansåg sig veta vad varje enskild person behövde öva på, eller hur mycket, för att nå just den förmåga som han (eller hon) av en eller annan anledning eftersträvade.

Med utgångspunkt från den syn på räknekonsten som låg till grund för räknelärornas utformning framstår det givetvis som absurt att från en bok som är till för att ge en läsare kompetens i räknekonsten, utesluta räknekonstens regler.

Ytterligare ett exempel på skillnaden mellan den syn på räknekonsten som blev gängse på 1880-talet, och den som låg till grund för räknelärornas utformning, kan hämtas från A. W. Lavéns *Lärobok uti Mathematik* från 1842. Efter sin genomgång av sammansatt *Regula de Tri* ger han *ett* exempel, nämligen följande:

> 27. 500 man, som arbetade 12 timmar om dagen, hafva användt 57 dagar för att gräfva en kanal, 1800 alnar lång, 7 alnar bred och 3 alnar djup; huru många dagar behöfva då 860 man använda, om de arbeta 10 timmar dagligen, för att gräfva en kanal 2900 alnar lång, 12 alnar bred och 5 alnar djup, uti en jordmån, som anses 3 gånger svårare att gräfva uti; och då man tillika utrönt att de förstnämndes arbetsförmåga förhåller sig till de sistnämndes som 7 till 5? (Svar 768 36/43 dagar).[141]

Efter en textrik och detaljerad lösning skriver han: ”Detta exempel, hvilket är ett bland de mest sammansatta som gerna kunna komma i fråga, torde

[140] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 123.
[141] Lavén, *Lärobok uti mathematik: bok 1. räknelära*, s. 190.

tillräckligt visa huru dylika frågor böra behandlas".[142] Tanken är klar: genom att se hur ett exempel behandlas, kan man *förstå*, och med utgångspunkt från förståelse kan man sedan skapa och lösa liknande problem på egen hand.

Bergs *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor* (1877)

Som exempel på den nya typ av läroböcker i räkning som från och med 1880-tale började tränga ut böckerna som följde det zweigbergkska paradigmet, har jag valt de av Alfred Berg. Hans första lärobok i räkning var *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor*, publicerad 1877.[143] Förutom att komma ut i ett antal nya upplagor under slutet av 1800-talet, låg denna bok till grund för hans *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, publicerad första gången 1888, och hans *Folkskolans räknelära* som kom ut ett år senare, 1889.[144] Bearbetade av en rad, vad gäller den svenska skolmatematiken relativt prominenta herrar, kom dessa läroböcker ut i nya upplagor ända fram till slutet av 1940-talet. Då växte kraven på en "modernisering" av skolmatematiken, vilken ställde dessa äldre läroböcker i sämre dager. Detta innebar emellertid inte alls att de nya läroböcker som kom vid denna tid på något avgörande sätt skiljde sig från det paradigm som Bergs räknelära följde. Under den period som står i fokus för det här kapitlet skapades en typ av läroböcker i räkning som höll eleverna tysta. Dessa böcker hade kommit för att stanna.

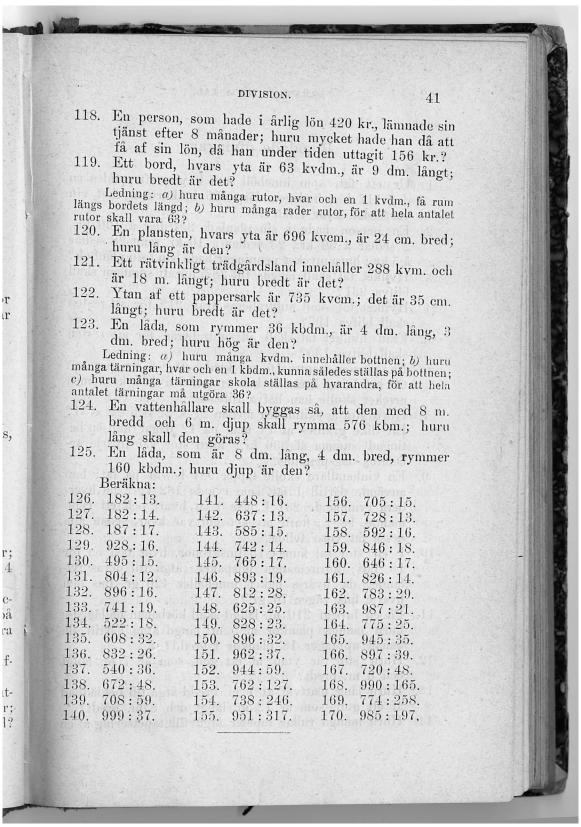
Räkneexempel för tyst övning

I förordet till sin första lärobok skriver Berg att hans mål varit att skriva en lärobok i aritmetik, "genom hvilken eleven borde kunna hufvudsakligen på egen hand utan att allt för mycket taga lärarens tid i anspråk lära sig räkna". Att detta mål inte kan nås med hjälp av böcker fyllda av "regler" står nu klart, menar han. Reglerna, och *Regula de Tri*ns uppdelning av räknesätten i olika grupper, tenderade dessutom att leda till att eleverna, "i allmänna lifvet" inte kunde tänka ut vilket räknesätt de skulle använda. Den lösning av båda dessa problem som Berg presenterar är att eleverna genom en följd av "tillämpade" exempel, fortskridande "från det lättare till det svårare", själva får "upptäcka" räknesätten. På så sätt "vänjes [eleven] vid att för en räknefrågas besvarande först sätta sig in i frågans natur och försöka att ur uppgifterna på genaste väg finna svaret, utan att hafva hela sin uppmärksamhet fäst vid bestämmandet af under hvilket räknesätt frågan bör rubriceras". Till detta lägger Berg att han uteslutit "satsernas teoretiska bevisning", eftersom bokens syfte uteslutande är

[142] Ibid, s. 191.
[143] Alfred Berg, *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor*, Stockholm, 1877.
[144] Alfred Berg, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, Stockholm, 1888; Alfred Berg, *Folkskolans räknelära*, Stockholm, 1889.

att eleven ”då en räkneuppgift i det praktiska lifvet förekommer, må kunna [...] lösa densamma”.[145]

Tittar man på innehållet i Bergs läroböcker ser man att de, föga oväntat, nästan uteslutande innehåller räkneexempel. Det går inte längre att tala om ”övningsuppgifter” om man med detta syftar på ett övande på något man först lärt sig. Istället är det här fråga om den typ av skriftlig heuristik som Nordlund bidrog till att introducera. Uppgifterna kommer varken före eller efter en explicit presentation av matematisk teori och teknik. Istället är matematiken presenterad *genom* exempel; den fullständiga titeln till den lärobok som utgjorde startpunkten för Bergs läroboksförfattande lyder följaktligen: *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor, framstäld genom exempel.* Nedanstående figur visar en sida i denna bok:



DIVISION. 41

118. En person, som hade i årlig lön 420 kr., lämnade sin tjänst efter 8 månader; huru mycket hade han då att få af sin lön, då han under tiden uttagit 156 kr.?

119. Ett bord, hvars yta är 63 kvdm., är 9 dm. långt; huru bredt är det?

Ledning: *a)* huru många rutor, hvar och en 1 kvdm., få rum längs bordets längd; *b)* huru många rader rutor, för att hela antalet rutor skall vara 63?

120. En plansten, hvars yta är 696 kvcm., är 24 cm. bred; huru lång är den?

121. Ett rätvinkligt trädgårdsland innehåller 288 kvm. och är 18 m. långt; huru bredt är det?

122. Ytan af ett pappersark är 735 kvcm.; det är 35 cm. långt; huru bredt är det?

123. En låda, som rymmer 36 kbdm., är 4 dm. lång, 3 dm. bred; huru hög är den?

Ledning: *a)* huru många kvdm. innehåller bottnen; *b)* huru många tärningar, hvar och en 1 kbdm., kunna således ställas på bottnen; *c)* huru många tärningar skola ställas på hvarandra, för att hela antalet tärningar må utgöra 36?

124. En vattenhållare skall byggas så, att den med 8 m. bredd och 6 m. djup skall rymma 576 kbm.; huru lång skall den göras?

125. En låda, som är 8 dm. lång, 4 dm. bred, rymmer 160 kbdm.; huru djup är den?

Beräkna:

126.	182 : 13.	141.	448 : 16.	156.	705 : 15.
127.	182 : 14.	142.	637 : 13.	157.	728 : 13.
128.	187 : 17.	143.	585 : 15.	158.	592 : 16.
129.	928 : 16.	144.	742 : 14.	159.	846 : 18.
130.	495 : 15.	145.	765 : 17.	160.	646 : 17.
131.	804 : 12.	146.	893 : 19.	161.	826 : 14.
132.	896 : 16.	147.	812 : 28.	162.	783 : 29.
133.	741 : 19.	148.	625 : 25.	163.	987 : 21.
134.	522 : 18.	149.	828 : 23.	164.	775 : 25.
135.	608 : 32.	150.	896 : 32.	165.	945 : 35.
136.	832 : 26.	151.	962 : 37.	166.	897 : 39.
137.	540 : 36.	152.	944 : 59.	167.	720 : 48.
138.	672 : 48.	153.	762 : 127.	168.	990 : 165.
139.	708 : 59.	154.	738 : 246.	169.	774 : 258.
140.	999 : 37.	155.	951 : 317.	170.	985 : 197.

Figur 8. Sidan 41 i Alfred Bergs *Räknelära för de allmänna läroverken* i en upplaga från 1890. Observera de två ”ledningarna”.[146]

[145] Alfred Berg, *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor*, Stockholm, 1886, förord.
[146] Alfred Berg, *Räknelära för de allmänna läroverken*, Stockholm, 1890 [1888], s. 41.

På flera olika sätt försökte Berg underlätta för eleverna så att de inte skulle ta lärarens tid i anspråk. För det första givetvis genom att uppgifterna var ordnade i en sådan följd att eleven leddes framåt i mycket små steg. Till detta kom att varje nytt moment introducerades genom ”minst två likartade” uträknade exempel, samt en mängd ”ledningar” insprängda i texten. ”Härigenom torde det ej vara omöjligt”, skriver Berg:

> att elever med god fattningsförmåga, *sjelfva* kunna dels ur svaret *finna* sättet för räkningens utförande och tillika *begripa* förfarandets riktighet, hvarigenom tillfälle beredes läraren att mera ingripande och längre sysselsätta sig med de mindre begåfvade eleverna.[147]

Här syns tydligt varför den metod som blev resultatet av att läroböckerna utformades för att passa de tysta övningarna kan kallas skriftlig heuristik. Tanken är att den långa följden av räkneexempel skall vara en resa där eleven själv upptäcker matematiken.

I förbigående kan nämnas att Berg i sin bok följer den ovan nämnda talsortsmetoden. Han ägnar synnerligen stort utrymme åt omvandling mellan olika sorter, dels ”tillämpade sorter” (som kronor och ören), dels ”sorter” som tio, hundra och trillion.[148] Enligt talsortsmetoden bestod skolmatematikens viktigaste uppgift i att bibringa eleverna förståelse av dessa sorter, och förmåga att omvandla mellan dem. Berg introducerar sorterna en i taget och diskuterar relationen mellan dem i ledningarna som finns insprängda mellan exemplen. Så väl i dessa ledningar, som i formuleringen av de många exemplen ”hjälper” han eleven att förstå med hjälp av bindestreck och särskrivningar. Så här kan det låta:

> För de tal, som äro större än 999 999, bildas en ny huvudgrupp, som kalas *million* och skrives till vänster om den första huvudgruppen; talen inom den bildas och skrivas på samma sätt som inom första huvudgruppen med en-tal, tio-tal, hundra-tal, tusen-tal, tiotusen-tal och hundratusen-tal. T.ex. sexhundrasjuttiotvå tusen fyrahundratrettiosex *millioner* tvåhundrafemtiotre tusen femhundraåttiosju skrives: 672 436 253 587 [149]

Av Bergs användande av talsortsmetoden följer en rad termer, specifika för denna metodik – vilka för eleverna givetvis framträdde som specifika för matematiken, men som i själva verket snarare var knutna till *skolmatematiken*. I citatet ovan är ”huvudgrupp” en sådan term. Genom bland annat Bergs läroböcker, vilka kom att dominera den skolmatematiska scenen

[147] Berg, *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor.*
[148] Se Nyströms kommentar ovan, sid. 335. Nyström var *förundrad* över talsortsmetodiken, något som kanske inte framgår av min redogörelse.
[149] Alfred Berg, Karl Hagström & Elis Hjalmar, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, Stockholm, 1930, s. 53–54.

under 1900-talets första decennier (i kraftig konkurrens, skall sägas), kom talsortsmetodiken att bli en central del av skolmatematiken under en stor del av 1900-talet.

Läroboksförfattarens roll

Ett andra drag karaktäristiskt för Bergs läroböcker är att de i stor utsträckning är ett resultat av *anpassning*. Berg ställde sig genaste till efterrättelse, efter läroboksgranskningskommitténs utlåtande 1887 – något som påpekas på bokens titelblad; de följande upplagorna är hela tiden anpassade till något, om det så är en ny ”normalplan”, nya ”kursplaner”, en ny ”organisation” eller nya ”inträdesprövningar”. Skolmatematiken som sådan kan i och för sig sägas ha tagit form som ett resultat av en anpassning till en mängd praktiska omständigheter. Men denna anpassning skedde som ett resultat av att lärare skrev läroböcker med utgångspunkt från sin egen erfarenhet. Den typ av anpassning som Bergs författarskap exemplifierar är istället indirekt: Berg förhåller sig till centralt utformade styrdokument och senare till ett centralt reglerat system av institutioner, snarare än till själv undervisningspraktiken. Berg tillhörde den första generation läroboksförfattare vilka såg som sin uppgift att *implementera* idéer om undervisning uttänkta av någon annan. Under 1880-talet gick den skolmatematiska diskussionens vågor höga. Som Harald Dahlgren skrev 1911 var det ett antal självständigt tänkande individer som möttes i denna diskussion.[150] De hade alla erfarenhet av undervisning, och med utgångspunkt från denna hade de flesta författat en egen lärobok som de använde i sin undervisning. Man får intryck av att de betraktade sig själva som *second to none* i fråga om matematikundervisning, med all rätt att ifrågasätta både metodiska anvisningar och kursplaner. Deras idéer var säkert ett resultat av anpassning, men väsentligen till vad de själva visste om undervisningens realiteter. Berg och hans senare medförfattare skrev inte med utgångspunkt från vad de *visste* utan med utgångspunkt från vad de *måste* skriva med anledning av centrala direktiv. Detta gör att de inte heller på samma sätt som 1880-talets diskutanter behövde ta ansvar för lärobokens innehåll. Av förorden till Bergs läroböcker framgår att han skriver för lärare som i sin tur vill måste följa direktiv. Det upprättas därmed ett avstånd mellan läroboksförfattandet, och relationen mellan det eleverna gör i skolan och det de gör utanför skolan. Man kan tydligt se hur författarna av kursplaner i och med detta kan börja tala *om* läroböckerna, läroboksförfattarna kan börja tala *om* kursplanerna, och lärarna tala *om* både läroböcker, kursplaner och den skolans organisation som de måste anpassa sig till – som vi sett ofta mot sin egen vilja. I och med den förändrade författarrollen tas ytterligare ett steg mot skolan som den (autonoma) verklighet skolmatematiken är anpassad till.

[150] Dahlgren, ”Die Mathematik an den Volksschulen und volksschullehrerseminarien Schwedens”, s. 11.

Något om räkneundervisningen under 1900-talets första hälft

I de förändringar som Bergs läroböcker genomgick kan man utläsa några tendenser hos skolmatematikens utveckling under 1900-talets första hälft. Som vi sett var boken ursprungligen utformad med tanke på elevernas sysselsättning – att den skulle låta eleverna räkna på egen hand. Detta motiv till lärobokens utformning tappades tämligen omgående ur sikte. Istället börjar man tala om nödvändigheten av ”räknefärdighet” som motivet bakom det myckna övningsräknandet.[151] Bergs lärobok får 1902 en mer ändamålsenlig löpande numrering med detta nya syfte i åtanke, samtidigt som antalet uppgifter ökas. Tio år senare talar bokens då nytillkomne författare Karl Haglund om möjligheten att ”driva” räknandet längre än vad många lärare enligt honom trodde var möjligt.[152] I detta skede nämns också ett nytt problem: hur exemplen skall rättas, vilket pekar mot det framväxande examensväsende som jag skall säga något om i den avslutande epilogen nedan.

Även vid nästa växling av författare, då Elis Hjalmar tog vid 1930, ökades antalet uppgifter. Den här gången med det explicita syftet att göra boken till en hjälpreda vid förberedelsen inför utbildningssystemets examinationer. Här syns med andra ord tydligt en förskjutning av de många övningsuppgifternas funktion, från sysselsättning till övning inför examinationer. Några av de exempel som tillkom var enklare än de befintliga och skulle fungera som en inledning. De som skulle förbereda inför examinationer var ofta tämligen svåra. De läroboksförfattare som tog över utgivningen av Bergs lärobok, tvekande inte att, med hjälp av de medel som stod till buds, göra uppgifterna krångliga. Till exempel kunde parenteser användas i detta syfte.[153] Henrik Petrinis beskrivning av dessa uppgifter i en uppsats 1905 är träffande: ”ett sammelsurium af en massa bråkstreck öfver och under hvarandra och parenteser inuti hvarandra, alltsammans befolkadt med en heterogen blandning af bråk och decimalbråk”.[154] Ändå hade han bara sett början – ”fregatterna”, som de ibland kallades,[155] blev allt större under 1900-talets första hälft. Sammantaget förstår jag dessa förändringstendenser som en förlängning av den väg som skolmatematiken kom att utgöra. En förlängning kombinerad med ett mer exakt utstakande. Till början lades enklare uppgifter, till slutet svårare – och i mitten infogades fler uppgifter liknande de som redan fanns där. Eleverna fick i och med detta allt mer att göra i skolan – och vi skall se att en av de viktigaste frågorna under första halvan av 1900-talet var *bristen på tid*; lärarna kom att uppleva det som i det närmaste omöjligt att *hinna med* matematikkursen, så som den framträdde i kursplaner och läroböcker.

---

[151] Alfred Berg, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, Stockholm, 1902.

[152] Alfred Berg & Karl Hagström, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, Stockholm, 1911.

[153] Enligt Nordlund tog parenteser plats i läroböckerna under 1890-talet (Nordlund, *Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar*, s. V).

[154] Petrini, ”Matematiken i skolan”.

[155] Tore Öberg, ”Gymnasiets matematikkurs”, *Elementa*, 1970.

Den skriftliga heuristiken och matematikens blick

De flesta av uppgifterna i Alfred Bergs lärobok utgör tillämpningar av *Regula de Tri*. De fördelar sig mellan de räknesätt som Zweigbergk gjorde till norm för skolmatematiken. Dessa konstituerar i sin tur ett antal serier av operationer som eleven måste behärska för att lösa uppgifterna. Berg har i viss mån, men inte helt, frångått det explicita rubricerandet av uppgifterna. Likväl kommer de i välkända grupper: ränteräkning, delningssräkning, blandningsräkning, och så vidare. Även det klassiska avsnittet om beskickning, som troligtvis var inaktuellt som handbokskunskap redan mot slutet av utgivningen av Roloff Anderssons räknelära, och givetvis fullständigt irrelevant 1877, hänger kvar ända fram till 1949, med uppgifter som:

> **549.** Huru mycket främmande metall finnes i *a)* 36 g 14-lödigt silver, *b)* 1 kg 15-lödigt silver, *c)* 480 g silver, som håller 75 %, *d)* 70 g silver, som håller 63 %?[156]

Regula de Tri definierade i stor utsträckning vilken matematik eleverna sattes att lära sig. Detta system av tillämpningsmöjligheter applicerades på samma typer av illustrerande stoff som Zweigbergk, Nyström och flera andra använt tidigare: arbetare gräver diken, hästar utfordras, löner fördelas. Följande uppgift är typisk:

> **1 775.** Om 3 kg bröd åtgå på 6 dagar i ett hushåll, bestående av 5 personer, huru många kg bröd böra då under lika omständigheter åtgå under 15 dagar i ett hushåll av 8 personer?
>
> Ledning: Huru många kg åtgå per dag per person?[157]

Det är ett trivialt påpekande att den fixerade uppsättningen matematiska tekniker konstituerar en i allra högst grad begränsad uppsättning möjliga tillämpningar. Uppgiftslösandet innebar en upprepning in absurdum av variationer inom de teman som användandet av proportionalitet möjliggjorde. Användandet av de matematiska teknikerna knöts emellertid på detta sätt om och om igen till verkligheten utanför skolan. Den skriftliga heuristiken lät därmed eleven själv arbeta med en stereotyp representation av livet utanför skolan. Bara på det uppslag från vilket exempel 1775 ovan är hämtat talas för övigt om: *pris av kvicksilver, hur lång tid det tar att färdas en viss sträcka, att bereda smör av mjölk, arbetares löner, hur långt en häst hinner på en viss tid, hur långt en gosse hinner på en viss tid, priset på kaffe, byte av tyg mot andra*

[156] Alfred Berg & Karl Hagström, *Räknelära för allmänna läroverk och flickskolor.: Förberedande skolans kurs. Utarb. av Elis Hjalmar. Med svar.*, Stockholm, 1934, s. 56.
[157] Alfred Berg, *Berg-Hagström: Räknelära för allmänna läroverk och flickskolor. Tillägg till Berg-Hagström: Räknelära.: Andra delen. Av Elis Hjalmar. Med Svar.*, Stockholm, 1949, s. 123.

varor, priset på "band", hur mycket väv som kan vävas av en viss mängd garn, garnnystans vikt, gemensamma tyginköp (delningsräkning), underhåll av hästar, åtgång av hästfoder, åtgång av utsäde, lastning av järnvägsvagnar, järnkubers vikt, arbetares löner (igen), åtgång av bröd (uppgiften ovan), och byggande av en mur.[158] Problemen eleverna ställdes inför i skolan, framställdes som verkliga problem, hämtade från livets alla områden. Förmågan att lösa dem kom därmed att framstå som likvärdig med en förmåga att hantera livet utanför skolan.

[158] Ibid, s. 122–123.

12. Slutsatser

I avhandlingens inledande metodavsnitt sa jag att den historiska redogörelsen skulle röra sig på tre olika nivåer. På en *symbolisk-mekanisk* nivå skulle jag visa att skolmatematikens uppkomst kan förklaras utan hänvisning till den meningsskapande fantasin om elevens och samhällets behov av matematikkunnande. Denna förklaring skulle jag på en ideologikritisk nivå kombinera med en analys av glappet mellan bilderna av matematiken och den verklighet dessa bilder påstås handla om. På en tredje nivå skulle jag visa hur skolmatematikens interna meningskapande, skolmatematikens bilder av sig själv, kan förstås som resultatet av ett komplicerat samspel mellan praktiska omständigheter och den mening dessa tillskrivs. Jag skall nu dra några sammanfattande slutsatser av vad den historiska redogörelsen lett fram till på dessa tre nivåer.

Fokus ligger här på de konsekvenser jag menar att den historiska redogörelsen borde få för vår förståelse av de fenomen som skolmatematiken och skolans matematik utgör idag. Därför kommer jag att återknyta till dagens skolmatematik med syfte att konkretisera och fördjupa inledningens teoretiska resonemang.

Mellan slutpunkten för min historiska redogörelse och dagens skolmatematik ligger 1900-talet. Att jag valt att lämna förloppet under detta århundrade utanför min undersökning har flera skäl. Dels tydliggör detta uteslutande den nutida skolmatematikens band till 1800-talet, dels är redan 1900-talets skolmatematik redan är relativt välkänd. Faktum är emellertid att min teori, mer än vad som kanske framgått, är ett resultat av arbete med empiri knuten till just 1900-talets skolmatematik. Delar av denna empiri kommer därför att redovisas i en avslutande epilog, där jag ger en skiss av skolmatematikens utveckling under 1900-talet.

Skolmatematikens *symbolisk-mekaniska* nivå

På en *symbolisk-mekaniska* nivå kan man särskilja tre faktorer som verkat bestämmande såväl på skolmatematikens relation till det omgivande samhället som till dess interna utformning. *För det första* tänker jag här på skolmatematikens meritokratiska funktion. I kapitel 7 hänvisade jag till tre sammanhang (Tripos i Cambridge, den franska ingenjörsutbildningen, Kungliga krigsakademin på Karlberg) inom vilka matematiska studier fungerade som en sorts fästningsmekanism, med vars hjälp samhällets högre värden kunde fördelas på ett systematiskt sätt mellan en liten grupp individer. Även om dessa studier bland mycket annat sades vara eleverna till instrumentell nytta, var det uppenbart även för dem själva att detta inte var studiernas huvudsakliga syfte. Tvärtom syftade studierna till allmänna högre mål och det var genom att representera dessa mål som studierna och de examina de ledde till fick sitt värde och kunde fylla sin sociala funktion som konsekreringsinstrument.

Av redogörelsen framgick att den meritokratiska funktionen kom att påverka studierna i en riktning som framstod som problematisk även i förhållande till de relativt avlägsna mål studierna skulle leda till. Examinationernas funktion som sorteringsinstrument ledde till ett fokus på en typ av uppgifter som gjorde det möjligt att skilja studenterna åt, uppgifter vilkas enda förtjänst var just att de var svåra att lösa samtidigt som de berörde ett väl avgränsat stoff och en väl avgränsad förmåga. Enkelt uttryckt saknades i dessa sammanhang återkopplingsmekanismer knutna exempelvis till instrumentell nytta. Fokus på sortering ledde till en konservering, både av stoff och av undervisningsformer. Mer allmänt ledde de matematiska studiernas meritokratiska funktion till upprättandet av ett avstånd mellan å ena sidan skolans inre verklighet, dess stoff, undervisningsmetoder och examina och å den andra den yttre verklighet som dessa studier på ett imaginärt plan hänvisade till.

För det andra visade sig skolmatematikens utformning vara ett resultat av dess disciplinerande funktion. Denna kommer kronologiskt något efter den meritokratiska. Vi såg i kapitel 9 hur matematiska studier kring sekelskiftet 1800 blev en del av undervisning riktad till underklassens barn. Syftet med denna undervisning var ofta glasklar: att skapa ordning bland de barn som undervisades och på längre sikt i det sociala skikt de tillhörde. Den metod man använde för att nå detta mål, var att på en plats skiljd från resten av samhället i detalj reglera barnens tillvaro – såväl deras handlingsmönster som deras tanke- och viljeliv – för att på så sätt forma dem till den sortens laglydiga och underdåniga människor man ville ha. Att bibringa eleverna praktiskt användbara matematikkunskaper utgjorde ett lika sekundärt mål i dessa sammanhang som i de meritokratiska systemen. På ett motsvarande sätt kan man också se hur undervisningens sociala funktion verkade bestämmande på undervisningens utformning. Det faktum att det var barn som skulle undervisas ledde till att fokus med nödvändighet hamnade på delar av matematiken som tidigare betraktats som trivialiteter. Denna avmatematisering kombinerades med en mekanisering som understöddes både av det formande syftet och av verksamhetens praktiska omständigheter (få lärare per elev). Om de meritokratiskt inriktade studierna var eleverna till glädje nästan uteslutande genom det värde som genom matematiken tillmättes den examen man om allt gick väl lyckades tillskansa sig, är det svårare att identifiera något som helst gott, specifikt knutet till matematiken, som de disciplinerande matematiska studierna förde med sig.

För det tredje såg vi hur undervisningspraktikens krav kom att bestämma skolmatematikens form. Att den disciplinerande barnundervisningen skulle vara billig, med få lärare per elev, gjorde växelundervisningssystemet populärt. Vi såg i kapitel 8 hur detta system avspeglade sig i läroböcker med kortfattade regler lätta att hitta, läsa och lära utantill, kombinerade med långa serier av övningsuppgifter att träna på. I kapitel 9 såg vi hur det ledde till en uppdelning av de matematiska studierna i väl avgränsade hierarkiskt ordnade klasser. När växelundervisningssystemet ersattes av klassundervisning under andra halvan av 1800-talet ledde detta till nya krav, inte lika specifikt knutna till folkskolan. Som vi såg i kapitel 11 hade läroböcker i aritmetik kring sekelskiftet 1900 antagit en form anpassad till klassundervisningens praktiska problem och i synnerhet till problemet att hålla elever sysselsatta utan direkt övervakning och bistånd. Denna funktion hos läroböckerna är relativt oberoende av huruvida undervisningen är en del av ett meritokratiskt eller ett disciplinerande övergripande sammanhang och det är ingen slump att den tar plats i skolmatematiken samtidigt som dessa två funktioner börjar vävas samman – en rörelse som jag skall ta upp översiktligt i den epilog som strax följer.

I ett sociologiskt perspektiv kan man se hur folkskolan i Sverige mot slutet av 1800-talet börjar fylla en funktion som förvaringsplats för barn som av olika anledningar inte tillåts delta i den framväxande nya arbetsordningen. Skolmatematikens förändrade utformning kan ses som ett sätt att möta behovet av att hålla barn och ungdomar sysselsatta, utan att därmed ge något produktivt bidrag till samhället. I aritmetikens fall, vilket stått i fokus här, men också inom andra grenar av skolmatematiken, blev lösningen att läroböckerna fylldes med övningsuppgifter, kombinerade med ledningar och ordnade på ett sådant sätt att eleverna på egen hand kunde arbeta med boken, i idealfallet utan att någonsin bli klara och därmed pocka på lärarens uppmärksamhet. Detta krävde att uppgifterna å ena sidan gjordes så enkla att eleverna kunde lösa dem men å den andra att de fick ett så växlande och intressant innehåll att eleverna inte tappade fokus, utan hölls fästade vid läroboken. Det allt för abstrakta, det allt för omständliga och det allt för enkla fick därmed uteslutas – oberoende av hur vetenskap, teknik, vardag och yrkesliv i praktiken råkade gestalta sig – till förmån för uppgifter specifikt anpassade till elevens ståndpunkt och intressen. Det primära syftet med dessa uppgifter låg i tiden det tog att lösa dem och det faktum att de hos eleverna väckte en lust att räkna snarare än en lust att be läraren om hjälp.

Matematikens utsida

Som vi sett är det emellertid bara undantagsvis som skolmatematiken framställer sig själv som den sortering, disciplinering och sysselsättning jag talat om ovan. När den presenterar sig själv talar den istället om matematik. Det är matematiken som ger skolmatematiken dess mening. Matematiken placeras, som jag skrev i avhandlingens inledning, mellan undervisningen och de mål den skall leda till. Och istället för att därmed öka avståndet mellan mål (till exempel demokrati) och medel (den skolmatematiska undervisningspraktikens specifika utformning) fungerar den som ett sorts kitt, som får sambandet mellan dem att framstå som självklart. Matematiken får oss att sluta fundera över hur det mer specifikt skall *gå till* att elever, genom att göra det de faktiskt gör på matematiklektionerna i skolan, skall bli bättre på sådant som att delta aktivt i det demokratiska samhällslivet.

I den historiska redogörelsens första kapitel talade jag om räknekonsten. Bortsett från de komplikationer jag tog upp sist i detta kapitel, kan räknelärorna sägas ge en bild av hur man i praktiken kan lösa, och vid någon tidpunkt faktiskt löste, en lång rad aritmetiska problem. Karaktäristiskt för räknelärornas beskrivningar är att de visar hur man *gör*. De visar hur man räknar fort och rätt. Räknekonstens uträkningar är underordnade de praktiska sammanhang de är en del av. De handlar inte om hur man kan förändra eller förbättra praktiken, och inte om hur man kan förstå den på ett mer systematiskt sätt. Räknekonsten säger inte hur man skall tänka. Den säger hur man kan få fram de svar som praktiken kräver.

I kapitel 6 visade jag hur stor skillnad det är mellan räknekonsten och den matematik som tog form i Europa under 1600-talet och som kom till Sverige i början av 1700-talet. Då började man tala istället för att handla, betrakta praktiken på avstånd istället för att vara i den. Om räknekonsten handlade om att på en viss plats, vid en given tidpunkt, producera ett svar vars riktighet bestämdes av rådande omständigheter, handlade matematiken om produktion av allmänna sanningar, värderade utifrån andra premisser än det praktiska räknandets. Matematiken upprättar en skillnad mellan tingens (profana) växlande sinnliga egenskaper och ett ideal som bara kan begripas matematiskt och som därmed behärskas av dem som behärskar matematiken.

Denna identifikation av en andra verklighet, bortom det sinnligt givna, för tankarna till religionen, och vi såg också hur föreställningar om matematiken från 1500-talets ända fram till sekelskiftet 1900 ofta var sammanflätade med föreställningar om Gud: idealiserade matematiska beskrivningar ansågs fånga verklighetens gudomliga essens, det matematiska tänkandet likställdes med en gudomligt given rationalitet. Mer allmänt har den historiska redogörelsen visat hur anspråk på att tala i matematikens namn, på liknande sätt som anspråk på att tala i Guds namn, varit förbundna med makt. Istället för att säga: ”Jag reser dessa anspråk” (till exempel på att ta upp svenska ungdomars tid), säger man: ”Matematiken gör dessa anspråk nödvändiga” (eftersom alla behöver ett matematikkunnande som bara kan förmedlas på detta tidskrävande sätt). Därmed upprättas ett avstånd, som döljer att anspråken uttrycker ett socialt dominansförhållande. Matematiken ger dem (en annan) mening, som gör det möjligt för det sociala att framstå som en harmonisk helhet.

Tesen jag driver i teoriavsnittet är att matematiken – det fenomen som uppstår under 1500- och 1600-talen – är en *effekt* av denna sociala funktion. Detta kan låta absurt, eftersom de matematiska teknikernas betydelse inom naturvetenskap och teknik ligger i sådan öppen dag. Vad det handlar om är emellertid inte att ifrågasätta de matematiska teknikernas instrumentella effektivitet, det vill säga att de kan användas för att, liksom räknekonsten, producera det riktiga svar som praktiska omständigheter på en given plats vid en given tidpunkt kräver. Inte heller handlar det som att ifrågasätta att det finns ett inre samband mellan alla de tekniker som kallas matematiska, eller att de sammantagna utgör en imponerande mänsklig skapelse.

Om vi utsträcker räknekonstens betydelse från det specifikt borgerliga räknandet till all användning av matematiska tekniker för att nå instrumentella mål skulle många ingenjörer och forskare inom (i synnerhet tillämpad) matematik kunna kallas räknekonstnärer. Denna räknekonst skulle i flera avseenden likna medicinen (och mitt intryck är för övrigt att räknelärorna inledningsvis hade en hel del gemensamt med den samtida läkekonsten). Alla människor med sunt förnuft förstår att använda plåster och huvudvärkstabletter på rätt sätt. Att kunna genomföra en blindtarmsoperation kräver teoretiska kunskaper och praktisk färdighet som de flesta saknar – men inte heller behöver. Medicinen utgör här ett övergripande ramverk, vilka förenar det vetande och den stora uppsättning tekniker som i olika medicinska sammanhang kommer till användning. Liksom matematiken är medicinen en imponerande vetenskap, som tagit form under lång tid.

Men man talar inte om medicin på samma sätt som man talar om matematik. Man säger till exempel inte att samhället ”genomsyras av medicin”, eller att förmåga att diagnosticera sig själv som förkyld eller magsjuk skulle utgöra ett grundläggande ”medicinkunnande” nödvändigt för att hantera sin vardag. Det reses inga krav på att barn och ungdomar skall ägna timmar åt att lära sig den medicinska vetenskapens grunder.

Men varför inte? Spelar inte sjukvården en oerhört central roll i samhället? Vilar inte den västerländska civilisationen (med låg barnadödlighet, lång livslängd, förmåga att bota sjukdomar, och så vidare) i stor utsträckning på medicinsk grund? Skulle inte en mer allmänt utbredd förmåga att tillämpa den medicinska vetenskapens vetande leda till enorma fördelar i samhället, inte minst ekonomiska men också i termer av livskvalitet?

Andra områden som osökt lånar sig till denna typ av jämförelser är juridik, politik och ekonomi. Det stora flertalet är idag i stor utsträckning utlämnade åt professionell expertis inom alla dessa områden. I den mån man ser förmågan till aktivt och välinformerat deltagande i det demokratiska samhället som ett av skolans främsta mål, måste den tid som ägnas dessa områden i skolan framstå som löjligt liten, inte minst i jämförelse med den tid som ägnas åt matematik.

Jag menar att den avgörande skillnaden mellan dessa områden och matematiken, vilken får det att framstå som naturligt att matematiken, snarare än de andra, intar en så central ställning i skolan, är att matematiken är ett *objekt*, det vill säga att den tycks ha en objektiv existens bortom det sociala, bortom vad människor säger, tycker och tänker om den. Något sådant objekt har inte medicinen och inte heller juridiken. De framstår som serier eller familjer av tekniker, på samma sätt som räknekonsten. De kan i och för sig betraktas som oändliga, men det är i dessa fall fråga om en sorts uppräknelig oändlighet, där namnen, "medicin", "räknekonst" eller "juridik" fungerar som diffusa yttre gränser. Matematiken framstår istället som en kärna, från vilken de konkreta yttringarna är härledda. Det vore absurt att kalla förmågan att sätta på ett plåster för "tillämpad medicin". Däremot kan benämnandet av två objekt som "två" betraktas som tillämpad matematik. Matematik är inte en sammanfattande benämning på faktiskt existerande matematiska tekniker och resultat. Den är något mer.

Det är detta *mer* som jag menar är en effekt av den symboliska ordningen. Dess orsak står inte att finna i själva matematiken. Det är i egenskap av universellt oändligt objekt, som matematiken ställer sig i vägen för våra tankar och leder oss att söka förklaringar till det sociala i det vi uppfattar som dess inre djup. Det är så den fyller sin symboliska funktion: att få något som saknas att framstå som något dolt. Det sammanhang framför andra där matematiken fyller denna funktion är givetvis i skolan. Påståendet att det vi uppfattar som matematik i själva verket bör förstås som skolans matematik, syftar på den betydelse skolan har för att få matematiken att framträda som ett (oändligt, universellt, mångfacetterat, närvarande) objekt, snarare än en (stor och användbar) familj av tekniker, varav vissa hör till det sunda förnuftet, medan andra bara kan förstås och användas efter år av träning.

Om matematikens objektivitet i vanliga fall bestämmer hur vi uppfattar skolmatematiken, vad återstår om vi istället ser den som en förmedlare av räknekonst, en *skolans räknekonst*? Då ser vi plötsligt mycket tydligare skolmatematikens band till de gamla räknelärorna. Vi ser att skolmatematiken är utformad för att göra eleverna till räknemästare – och att den i många fall också lyckas med detta! Skolans räknekonst handlar om att under specifika praktiska omständigheter räkna fort och rätt. Den handlar inte om att tänka, den handlar om att göra. Om matematik ursprungligen var något man ägnade sig åt under sin fria tid, ett föremål för spekulationer rörande Gud och verklighetens essens, är skolans räknekonst, precis som räknelärornas räknekonst, en fråga om att besvara de frågor som det dagliga livet reser. Man kan till och med gå så långt som till att säga att båda syftar till att besvara de frågor som uppstår i det *borgerliga* livet – med den avgörande skillnaden att detta borgerliga liv under 1900-talets lopp blivit ett liv som i stor utsträckning levs i skolan.

Matematikens insida

När skolmatematiken presenterar sig själv för offentligheten talar den om matematik. Den visar fram ett objekt vilket drar till sig uppmärksamheten samtidigt som det reflekterar det som värderas högt i samhället. Vad som helst kan emellertid inte representeras på detta sätt. Skolmatematiken för en kamp med sig själv för att leva upp till sina matematiska ideal, och det den då jämför sig med kallar jag matematikens insida. Vad är denna matematikens insida, och hur har den tagit form?

Det tycks rimligt att här börja med Euklides *Elementa*. Detta verk översattes till svenska vid 1700-talets mitt. Det kom då att fungera som en konkret representation av rationalitet, logiskt tänkande, sanning och indirekt verklighetens essens och Gud. Det väsentliga här är att Euklides *Elementa* är en bok fylld av en specifik följd av axiom, satser och bevis. *Dessa* kom att representera tidens högre värden. Att behärska Euklides *Elementa*, att kunna förstå och reproducera bevisen, likställdes med att kunna tänka rationellt och logiskt. Övning på euklidisk bevisföring kunde därmed betraktas som en övning i att tänka logiskt, att lära sig se med matematikens ögon och därmed kunna skilja huvudsak från bisak samt att med matematisk precision kunna skilja rätt från fel. Det var alltså vid denna tid en tämligen specifik praktik som förknippades med det som värderades högt.

Gör vi ett hopp framåt i historien, kan vi i Pestalozzis bildningstänkande se en helt annan uppsättning värden. Mot teori, rationalitet och logik, ställde han harmoni och enkel anspråkslöshet; istället för ett tänkande skiljt från kroppen, värdesatte han enhet mellan kropp och själ, människa och natur. I detta tänkesätt antogs matematiken finnas i naturen, och därmed kunna verka på människan genom hennes sinnliga erfarenhet – om bara naturen lades till rätta så att dess matematiska essens gjordes synlig. Givet denna viktiga förändring, var tanken snarlik den som förknippades med Euklides *Elementa*, nämligen att matematiken representerade något högt och gott, och att människan kunde få del i detta höga och goda genom att ”möta” matematiken. Men då detta möte tidigare förknippades med arbete med Euklides *Elementa*, kom det nu att förknippas med en särskilt typ av systematiskt ordnade sinnliga erfarenheter. Då det var fråga om arbete med Euklides *Elementa* såg man matematiken som något yttre, skiljt från människan och som man formas av. Bildningstänkandet förhåller sig istället till en matematik som kan anta formen av begrepp i människans inre.

Jag har här skissat två olika sätt att föreställa sig relationen mellan matematiska studier och det dessa studier skall leda till. Till dessa kan läggas en rad andra. Det väsentliga är att matematiken erbjuder eller konstituerar en tolkningsram som säger: ”Detta är vad som sker”, i anslutning till en eller annan praktisk verksamhet. Arbete med euklidiska bevis, vilket till exempel skulle kunna betraktas som ett sorts spel eller en lek, betraktas som övning på att tänka *rationellt*; Pestalozzis åskådningsövningar, vilka för en oinitierad kanske kunde framstå som en säregen form av charader eller (givetvis) som en övning i lydnad, framstår genom matematiken som *bildning*. Med Wittgenstein kan man säga att matematiken ingår i ett språkspel knutet till undervisningspraktiken.

Matematikens insida säger emellertid snarare vad som *inte* sker än vad som i praktiken sker. Den konstituerar ett ideal som praktiken hela tiden jämförs med. Om praktiken hade motsvarat matematiken, skulle den per definition ha lett till en realisering av de värden som matematiken förknippas med. Nu sägs den istället hela tiden vara bristfällig och i behov av att förändras i matematikens riktning. Retoriken under 1800-talets andra hälft är på denna punkt snarlik retoriken i början av 2000-talet. När man ser på nuet, drar man en gräns mellan det man tänker och undervisningspraktiken sådan den faktiskt är, och säger: vi *vet* – det har bara ännu inte blivit verklighet. När man ser på det förflutna gör man ingen sådan åtskillnad, utan dömer istället skolmatematiken för vad den faktiskt var. Skolmatematikens ström av försäkringar om att det är *skillnad* mellan nu och då, tycks inte sätta några spår. Det är som att skolmatematiken vid varje ögonblick reflekterar över sin egen existens, men likväl hela tiden tror att denna reflektion är en nyhet: som om ögonen just hade öppnats skriver den ner allt den ser och förstår – men tar sig aldrig tid att läsa vad den skrev dagen innan.

Genom sin självkritik konstituerar skolmatematiken matematiken som något alla vill ha och behöver, men som inte alla får ta del av. Häri ligger en väsentlig skillnad mellan matematikens roll inom den typ av lokala meritokratier jag beskrev i kapitel 7, och matematikens roll i det framväxande obligatoriska utbildningssystemet. I den mån de matematiska studierna syftade till att knyta matematikens värden till en utvald mindre grupp, fanns givetvis inget skäl att påstå att studierna inte motsvarade sitt mål. Ett problem med denna typ av konsekrering är emellertid att studiernas symboliska värde är beroende av att även sådana som inte studerat matematik erkänner matematikens värde, och att detta erkännande i stor utsträckning ligger bortom den lokala meritokratins kontroll. Utbildningssystemet garanterar däremot att alla bibringas insikt om matematikens värde och får erfara dess avgörande betydelse. På så sätt garanterar utbildningssystemet de matematiska studiernas värde och gångbarhet som symboliskt kapital. Vad skolmatematiken i sin självkritik om och om igen poängterar, är att de allra flesta, trots att de studerar matematik, *inte* bibringas det kunnande, den problemlösningsförmåga, de matematiska begrepp – eller vad man vid en given tidpunkt kallar det – som utgör skolans form av symboliskt kapital. Min hypotes på denna punkt är att skolmatematikens självkritiska retorik uppkommer samtidigt som matematiken blir ett gemensamt ämne för det konsekrerande läroverket och den disciplinerande folkskolan. Detta är exakt vad som sker kring mitten av 1800-talet. Det blir då nödvändigt att upprätta en *intern* skillnad, inom de matematiska studiernas ram, mellan den mindre grupp som bibringas symboliskt kapital och den större grupp som istället skall förmås att erkänna värdet av något de inte har.

En komplicerad fråga rör innehållet i det ideal som matematikens insida konstituerar. Varför var det just Euklides *Elementa* som kom att representera rationalitet och logik? Varför kom Pestalozzis undervisningsmetoder att få just den säregna form de fick? Samma frågor kan ställas i förhållande till Velander och det sena 1800-talets föreställningar om talbegreppet, liksom i fråga om vår tids resonemang kring vikten av att lära sig inse matematikens betydelse i samhället. Jag kan här se åtminstone tre alternativa förklaringar:

För det första kan man tänka sig att skolmatematikens inre kompass i huvudsak motsvarar vad man skulle kunna kalla lärandets, kunnandets och färdigheternas realiteter. Detta skulle innebära att de förändringar i synen på stoff och metod som vi kunnat se i den historiska redogörelsen kan förstås som en serie anpassningar till elevernas faktiska behov i ett föränderligt samhälle, och hur det faktiskt går till när man får kunskaper och färdigheter. Matematikens insida kan i detta synsätt förklaras med hänvisning till ”hur det faktiskt är”.

För det andra kan man se matematikens insida som en ideologisk fantasi vilken ger mening åt undervisningens *symbolisk-mekaniska* funktion och de praktiska omständigheternas i sig meningslösa krav. I denna förklaringsmodell utgör matematikens insida ett objekt vars existens är en effekt av behovet att ge mening åt den sociala verkligheten. Dess roll är (precis tvärtom) att få denna funktion och dessa praktiska omständigheter att framstå som en effekt av något orubbligt, objektivt, neutralt, bortom all mänsklig kontroll. Att Pestalozzi höll just sina praktiker för bildande, kan då förstås som en effekt av att just dessa praktiker under rådande omständigheter ”fungerade”; att Velander såg skriftlig heuristik som en väg till talbegrepp, kan förstås som en effekt av nödvändigheten av (bland annat) att hålla eleverna sysselsatta, och så vidare.

För det tredje, och detta är egentligen bara en aspekt av den ovanstående andra förklaringen, kan man förstå matematikens insida som ett svar på ett ”behov” av att utsträcka matematikens blick, det vill säga att generera erkännande av matematikens värde genom att få den att framstå som allestädes närvarande och användbar. Det ideal som matematikens insida konstituerar, tycks hela tiden (som) skapat för att möta just ett sådant behov. Detta gäller Pestalozzis försök att få verkligheten att framträda som i sig själv matematisk; det gäller det tidiga 1800-talets idé om att matematiska kunskaper skulle bli användbara om de tog form genom upprepad tillämpning; det gäller den skriftliga heuristikens sammanvävning av matematiken med alla möjliga delar av samhällslivet; det gäller 1900-talets ambition att väva samman skolmatematiken med barnets liv utanför skolan. Givetvis gäller det också Skovsmoses och andras ambition att lära eleverna att ”upptäcka” hur verkligheten i stor utsträckning är ”frusen matematik” och därmed inse att den bara kan bemästras med matematikens hjälp. Den grundläggande idén är lika märklig som den känns självklar: att man för att lära sig se verkligheten för vad den är, och för att lära sig bemästra den, måste möta den i tillrättalagd form. Till detta kan mer specifikt läggas att man måste möta den vid en viss ålder, på en särskild plats, under överinseende av vuxna med särskild utbildning, vilka reglerar ens verksamhet enligt en på förhand noga uttänkt plan. Dessa krav, och mer därtill, tycks ha sitt ursprung i matematiken. För att knyta an till mitt övergripande syfte, tycks denna matematik idag dessutom bara kunna begripas av experter. Min tes är tvärtom att denna matematik, vilken framstår som skolmatematikens orsak, i stor utsträckning är skolans egen skapelse.

Låt mig avslutningsvis säga något om vad det är för objekt som skolmatematiken skapar. Matematikens insida är huvudsakligen knuten till skolmatematikens undervisningspraktiker. Vi har sett den växa fram i ett samspel mellan praktiska omständigheter och ett behov av mening. Åtminstone sedan 1850-talet har lärare varit påtagligt medvetna om att deras handlingsutrymme är kraftigt beskuret av undervisningens sociala funktion och dess praktiska förutsättningar. Likväl har de sett möjligheter till meningsfull handling och förändring. Denna mening har inte funnits där på förhand, utan den är något de som arbetat med skolmatematik *skapat* i samma rörelse som de förskjutit praktiken i en eller annan riktning, till exempel genom att författa en ny lärobok. Samtidigt som de impregnerat sina innovationer med mening, har de presenterat bilder av hur skolan är och har varit, i termer av matematiken och dess egenskaper. De har därmed bidragit till att upprätthålla och transformera matematikens insida, vilken säger vad matematikkunnande är, hur det tar form, och varför det i de allra flesta fall inte tagit form. Matematikens insida kan därför med Cornelius Castoriadis sägas vara en del av skolans imaginära, det vill säga en del av den väv av betydelser som människorna i skolan skapar och återskapar runt sin egen verksamhet – givetvis i samspel med samhället utanför skolan, vetenskapen, tekniken, och så vidare.

Matematikens utsida är något annat. Den har ingen vid varje tidpunkt relativt fixerad betydelse på samma sätt som matematikens insida. Den utgör inget föremål för diskussion. Matematikens utsida är tvärtom en obstinat *närvaro* med en innebörd vilken på ett nästan magiskt sätt kan växla beroende på tycke, smak, tid och socialt sammanhang. Utsidan kan, som vi flera gånger sett exempel på, förknippas med nästan vad som helst, och förläna serier av betydelser enhetlighet och kraft. I avhandlingen visade jag hur detta objekt, från och med 1600-talet, blev allt mer *kraftfullt*. Denna utveckling fortsatte i själva verket under 1900-talet, för att nå en sorts fullbordan under 1960-talet – ett förlopp som emellertid väsentligen faller utanför ramarna för den här avhandlingen. Varifrån kommer denna kraft?

Den kommer från skolmatematiken. Kraften hos matematikens utsida står i proportion till antalet människor som under sin uppväxt ägnar sig åt skolmatematik, tiden de ägnar åt skolmatematik och det allvar med vilket de tar sig an denna uppgift.

Vuxna människor konstaterar ofta att de inte längre kommer ihåg någonting av det de lärde sig i skolan som unga. I synnerhet gäller detta matematiken. Som om det vore en självklarhet konstaterar man att man inte längre minns. Detta innebär emellertid inte att de erfarenheter man gjort i skolan gått oss spårlöst förbi. Tvärtom är det faktum att de flesta minns så lite en ledtråd som säger att erfarenhet av skolmatematik ofta antar en annan form än ett minne. Oavsett om man varit framgångsrik eller inte rör det sig nämligen om en ganska stark erfarenhet. Vi kastas in i skolans och skolmatematikens verklighet som sjuåringar, och befinner oss sedan i denna särskilda miljö nästan dagligen under minst nio år. I skolan reduceras vår rätt att bestämma över *vad* vi skall ägna oss åt på dagarna, *när* vi skall ägna oss åt det, vilket *värde* det skall tillmätas och även i stor utsträckning vad vi skall *känna* inför denna påtvingade tillvaro, till ett absolut minimum. Vi sätts att lära oss bemästra en viss typ av problem, och får reda på att vår förmåga att lyckas kommer att få avgörande betydelse för våra fortsätta liv. Att många upplever detta som stressande är inte att förvåna. Inte heller att stressen ibland övergår i ångest.

På grund av vissa mycket säregna egenskaper hos skolmatematikens utformning, antar erfarenheten av denna verksamhet *formen* av skolans matematik, eller mer exakt det jag kallar utsidan av denna matematik. Matematiken blir ett sätt att ge denna erfarenhet mening. Istället för att minnas skolmatematiken som det ofta stressande räknande många på ett plan minns att det faktiskt var, bär vi med oss en diffus känsla av en objektivt existerande matematik. Matematiken gör det möjligt för oss att inte ta konsekvenserna av det vi på ett plan vet att vi varit med om. Därför tar vi ofta matematiken instinktivt i försvar, utan att veta att vi faktiskt inte vet vad det är vi då försvarar. Matematiken påverkar våra liv på ett sätt som ligger bortom vår medvetna kontroll. Vi upplever den som en existens utanför oss själva, vilken sätter gränser för vad som är möjligt att tänka, inte minst om oss själva och vår plats i samhället. Vad jag vill åstadkomma är givetvis att vi istället för att bära på detta märkliga objekt, börjar minnas och förstå.

Genom sin sammanlänkande funktion tenderar skolans matematik att dölja skillnader och nyanser. Den kan i samma andetag knytas till teknik, vetenskap, demokrati, tillväxt, självförtroende och kreativitet. Därmed går möjligheten förlorad att på en mer detaljerad nivå förstå vad vart och ett av dessa fenomen innebär. Detta gäller givetvis inte minst matematiken själv, såväl i egenskap av något man gör i skolan som något matematiker och ingenjörer ägnar sig åt i sin yrkesverksamhet. Matematiken får, genom att på ett mycket speciellt sätt hänvisa till erfarenheten av skolmatematisk undervisning, de fenomen den förknippas med att framträda som ogenomträngliga helheter, omöjliga eller åtminstone *onödiga* att undersöka och diskutera. Jag tror därför att en bättre förståelse av skolans matematik inte bara skulle leda till en mer fruktbar diskussion av själva skolan, utan också bidra till skapa en mer nyanserad bild av sådant som vetenskap, teknik och demokrati.

13. Epilog
Skolmatematiken under 1900-talet

I avhandlingens inledning gjorde jag ett par nedslag i skolmatematikens utveckling under 1900-talet. Utan ambition att ge någon heltäckande bild, skall jag här peka ut ytterligare några aspekter av denna utveckling, vilka förhoppningsvis gör det lättare att förstå hur den historiska redogörelsen knyter an till dagens skolmatematik. Även om den skolmatematiska diskussionen från slutet av 1800-talet känns mer välbekant än man kanske hade förväntat sig, ter den sig i vissa avseenden främmande. Till exempel är vi idag vana vid att betrakta skolmatematiken som ett föremål för vetenskaplig kunskap, snarare än som under 1880-talet en fråga öppen för offentlig diskussion. Vi är vid att lyssna på experter vilka antas veta mer än vi själva, snarare än att på egen hand göra anspråk på att säga sanningen om skolans matematikundervisning. En annan skillnad ligger i att vi idag har ett utbildningssystem där barn och ungdomar från hela samhället möts i den gemensamma grundskolan, för att sedan under sin skolgång fördelas mellan utbildningsvägar och yrkeskarriärer genom upprepade prestationsmätningar. Detta till skillnad från 1880-talets kraftigt segregerade skola, där barn från olika delar av samhället redan från början hölls åtskilda.

För skolmatematikens del var 1900-talet ett händelserikt århundrade, åtminstone i vissa avseenden. Den svenska offentliga skolan bestod kring sekelskiftet 1900 av en mångfald olika skolformer (till exempel småskolor, folkskolor, flickskolor, realskolor och söndagsskolor). Genom en svåröverskådlig följd av reformer kom de successivt att fogas samman. På ett övergripande plan kan man se processen som en sammansmältning av den disciplinerande folkskolan och det konsekrerande läroverket, till ett system där disciplinering och konsekrering existerade sida vid sida och antog formen av *objektiv sortering*. Skolmatematiken blev därmed en del av ett sammanhängande utbildningssystem. Denna process kan sägas ha fullbordats på 1960-talet.

Ett viktigt och ofta uttalat syfte med utbildningssystemet var att ”gallra” den stora mängd elever som ville läsa vid gymnasier och universitet, så att samhällets resurser skulle fördelas till dem med bäst förutsättning att tillgodogöra sig högre studier.[1] Med hänvisning till det matematiska kunnandets speciella natur, var matematiken ett av de skolämnen som tilldelades uppgiften att verkställa denna gallring. På ett konkret plan innebar detta att skriftliga prestationsmätningar i matematik, i synnerhet från slutet av 1920-talet, blev långt vanligare än tidigare.[2] Som en till synes ganska direkt

[1] Se Sven Wicksell & Tor Jerneman (ed.), *Betänkande med undersökningar och förslag i anledning av tillströmningen till de intellektuella yrkena*, SOU 1935:52, Stockholm, 1935 och för en analys: Mac Murray, *Utbildningsexpansion, jämlikhet och avlänkning. Studier i utbildningspolitik och utbildningsplanering 1933–1985*, Göteborg, 1988. Matematikens gallrande funktion utgjorde ett ofta återkommande diskussionstema i *Tidning för Sveriges Läroverk*, bland annat i: ”Naturvetenskapen och skolorna” (1933); ”Matematiken och nya stadgan. En skrift av Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning” (1934); ”Matematikdebatten” (1935); Hjalmar Elis, ”Matematikdebatten. En sakkunnig i kritikens skärseld” (1935); Klas Ryrberg, ”Herr Engbergs osakkunnighet” (1934); Sjöstedt, ”'Matematikherraväldet'” (1933); Sjöstedt, ”Studentskrivningarna i matematik” (1940); Wahlström, ”Realgymnasiets matematikkurser” (1940); Sjöstedt, ”Studentskrivningarna i matematik” (1942); Sjöstedt, ”Examensskrivningarnas svårighetsgrad” (1945); Wahlström, ”Examensskrivningarnas svårighetsgrad” (1945); Sjöstedt, ”Studentuppgifterna i matematik” (1949) och Sjöstedt, ”Den 'orimligt svåra' matematikskrivningen” (1950). Intressant i sammanhanget är även de kraftiga protester mot själva idén med en gallrande offentlig skola som kom till uttryck i samband med 1922 års skolkommissions betänkande, se ”Skolkommissionens verk bedömt av pressen”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1922, s. 232, 233 och 236 och *Sammanfattning av utlåtanden och yttranden i anledning av Skolkommissionens den 28 april 1922 avgivna betänkande*, SOU 1923:66, Stockholm, 1923. Man kan särskilja åtminstone sex olika invändningar: för det första att prov inte mäter rätt saker; för det andra att lärarna genom sin sorterande funktion skulle få ett större ansvar än de skulle kunna (och vilja) bära; för det tredje att den sorterande skolan skulle kränka föräldrarnas rätt att bestämma över sina barns skolgång; för det fjärde att prestationsmätningarna skulle vara obehagliga för barnen; för det femte att prestationsmätningarna skulle förstöra undervisningen eftersom den skulle bli så inriktad på förberedelser inför proven och för det sjätte att den sorterande skolan skulle bli en likriktare, som man kunde läsa i *Göteborgs Handelstidning* den 8 maj 1922 (citerad i ”Skolkommissionens verk bedömt av pressen”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1922): ”Skolkommissionens förslag skulle sätta uniformeringen i system, ty vi skulle få en och samma skoltyp i hela landet, en och samma metod, ett och samma kunskapsmått, en över hela linjen triumferande likformighet, vilket allt skall erbjuda fullgod säkerhet mot varje individualitetens och det enskilda initiativets självsvåld. Vi få normalbarn, rentvättade och vattenkammade gossar och flickor, som genomgå sina prövningar och undan för undan sorteras ut till olika yrken. Det går alldeles, som när man i en kullagerfabrik prövar det färdiga fabrikatet och kulorna ramla ned i för de olika storlekarna avsedda hål och rulla bort till sina uppsamlingsställen.” (Jag kan inte låta bli att nämna att liknande kritik även hördes långt tidigare i samband med förändringen av läroverkets examensordning kring mitten av 1800-talet. Man talade då bland annat om ”huru oriktig en pröfning kan bli, när lärjungarne examineras af fullkomligt okända personer”, Åstrand (ed.), *Berättelser om de Allmänna Svenska Läraremötena 1852, 1854 och 1863*, s. 206.)

[2] I synnerhet gäller detta folkskolan, där provräkningar började införas 1927. En rad artklar argumenterade för dessa provräkningars mångfaldiga nytta: Gustav Karlström, ”Räkneprov för folkskolan”, *Folkskollärarnas tidning*, 1927; A. Rydman, ”Provräkningsblad, Emil Dalin”, *Folkskollärarnas tidning*, 1927; Emil Dalin, ”Provräkning som undervisningsmedel”, *Småskolan*, 1927; Fr., ”Provräkningsuppgifter till Folkskolans räknebok av Värner Rydén, Karl Frank och Hedvig Norgren. Första-fjärde delarna. Fjärde-sjätte årsklassernas kurser.”, *Svensk Läraretidning*, 1928; B. E., ”Provräkningsuppgifter till Folkskolans Räknebok. Av Värnder Rydén och Hedvig Norgren. 5:e delen. 7:e årsklassen och fortsättningsskolan.”, *Svensk Läraretidning*, 1930. Den kritik mot prestationsmätningar som jag redovisade i not 2 ovan kan jämföras med de positiva effekter som knöts till provräkningarna. Man menade att proven behövdes för att säkerställa

effekt av detta intensifierade fokus på mätning, försköts den skolmatematiska undervisningspraktiken mot färdighetsträning, samtidigt som den skolmatematiska diskussionen allt mer kom att kretsa kring elevernas prestationer.

Från och med 1950-talet började krav resas på att skolmatematiken skulle moderniseras.[3] Detta krav måste delvis förstås mot bakgrund av de förändringar som matematikens gallrande funktion fört med sig, som ett ökat fokus på färdighetsträning och snabbhet kombinerat med en fixering vid matematiskt stoff vars enda förtjänst var att det lämpade sig för differentierande prestationsmätning. Skolmatematiken hade vid denna tid sedan flera decennier utsatts för skarp kritik på grund av sin funktion som gallringsinstrument.

Bland annat dessa faktorer ledde under 1960-talet fram till det omfattande försök att reformera skolmatematiken som i Sverige går under namnet *den nya matematiken*. Mycket har skrivits om detta skede i skolmatematikens historia.[4] Med utgångspunkt från mitt material (framför allt tidens diskussion i svenska skoltidningar) ser det ut som att reformrörelsen inledningsvis hade relativt brett stöd.[5] Inte minst tycks detta rimligt mot bakgrund av det cyniskt distanserade förhållande till skolmatematikens praktiska verklighet vilket varit karaktäristiskt för skolmatematiken ända sedan andra halvan av 1800-talet. Det är inte förvånande att reformivrarnas ambition att skrota hela skolmatematiken möttes med bifall. Vad man ville sätta i skolmatematikens ställe var nämligen *matematiken*. Vi känner igen tankefiguren, och vi kan därför också ana hur stämningarna förändrades när alla de goda idéerna skulle sättas i verket.

---

att eleverna förstått, att eleverna tyckte det var roligt att skriva prov, att provresultaten gav eleverna självtillit, och att de manade till tävling och på så sätt fick upp hastigheten i räknandet. Ungfär samtidigt började man mer allmänt se matematik som ett ämne där ”den ständiga träningen och innötningen” är av största betydelse (Gunnar Nordling, ”Angående Realskolans matematikkurser”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1950). Vi kan med andra ord se hur en intern skolmatematisk diskurs tar form vilken löper parallellt med den fokuserad på matematikens gallrande funktion. Provräkningarna blir därmed *både* kunskapsmätningar användbara för att förbättra undervisningen *och* gallringsinstrument användbara för att hindra obegåvade elever från att ta sig vidare i utbildningssystemet.

[3] En intressant meningsväxling angående realgymnasiets nya matematikkurser, mellan undervisningsrådet C. E. Sjöstedt och matematikerna Lars Gårding, Otto Frostman och Åke Pleijel, hittas i följande två artiklar: Lars Gårding, et al., ”Matematiken på det nya gymnasiet”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1953 och C. E. Sjöstedt, ”Det nya gymnasiets kursplaner i matematik”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1953.

[4] Till exempel Inger Larsson (ed.), *Individualiserad matematikundervisning: en bok om IMU-projektet*, Malmö, 1973; Håstad, *Matematikutbildningen från grundskola till teknisk högskola i går – idag – i morgon*; Kristiansson, *Matematikkunskaper Lgr 62, Lgr 69*; Unenge, *Från räkning till matematisk klokskap*; Unenge, *Skolmatematiken i går, i dag och i morgon: – med mina ögon sett*.

[5] Se t.ex. ”IMU kräver mer förberedelse- och konferenstid”, *Skolvärlden*, nr 10, 1968 och ”IMU i praktiken. Mer plus än minus”, *Lärartidningen svensk skoltidning*, nr 7, 1968. Samtidigt förekom redan inledningsvis skarp kritik.

Här känns det nödvändigt att bryta kronologin för ett ögonblick och gå tillbaka till 1900-talets första decennier. Den nya matematikens ambition att ersätta skolmatematik med matematik har nämligen en ganska direkt förelöpare i reformförsök från denna tid. Det var då termen skolmatematik introducerades i den skolmatematiska diskussionen, som en beteckning på allt det man ägnade sig åt i skolan som inte hade någon plats i den vetenskapliga matematiken – eller för den delen knappast någon annan stans heller. Den kritiska diskussionen vid denna tid kan tydligt knytas till ”modernitetens” genombrott i samhället, vilket för den offentliga skolans del innebar att de klassiska språken förlorade sin centrala plats i läroverket, samtidigt som religionen och katekesen avlägsnades från folkskolan.[6] För skolmatematikens del innebar detta att argument knutna till *bildning* förlorade sin bärkraft. Framför allt drabbade detta givetvis studier av Euklides *Elementa*, men som vi sett hade under 1800-talets lopp även en rad andra moment, i synnerhet folkskolans räkneundervisning, knutits till bildningstänkandet. Bildningstänkandet, med sina religiösa övertoner, formligen löstes upp kring sekelskiftet och effekten blev en skarp, nykter blick på vad eleverna faktiskt ägnade sig åt under lektionerna.[7] Faktum är emellertid att denna kritik, liksom förslagen till förändrat stoff, vid denna tid inte resulterade i några genomgripande förändringar. En hypotetisk förklaring är att det å ena sidan vid denna tid saknades instrument för central reglering av skolmatematiken, samtidigt som, å andra sidan, det framväxande utbildningssystemets krav på instrument för gallring drog skolmatematiken i en helt annan riktning än den som föreslogs av det tidiga 1900-talets reformivrare. Den nya matematikens matematiska stoff har ett tydligt ursprung i dessa för Sveriges del relativt verkningslösa reformsträvanden.

---

[6] Angående katekesen se: Andersson, *1878 års katekes: debatten om katekesens form och innehåll 1810–1878*, s. 197–204; angående de klassiska språken se Lindberg, *Humanism och vetenskap: den klassiska filologien i Sverige från 1800-talets början till andra världskriget*, s. 232. Analysen i Richardsson, *Kulturkamp och klasskamp. Ideologiska och sociala motsättningar i svensk skol- och kulturpolitik under 1880-talet* sprider ljus över bakgrunden till dessa förändringar. Det var i detta skede som de första stegen togs mot modersmål och räkning som *kärnämnen* i folkskolan och senare grundskolan. När kristendomsämnet förlorade sin självklart dominerande ställning, tog modersmålet och matematiken dess plats, se Andersson, *Läsning och skrivning*, s. 130. Intressant är att de under 1900-talets första hälft ofta behandlades som en enhet. Man talade om behovet av en stärkt ställning i folkskolan åt ämnena *modersmål och räkning*, se t.ex. ”Stärkt ställning i folkskolan åt modersmål och räkning”, *Småskolan*, 1931 och ”Andra kammaren diskuterar undervisningen i modersmål och räkning”, *Svensk Läraretidning*, 1931. Endast i undantagsfall skiljde man dem åt, något jag tolkar som symptomatiskt för deras strukturella plats i diskussionen som en sorts *nodpunkter*. Detta synsätt får även stöd av att man (i den senare av de två refererade artiklarna) talar om en ”mäktig opinion” liksom klagomål på ”bristande insikter” – utan närmare precisering – för dessa *två* ämnen.

[7] Några exempel på kritiska artiklar från denna tid: A. H. Blidberg, ”Geometrin på latinlinjen”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1904; Otto Gallander, ”Om geometriundervisningen i England”, *Verdandi*, 1902; Josephson, ”Till frågan om gymnasiets matematikkurser”; P. G. Laurin, ”Om matematiken och fysiken i kommittébetänkandet”, *Skolan*, nr 2, 1902; Petrini, ”Matematiken i skolan”; Agne Wahlgren, ”Om kurserna i matematik på latingymnasiet”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1905; Einar Öije, ”Realitet och skolmässighet i matematiska problem”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1918.

Det var inte bara skolmatematikens matematiska innehåll som kritiserades under 1900-talets första decennier. Kritik riktades även mot undervisningsmetoderna, och i linje med tidens hyllande av vetenskapen och den vetenskapliga metoden tog en rad teorier form med anspråk på att utgöra en vetenskap om barnet. Det var vid denna tid som bland andra John Dewey och Maria Montessori tog plats på den pedagogiska scenen, och några decennier senare Jean Piaget – var och en med sin teori om barnet och en därmed förbunden syn på hur skolan borde vara utformad. I tolkningen av dessa teorier måste man skilja mellan den intention som låg bakom deras utformning, och de undervisningspraktiker teorierna i praktiken kom att förbindas med och understödja. Detta på exakt samma sätt som i fråga om Pestalozzi eller, för att ta ett svenskt exempel, Fredrik Sandberg. Mönstret som framträder är att i det närmaste *alla* teorier om barnet och dess lärande tar form i kontrast mot skolans praktiska verksamhet. De hänvisar till en annan skola, bortom sociala funktioner och praktiska krav. Lika påtagligt är emellertid att de i stor utsträckning är formade både av den praktiska verklighet de vill förändra och den syn på matematikens, kunskapens och lärandets natur vilken vi sett ta form under 1700- och 1800-talet.[8] Detta gäller till exempel den för skolmatematiken typiska föreställningen att tecken och symboler utgör ett *hinder* för en bakomliggande begreppsbildning, en föreställning som i sin tur hänger samman med bilden av matematiken som något väsentligen mer än summan av dess praktiska användbara tekniker. Det gäller även idén att begrepp bara kan ta form genom elevens sinnliga, handgripliga, aktivitet, att undervisningen måste vara lekfull och att eleven måste ha intresse för det undervisningen handlar om. Tillspetsat kan man säga att föreställningen om ett gudomligt samband mellan naturen, människan och matematiken, i dessa teorier ersätts med en idé om vetenskaplig överensstämmelse mellan verkligheten, barnet och matematiken. I en bok av Piaget kan man läsa om överensstämmelsen mellan å ena sidan de ”matematiska strukturerna” och å den andra ”de spontant, under loppet av den mentala utvecklingen konstruerade, operativa strukturerna”, med vars hjälp människan strukturerar sin verklighet.[9] Piaget, och många med honom, gjorde anspråk på att i vetenskapens namn tala om det universella i skolan, det barn och den matematik som skolans verksamhet av nödvändighet hade att

[8] Jmf. John Dewey, ”Mitt pedagogiska credo” i Ulf P. Lundgren & Sven G. Hartman (ed.), *Individ, skola och samhälle. Pedagogiska texter av John Dewey.*, Stockholm, 1980 [1897], s. 46–47 och Jean Piaget, *Psykologi och undervisning*, Stockholm, 1972 [1969], s. 38, 54, 57, 63 med resonemangen rörande Pestalozzis bildningstänkande i kapitel 9 ovan. Deweys respektive Piagets syn på skolan och kunnandet skiljer sig åt i många avseenden, och de kom till Sverige och skolmatematiken vid olika tidpunkter. Med de ovanstående litteraturhänvisningarna vill jag emellertid tydliggöra en rad likheter mellan dem, vilka framträder utifrån mitt specifika sätt att förstå relationen mellan (ideologisk) mening och praktik. Vad man kan se, är att båda (kanske mot förmodan) understödjer liknande undervisningspraktiker, nämligen sådana fokuserade på elevens aktiva och intresserade handlande.

[9] Piaget, *Psykologi och undervisning*, s. 54.

anpassa sig till. I själva verket handlade dessa teorier, som jag i avhandlingens inledning talade om med hänvisning till Lave och Walkerdine, om *skolans barn* och *skolans matematik*, konstituerade genom skolans institutionaliserade verklighet (och genom de experimentsituationer som skapats med skolan som förebild).[10]

Det dröjde ända till 1950-talet innan dessa vetenskaper om barnet, tillsammans med det tidiga 1900-talets ”nya” matematik, tog plats på den svenska skolmatematiska scenen. Då förändrades emellertid den skolmatematiska diskussionen form relativt snabbt. Nu skulle ståndpunkter vara grundade på experiment, presenteras i artikelform med vetenskapliga referenser och helst vara skrivna på engelska. Detta snarare än att som tidigare vara grundade i egen erfarenhet av undervisning och presenteras i för alla begripliga tidskriftsartiklar, givetvis på svenska. I kölvattnet av det ökade fokus på prestationer tog matematisk statistik plats som det retoriska verktyget framför andra.[11] En kår av experter trädde fram som skolans sanningssägare, som producenter av den skolmatematiska diskursen, medan lärarna förpassades till en roll som konsumenter av vetande producerat utanför skolan. Från 1900-talets början hade en växande grupp kvinnor börjat delta aktivt i den skolmatematiska diskussionen. Som en följd av diskussionens vetenskapliggörande på 1950-talet kom inte bara den aktiva producerande rollen inom skolmatematiken att återtas av männen (vilka blev ”experter”). Det tidiga 1900-talets kvinnliga skolmatematiker kom dessutom att fullkomligt utraderas från skolmatematikens historiska minne, under det att dess ursprung förflyttades från det tidiga 1900-talets svenska

---

[10] Lave, *Cognition in practice*; Walkerdine, *The mastery of reason.*

[11] Det finns en hel del litteratur som beskriver den matematiska statistikens framväxt och dess funktion för att höja samhällsvetenskapernas status och därmed skydda dem från offentlig kritik. Framför allt vill jag här nämna Porter, *Trust in numbers: the pursuit of objectivity in science and public life* och Gerd Gigerenzer et al., *The empire of chance: how probability changed science and everyday life*, Cambridge, 1989 (där Porter är en av författarna). Porter analyserar den matematiska statistiken i första hand med utgångspunkt från ett historisk och sociologiskt perspektiv. Kritik av mer intern karaktär, med fokus på de statistiska teknikerna och deras matematiska förutsättningar har förts fram i en rad artiklar av David Freedman: ”As others see us”, *Journal of Educational Statistics*, vol. 12, 1987; ”Statistical models and shoe leather”, *Sociological methodology*, vol. 21, 1991; ”Some issues in the foundations of statistics”, *Foundations of Science*, vol. 1, 1995; ”From association to causation: some remarks on the history of statistics”, *Statistical Science*, vol. 14, nr 3, 1999. En annan intressant kritiker är Paul Meehl, t.ex. ”Theoretial risks and tabular asterisks: sir karl, sir ronald, and the slow progress of soft psychology” [1978] i Keith Gunderson C. Anthony Anderson (ed.), *Selected philosophical and methodological papers*, Minnesota, 1991. Synnerligen intressant är, tycker jag, hur skolans vetenskaper genom den matematiska statistiken skyddar sig från kritik genom att hänvisa till den matematik den själv kontinuerligt bidrar till att skapa. Vad Porter, Freedman och Mehl visar är att det bakom det bländverk av mening som omger den matematiska statistiken, döljer sig tekniker som ofta vilar på en mycket ostadig grund och därför knappast kan sägas leverera den vetenskapliga stringens och objektivitet de antas och förväntas leverera.

skolmatematiska diskussion (vilken nu framstod som irrelevant) till utländska ”vetenskapliga” föregångare.[12]

Den nya matematiken måste förstås som en kombination av ”nytt” matematiskt stoff och ”nya” pedagogiska teorier, presenterade av den just då framväxande gruppen experter på just matematiken i skolan. *Deltaprojektet*, vilket innebar att nästan alla Sveriges högstadielärare i matematik sattes på skolbänken för att lära sig om den nya matematiken, är ett tydligt uttryck för den hierarkiska struktur skolmatematiken fått vid denna tid. Ambitionen var som sagt att ersätta skolans skolmatematik med vetenskapens (riktiga) matematik, och detta samtidigt som skolans traditionella undervisningsmetoder skulle ersättas av den pedagogiska vetenskapens vetande om hur barnet (egentligen) är, och hur man på bästa sätt lär sig matematik. Förväntningarna var höga, men som bekant har historiens dom över den nya matematiken blivit hård.

Jag vill dock ta den nya matematikens talesmän i försvar. Som vi sett hade skolmatematiken allt sedan mitten av 1800-talet präglats av intern kritik, vilken mot slutet av 1800-talet tycks ha övergått i mer eller mindre öppen cynism i förhållande till skolmatematikens praktiska verklighet. Den nya matematikens fel – om man vill kalla det ett fel – låg egentligen i en bristande förståelse för att varken matematiken eller pedagogiken var ”på riktigt”. Žižek skriver att uppriktig tro förenad med handlingskraft är långt farligare för en ideologi än kritisk distans.[13] Antag till exempel att en handlingskraftig person med makt över skolmatematikens utformning trodde helhjärtat på att skolmatematikens syfte var att ge eleverna gott självförtroende och hjälpa dem att reda sig i livet utanför skolan, och plötsligt fick insikt om att skolmatematiken ofta skapar ångest och i praktiken sällan är eleverna till någon praktisk nytta. Tänk om han efter en rationell analys kom fram till att skolmatematikens viktigaste funktioner är att hålla eleverna sysselsatta och att sortera dem. Vad skulle denna rationella, uppriktiga och handlingskraftiga människa göra?

Denna idealiserade situation tycks inte helt olik den som den nya matematikens företrädare befann sig i vid 1960-talets mitt. De såg hur fel

[12] Som exempel på kvinnors deltagande i den skolmatematiska diskussionen under första halvan av 1900-talet kan nämnas: Anna Kruse, *Åskådningsmatematik: Ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikens område*, Stockholm, 1921 [1910]; Vendela Wester-Wåhlström, ”Om räkneundervisning. Några funderingar med anledning av en utkommen räknelära för nybörjare”, *Svensk Läraretidning*, 1920; Magda Carlsson, ”Räknetrappan och talbildslapparna i den första räkneundervisningens tjänst”, *Småskolan*, 1929; Magda Carlsson, ”Räkneundervisningen”, *Småskolan*, 1929; Ericsson, ”Nya vägar i matematikundervisningen. Rön och experiment ur min praktik”; Ericsson, *Barnens räknearbete under de sex första skolåren: metodiska anvisningar för lärare*; Elsa Ericsson, ”Några synpunkter på den grundläggande räkneundervisningen”, *Svensk Läraretidning*, 1931.

[13] Slavoj Žižek, ”Da capo senza fine” i Judith Butler, Ernesto Laclau & Slavoj Žižek (eds.), *Contingency, hegemony, universality*, New York, 1999, s. 220: ”[…] taking the power discourse at its (public) word – acting as if it really means what it explicitly says (and promises) – can be the most effective way of disturbing its smooth functioning.”

allting var, och ville ställa det till rätta. Och de trodde på matematiken och vetenskapen om barnet. De trodde att det fanns ett behov, både på ett individuellt och samhälleligt plan, av kunskaper i matematik. Med utgångspunkt från tidens vetenskapliga vetande, utformade de därför ett program för vad de såg som en ändamålsenlig grundläggande matematikundervisning och satte sedan hela Sveriges lärarkår på skolbänken för att lära dem detta.

Entusiasmen för den nya matematiken ebbade ut mot slutet av 1970-talet.[14] Experter byttes ut. Skolmatematiken gjordes åter ”ändamålsenlig”, i linje med utbildningssystemets krav på sortering, nu understött av återkommande internationella studier där inte bara elever, utan hela länder ordnades med skolmatematiska prestationer som måttstock.[15] Den nya matematiken fick under en tid axla bördan av att vara orsaken till skolmatematikens praktiska utformning, vid denna tid inte så mycket i kontrast mot matematiken utan istället mot det praktiska livets krav. Sedan hände det märkliga att även den nya matematiken glömdes bort, och skolmatematikens förflutna åter blev tradition, mekanik, regler och minne – något som givetvis speglade den skolmatematiska undervisningspraktikens faktiska utformning. Den tid av entusiasm och tro på möjligheten att förändra som präglade 1960-talet var nu förbi. Den cyniska distansen hade återställts.

[14] Karaktäristisk för det sena 1970-talets syn på den nya matematiken är Gunnar Johnsson, ”Matematikundervisning på villovägar: Den 'nya' matematiken upp som en sol och ner som en pannkaka”, *Lärartidningen Svensk skoltidning*, nr 4, 1979.

[15] Jag tänker här framför allt på de återkommande undersökningarna inom ramarna för PISA (Programme for International Student Assessment) och IEA (International Association for The Evaluation of Educational Achievement). Två aktuella rapporter är: Skolverket, *PISA 2003: svenska femtonåringars kunskaper och attityder i ett internationellt perspektiv*, Stockholm, 2004 och Skolverket, ”TIMMS 2003. Svenska elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i skolår 8 i ett nationellt och internationellt perspektiv”, 2003.

SUMMARY

The Mathematics of Schooling

A critical analysis of the prehistory, birth and development of Swedish mathematics education

In the first part of the thesis I present a new way of thinking the relation between school and mathematics. My idea – inspired by psychoanalytic theory – is that *mathematics* can be understood as a sublime object of an ideology propagated by the education system. I call this object *the mathematics of schooling*. As a first step I argue that this object is a result of the practices of elementary mathematics instruction, in which the ability to understand and solve mathematical problems is construed as equivalent to the ability to understand the social and physical world, and the ability to solve problems of science, technology and everyday life. The next step takes into account that most people do not really believe in this simple image of the relation between school and reality outside school. To the contrary, the practices of elementary mathematics instruction are often believed to be quite pointless and even counterproductive. This, in turn, is assumed to be a result of mathematics instruction not reflecting the true nature of mathematics. Thus a relation is constituted between, on the one hand, mathematics, which is understood as universal and powerful *but not present*, and, on the other hand, the practices of elementary instruction, which are understood as the contingent obstacle responsible for this non-presence. The mathematics of schooling is precisely this object which, under the right – but hitherto never seen – circumstances, would make mathematics education live up to its publicly declared aims.

It is necessary to clearly distinguish between the mathematics of schooling, and the actual practices of technology, science and everyday life. The mathematics of schooling establishes a link between these practices and the practices of elementary mathematics instruction. My argument is that not only is this link largely illusory – something most people would probably agree on – but also impossible. The precondition for its possibility is that mathematics is in some way present outside school, for example in "good" (rational, logical, creative, etc.) thinking, in everyday practices, in scientific knowledge (or in the world itself) and in the invention and production of technology. But there is no such presence. Thus the constant failure of mathematics education is not a result of ever changing contingent obstacles

preventing it from reflecting the true nature of mathematics. To the contrary, mathematics itself – or more specifically, beliefs in mathematics as a powerful object, present almost everywhere outside school, but not in school – is largely created by school itself.

In the second and third parts of the thesis I substantiate this claim by giving an overview of the history of Swedish mathematics education, based on curricula, textbooks, discussions in teacher magazines, and other published material – covering in general terms the eighteenth to the twenty-first century. The historical narrative in the thesis is chronological and consists to a large part of quite detailed descriptions and analyses of material used for elementary instruction. Here I will instead account for the main argument by focusing on three different levels of understanding that I have tried to bring out in the historical part of the thesis.

On a first level I explain in sociological terms how the practices of elementary mathematics instruction became what they are today. I discuss the consequences of the introduction of written mathematical tests in the late 18th century as means of establishing local meritocracies. I show that these examinations unsurprisingly pulled the practices toward specialized preparation, i.e. practice of solving the same types of problems as given in the examinations. Thus the examinations tended to define the content of courses. The examinations themselves, in turn, tended to focus on problems whose main advantage was their usefulness as tools for effortless (for the teachers) differentiation between students. I discuss the role of mathematics instruction as a part of the project of using schooling to discipline the lower classes in the 19th century. In this context mathematics instruction became repetitive and – as regards the mathematical content – trivial, as it was adjusted to fit a situation where few uneducated teachers were to administer instruction to large numbers of lower class children. Of special importance in the last decades of the 19th century (when the monitorial system of Bell and Lancaster was abandoned) was the simple need to keep children calm and quiet without direct supervision. This need led to the promotion of school-books filled with a large number of relatively simple mathematical problems, arranged in such a way that they (ideally) could keep any student, regardless of ability, busy – and thus quiet – for any time span necessary.

This development marks the end of the main historical narrative, though I also give a brief sketch of how mathematics education changed during the 20th century in an epilogue. During the first part of this century, written examinations in mathematics – as a successor of examinations in classical languages – became one of the most important instruments by which "untalented" students were (and still are) prevented from reaching higher levels of the education system. Put simply, the rising importance of written examinations agreed very well with the need to keep children busy, as both promoted the same type of repetitive, mathematically trivial and time-consuming problem-solving leading to easily measurable skills.

On this first level of understanding I show how the evolution of Swedish mathematics education in general terms can be explained without referring to the mathematical "content" of the practices of mathematics instruction. (And thus a similar story as this one could be told about many other school subjects as well, e.g. classical languages such as Latin.)

On a second level I focus on beliefs about mathematics. It is only rarely that mathematics education is presented as a tool for sorting, disciplining and keeping children busy. Instead it is presented as closely related to mathematics. In a way, mathematics is placed between the practices of instruction and the higher aims they are supposed to lead to (e.g. economic growth and ability to master everyday practices). Instead of increasing the perceived distance between goals and means, it makes the relation between them seem more obvious. Mathematics makes us stop wondering how, what students actually learn to *do* in school, will be them of any service outside school. We become content with the "explanation" that the practices of mathematics instruction are supposed to provide knowledge of mathematics, and that this knowledge is, in some general way, necessary outside school.

I show how mathematics started to play this peculiar role in Europe during the 17th century. It was related to the process by which mathematics became a science related to nature and, vice versa, science about nature was mathematized. Mathematics became related to God, Man, Truth and Nature, in a number of different ways. It was associated with a distinction between contingent appearance and eternal truth, as well as instrumental efficiency and good morals. Working with mathematics (i.e. Euclidean geometry) was seen as a way to promote good thinking and sound judgment. These ideas – which need to be contrasted with ideas of earlier centuries of mathematics as a "profane" tool mainly useful for answering special kinds of questions in particular circumstances – were imported to Sweden during the 18th century.

It is quite clear that mathematics, at this time, became part of large scale politics in the same way as religion or philosophy. Mathematics came to represent rationality, God, Truth and good morals, which in turn represented the ways of those with hegemonic power. Knowledge of mathematics – or more specifically, having been the subject of mathematics instruction for some time – became a *sign*, or in Pierre Bourdieu's terminology, a form of *symbolic capital*.

I give several examples, from different points in time, of how the value and meaning of mathematics were reflected in texts produced in the context of education. Here is an extract from 1586:

> Mathematics teaches poets about the rising and setting of the stars; teaches historians the situation and distances of various places; teaches logicians [...] examples of solid demonstrations; teaches politicians truly admirable methods for conducting affairs at home and during war; teaches physicists the manners and diversity of celestial movements; of

> light, of colors, of diaphanous bodies, of sounds; teaches metaphysicians the number of the spheres and intelligences; teaches theologians the principal parts of the divine creation; teaches jurists and canonists calendrical computation, not to speak of the services rendered by the work of mathematicians to the state, to medicine, to navigation, and to agriculture. An effort must therefore be made so that mathematics will flourish in our colleges as well as the other disciplines.[1]

which can be compared to this one, from 2004:

> Representatives of education, trade, industry, and society are forcefully and unanimously stating that knowledge of mathematics is important and that good, meaningful knowledge is a precondition of self confidence, democracy, economic growth and life-long learning. Collective efforts to create a long term, sustainable development of mathematics instruction is both demanded and welcomed by all groups in society and on every level of education.[2]

Both are written with the obvious intent of promoting the value of mathematics, and they are – perhaps unexpectedly – quite typical of talk about mathematics in the context of mathematics education.

On this level of understanding I show how the discourse about mathematics does not have very much to do either with the state of the mathematical sciences, nor the actual use of mathematical techniques in society or the practices of mathematics instruction. Instead, mathematics is always connected to those things which at any given moment are regarded as general goods, thus through mathematics creating a connection between connecting these goods and the practices of elementary mathematics education.

O*n a third level* I try to understand the relation between the two first levels. On one hand the practices of mathematics instruction seem to be explainable on a purely sociological level. On the other it is quite clear from discussions in teacher magazines that change took place because of beliefs about mathematics. Thus, on the one hand, the changing contents of the mathematics of schooling can be seen as mere chimera, reflecting some deeper, more fundamental ("material") level, beyond the discursive. On the other hand, this peculiar fantasy-object seem to have *real effects* on a deeper level. It is thus necessary to account for what can most properly be understood as an interplay between *mathematics as a reflection* of school-books, and school-books *as reflections of* (beliefs about) *mathematics*. This can only be done by following the evolution of mathematics education quite

[1] Christopher Clavius (1586), *Ratio studiorum et institutiones scholasticae Societatis Iesu per Germaniam olim vigentes collectae*, cited in Dear, *Mersenne and the learning of the schools*, p. 45.
[2] *Hög tid för matematik*, p. 25, my translation. For the Swedish original, see p. 25 above.

closely. Therefore the attempt to account for this interplay is responsible for most of the pages in the historical narrative, i.e. describing and explaining in detail the contents of several books used for instruction at different points in time, how they differ from their predecessors, how these differences can be explained sociologically, how the changes were explained by the authors themselves and their peers, and finally how all this can be taken in at the same time. I will here give one example of what this can mean.

The most fascinating part of the history of Swedish mathematics education is perhaps the relation between ideas regarding the *number concept*, and the development of practices consisting of having children work with never ending series of small written mathematical problems. The evolution of these practices are easily seen to be largely caused by practical necessities, such as the need to keep children busy without supervision. At the same time this evolution was constantly perceived as *meaningful* by reference to the necessity of problem solving for the formation of number concepts. The complicating fact is, though, that everyone seems to have known nonetheless that this meaning was *ad hoc* and the real cause of the problem solving practices was circumstances not related to mathematics at all.

I interpret this dynamic between meaning and practical circumstances as a variation of the psychoanalytical theme of a forced free choice, i.e. that you have a free choice as long as you chose the "right" thing.[3] Mathematics educators have apparently always (or at least since the middle of the 1900th century) known, on some level, that their freedom is severely restricted by social circumstances. Nevertheless they, or at least those most successful, always have made a *choice*, within the limits of necessity, i.e. they have perceived possibilities of meaningful action. On the one hand, they have transformed the actual content of the practices of elementary mathematics instruction, e.g. by writing a new type of school-book. On the other hand, and more importantly, not only permeated the inventions with a specific meaning related to mathematics but also participated in a collective and continuous transformation of the meaning of mathematics and mathematical learning in general.

A mathematics educator wrote that knowledge of mathematics is a necessary tool for finding systems and regularities in a chaotic daily life situation.[4] Paraphrasing this statement, I would say that theories of mathematics education such as those related to the formation of number concepts are necessary tools for making meaningful action possible in the context of elementary mathematics education. In conclusion of this example, my main point is not that the idea of number concepts is primarily useful for understanding just those practices supposedly designed to promote their formation, but that this form of analysis is my attempt to account for the

[3] Žižek, *The ticklish subject*, p. 19.
[4] Skovsmose, *Towards a philosophy of critical mathematics education*, p. 63.

richness of meaning which for the last 150 years have been characteristic for Swedish mathematics education.

Closely related to this level of understanding is a distinction I make between the *inside* and the *outside* of the mathematics of schooling. The process of meaning-creation just described pertains to its inside, which can be understood as a rich, fascinating and enticing field open to endless explorations. In contrast, I understand its outside as a "thought-stopper", a *fetish* felt to be extremely important, not with reference to any particular meaning but through a vague and endless series of properties such as usefulness, science, democracy, creativity, economic growth, etc. I argue that, while the inside of mathematics gives meaning to the practices of schooling (mainly for teachers), the outside is what remains (for former students) some time after the process of schooling has ended. It is commonly known that most people do not *remember* very much of the mathematics they did in school. This does not mean though that mathematics education usually does not leave any traces. I argue that the objectively existing, universal and powerful mathematics, its *presence*, is a correlate to the non-presence of coherent memories and an articulated understanding of our experiences of elementary mathematics instruction. It can be understood as a *symptom* or as the result of a *trauma*. Thus, it should come as no surprise that mathematics is often defended quite emphatically, even by people who know that they know very little about it. So, to conclude my discussion of the outside of the mathematics of schooling, I mean that it is the collective trauma of mathematics instruction that bestows mathematics with the peculiar properties which make it politically effective.

The mathematics of schooling limits our space of thought and action by constituting a set of necessities, such as compulsory mathematics instruction of certain sorts. Besides contributing to the knowledge of Swedish mathematics education and its history, an important goal of this thesis is to show that these limits do not originate "out there", i.e., in some objective relation between nature, mathematics and mankind, but that they are our own creation. Most importantly this means that they can be discussed and, if we so decide, changed.

Referenser

1946 års skolkommissions betänkande med förslag till riktlinjer för det svenska skolväsendets utveckling, Stockholm, 1948.

-id-, ”Räknelära för folkskolor af C. A. Nyström”, *Svensk Läraretidning*, 1884, s. 321-322.

-k-, ”Den första räkneundervisningen”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1878, s. 215-228.

A., ”Återblick”, *Tidning för Folkskolan*, 1878, s. 2-5.

A. A., ”Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar af K. P. Nordlund”, *Svensk Läraretidning*, 1890, s. 308.

adn., ”Är professor Keys fordran på en reform af den naturvetenskapliga undervisningen vid våra läroverk berättigad?”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1875, s. 57-78.

Agardh, Carl Adolph & Magnus Bruzelius, *Pestalozzi's Elementar-böcker*, Lund, 1808.

Agrelius, Nicolaus, *Institutiones arithmeticae, eller Kårt underwisning, om de förnämsta och högnödigsta reglor, exempel, italienska practiquer och compendier, som i dagelig räkning mäst brukelige äro. Dem konst-älskadom! til nytto och gagn sammanskrefwen*, Stockholm, 1754 [1655].

—, *Institutiones arithmeticae, eller Kårt underwisning, om de förnämsta och högnödigsta reglor, exempel, italienska practiquer och compendier, som i dagelig räkning mäst brukelige äro. Dem konst-älskadom til nytto och gagn sammanskrefwen: af Nicolao P. Agrelio. Men nu förökt med några kårtare räkne-sätt, samt tydelig underrättelse om wäxel-räkningar och italienska bokhålleriet*, Stockholm, 1798 [1655].

Alder, Ken, *Engineering the revolution: arms and enlightenment in France 1763-1815*, Princeton, N.J., 1997.

—, ”French engineers become professionals; or, how meritocracy made knowledge objective” i William Clark, Jan Golinski & Simon Schaffer (eds.), *The sciences in enlightened Europe*, Chicago & London, 1999.

Almqvist, Carl Jonas Love, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, Stockholm, 1832.

—, *Lärobok i geometrien, innefattande grunderna för läran om Linier, Ytor Planimetri och Landtmäteri, solida Figurer Stereometri utgörande en ny bearbetning af Chr. Wolffs Anfangsgrnde allre mathematischen Wissenschaften 1 Th II Abschn.*, Stockholm, 1833.

—, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, Stockholm, 1834 [1832].

—, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, Stockholm, 1837 [1832].

—, *Lärobok i geometrien: innefattande grunderna för läran om linier, ytor (planimetri och landtmäteri), solida figurer (stereometri), samt deskriptiv geometri*, Stockholm, 1842 [1833].

Alreik, Anders, *Theoret. praktisk lärobok i elementar-geometrien och plana trigonometrien. Till Landtmätares, Skol-Lärares samt den Studerande ungdomens m.fl. tjenst*, Stockholm, 1837.

—, *Theoret. praktisk lärobok i landtmäteriet. Till Landtmätares, lantbrukares, juristers och kameralisters m.fl. tjenst*, Stockholm, 1843.

Andersson, Inger M., *Läsning och skrivning: en analys av texter för den allmänna läs- och skrivundervisningen 1842-1982*, Umeå, 1986.

Andersson, Nils, *1878 års katekes: debatten om katekesens form och innehåll 1810-1878*, Lund, 1973.

Andersson, Roloff, *Arithmetica tironica; eller Kort och grundelig anwisning, at practice lära all nödwändig hus- och handels-räkning; efter then nu för tiden mäst brukeliga och fördelaktigaste läro-methode. Til allmänhetens- och i synnerhet scholarnes: tjenst och nytto. Efter sednaste kongl. maj:ts mynt-ordning samlad af Roloff Andersson. Med allernådigste privilegio.*, Stockholm, 1779.

—, *Genwäg til borgerliga räkne-konsten hwarigenom et barn med litet biträde af informator, och en äldre som med god eftertanka är begåfwad, utan information på ganska kort tid kan wägledas til det nödwändigaste af denna altid nyttiga wetenskapen.: Sammanskrifwen och nu tredje gången uplagd samt ansenligen tilökt och förbättrad af Roloff Andersson. Med kongl. maj:ts allernådigste privilegium*, Stockholm, 1798.

—, *Arithmetica tironica, eller Kort och grundlig anwisning at practice lära all nödwändig hus- och handels-räkning; efter den nu för tiden mäst brukliga och fördelaktigaste läro-methode, til allmänhetens och i synnerhet scholarnes tjenst: och nytta, efter sednaste kongl. maj:ts mynt-ordning*, Örebro, 1830 [1779].

—, *Genwäg till borgerliga räkne-konsten*, Örebro, 1843.

"Andra kammaren diskuterar undervisningen i modersmål och räkning", *Svensk Läraretidning*, 1931, s. 307-309, 334-335.

Anjou, Christofer Ludvig, Karl Kastman & Knut Arvid Kastman, *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Pedagogik.*, Karlstad, 1876.

Anjou, Christofer Ludvig, Karl Kastman, Knut Kastman & Albrekt Segerstedt, *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Häftet V. Metodik: Räknekonsten i Folkskolan.*, Stockholm, 1876.

Anonymous, *Samtal emellan en Herre och en Fru om geometriens nytta för unga studerande*, Stockholm, 1743.

Anvisningar och råd till Lärare, angående tillämpningen af de till Nådiga Stadgan för Rikets allmänna Elementarläroverk af den 29 januari 1859 hörande undervisningplaner, Stockholm, 1859.

Anvisningar och råd till lärare, om sättet att verkställa hvad Kongl.: Maj:t i nåder uti skol-ordningen af den 16 Dec. 1820 stadgat och anbefallt. Bihang till uppfostrings-comiteens underdåniga förslag till skol-lag, Stockholm, 1821.

B. E., ”Provräkningsuppgifter till Folkskolans Räknebok. Av Värnder Rydén och Hedvig Norgren. 5:e delen. 7:e årsklassen och fortsättningsskolan.”, *Svensk Läraretidning*, 1930, s. 403.

Bachelard, Gaston, *La philosophie du non: essai d'une philosophie du nouvel esprit scientifique*, Paris, 1949.

Barthes, Roland, *Mytologier*, Staffanstorp; Solna, 1969.

Beckmark, Nils Petter, *Utkast til föreläsningar öfver algebra*, Stockholm, 1794.

—, *Arithmetik*, Stockholm, 1795.

Berg, Alfred, *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor*, Stockholm, 1877.

—, *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor*, Stockholm, 1886.

—, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, Stockholm, 1888.

—, *Folkskolans räknelära*, Stockholm, 1889.

—, *Räknelära för de allmänna läroverken*, Stockholm, 1890 [1888].

—, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, Stockholm, 1898 [1888].

—, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, Stockholm, 1902 [1888].

—, *Berg-Hagström: Räknelära för allmänna läroverk och flickskolor. Tillägg till Berg-Hagström: Räknelära: Andra delen. Av Elis Hjalmar. Med Svar.*, Stockholm, 1949 [1888].

Berg, Alfred & Karl Hagström, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, Stockholm, 1911 [1888].

—, *Räknelära för allmänna läroverk och flickskolor.: Förberedande skolans kurs. Utarb. av Elis Hjalmar. Med svar.*, Stockholm, 1934 [1888].

Berg, Alfred, Karl Hagström & Elis Hjalmar, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, Stockholm, 1930 [1888].

Bergius, Axel Theodor, ”Svar till Hr Otterström med anledning af hans replik”, *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare*, 1849, s. 364-366.

—, ”Utkast till Lärobok i Aritmetiken för skolor i allmänhet och folkskolor i synnerhet, af J. Otterström”, *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare*, 1849, s. 116-220.

—, *Elementarkurs i räknekonsten*, Stockholm, 1850.

—, *Elementarkurs i räknekonsten jemte öfningar i hufvudräkning*, Stockholm, 1850.

—, *Geometri och lineart eckningar, utur åskådningen utvecklad, och för den första undervisningen utarb*, Stockholm, 1850.

—, ”Om elementarundervisningen i matematik”, *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare*, 1850, s. 84-91.

—, *Elementarkurs i algebra, innefattande läran om 1:a och 2:a gradens eqvationer*, Stockholm, 1853.

—, ”Om skolundervisningen i Matematik”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1868, s. 212-226.

Bergmarck, Johan, *Svensk räkne-bok, eller et sådant räknesätt, hvarigenom alla...hushåldnings-mål kunna...vederbörligen utredas*, Stockholm, 1755.

Bergsten, Abel, *Folkskolans räkneundervisning: kurser och arbetssätt: en utredning*, Lund, 1939.

Biagioli, Mario, ”The social status of italian mathematicians, 1450-1600”, *History of Science*, vol 22, 1989, s. 41-68.

Bien, David, "Military education in 18th-century France: technical and non-technical determinants" i Monte and L. Paszek. Wright (ed.), *Science, technology and warfare: third military history symposium*, Washington, D.C, 1969.

Bjerneby Häll, Maria, *Varför undervisning i matematik?: argument för matematik i grundskolan - i läroplaner, läroplansdebatt och hos blivande lärare*, Linköping, 2002.

Björling, E. G., *Elementar-lärobok i Algebra*, Stockholm, 1832.

—, "Några reflexioner, beträffande elementarundervisningen i mathematik, i anledning af den i Bihang till paedagogisk tidskrift intagna berättelsen om Rektorsmötet 1868", *Pedagogisk Tidskrift*, 1869, s. 59-70.

Blidberg, A. H., "Geometrin på latinlinjen", *Pedagogisk Tidskrift*, 1904, s. 347-350.

Bourdieu, Pierre, *Homo academicus*, Stockholm/Stehag, 1996.

—, *The state nobility: elite schools in the field of power*, Cambridge, 1996.

Broady, Donald, *Sociologi och epistemologi: om Pierre Bourdieus författarskap och den historiska epistemologin*, Stockholm, 1991.

—, "Bildningstraditioner och läroplaner" i Läroplanskommittén (ed.), *Skola för bildning: huvudbetänkande*, SOU 1992:94, Stockholm, 1992, s. 347-370.

Bråkenhielm, Per Reinhold, *De sex första samt elfte och tolfte böckerna af Euclidis Elementa jemte planimetri, stereometri och geometriska problem*, Örebro, 1844.

Bucht, G. W. & J. A. Svensk, *Anteckningar i räknemetodik för folkskolan och småskolan*, Stockholm, 1894.

Butler, Judith, Slavoj Žižek & Ernesto Laclau, *Contingency, hegemony, universality: contemporary dialogues on the left*, London, 2000.

Carlsson, Magda, "Räknetrappan och talbildslapparna i den första räkneundervisningens tjänst", *Småskolan*, 1929.

—, "Räkneundervisningen", *Småskolan*, 1929, s. 292.

Cartwright, Nancy, *How the laws of physics lie*, Oxford, 1983.

—, *The dappled world: a study of the boundaries of science*, Cambridge, 1999.

Castoriadis, Cornelius, *Filosofi, politik, autonomi*, Stockholm; Stehag, 1995.

Celsius, Anders, *Arithmetica Eller Räkne-konst, Til En Grundelig Inledning För Swea-Rikes Ungdom Utgifwen af And. Celsius Mathes. Prof. wid Kongl. Acad. och Secret. wid Kongl. Wetensk.Societ. i Upsala*, Upsala, 1741 [1727].

Christie, Nils, *Om skolans inte fanns*, Stockholm, 1972.

Clark, William, "The death of metaphysics in enlightened Prussia" i William; Golinski Clark, Jan; Schaffer, Simon (ed.), *The sciences in enlightened Europe*, Chicago & London, 1999.

Cockcroft, W. H., *Mathematics counts: report of the committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of W.H. Cockcroft*, London, 1982.

Dahlgren, Harald, "Die Mathematik an den Volksschulen und volksschullehrerseminarien Schwedens", *Pedagogisk Tidskrift*, 1911, s. 118-146.

Dahllöf, Urban, "Bränningar, lotsning och norska efterdyningar" *Vänbok till Wiggo Kilborn*, Göteborg, 2001.

Dahm, O. E. L., *Skolmästarkonst. Antydningar för Lärare och Skolinspektörer*, Kalmar, 1846.
Dalin, E. M., *Bidrag till de matematiska vetenskapernas historia i Sverige före 1679*, Uppsala, 1875.
Dalin, Emil, "Provräkning som undervisningsmedel", *Småskolan*, 1927, s. 390.
Dalström, J. J., Alexander Jonsson, F. Wennerqvist & L. A. Edén, *Granskning af läroböcker i aritmetik, verkställd af komiterade, utsedde af Stockholms folkskollärareförening*, Stockholm, 1883.
Dear, Peter, "Jesuit mathematical science and the reconstitution of experience in the early secenteenth century", *Studies in History and Philosophy of Science*, vol 18, nr 2, 1987, s. 133-175.
—, *Mersenne and the learning of the schools*, Ithaca, N.Y., 1988.
—, "From truth do disinterestedness in the seventeenth century", *Social Studies of Science*, vol 22, nr 4, 1992, s. 619-631.
—, *Discipline & experience: the mathematical way in the scientific revolution*, Chicago, 1995.
Delander, J., *Lärobok i elementerne af algebra: innefattande första och andra gradens eqvationer, jemte logarithmer och serier*, Stockholm, 1836.
Descartes, René, *Valda skrifter*, Stockholm, 1953.
Dewey, John, "Mitt pedagogiska credo" i Ulf P. Lundgren & Sven G. Hartman (eds.), *Individ, skola och samhälle. Pedagogiska texter av John Dewey.*, Stockholm, 1980 [1897].
Dowling, Paul, *The sociology of mathematics education: mathematical myths/pedagogic texts*, London, 1998.
Eamon, William, *Science and the secrets of nature: books of secrets in medieval and early modern culture*, Princeton, 1994.
Edlund, Erland, m.fl., *Underdånigt betänkande och förslag afgifvet den 17 december 1858 af den för granskning af 1856 års Skol-Stadga i nåder förordnade Komité*, Stockholm, 1858.
Ekwall, Sven, *Tidig småskollärarutbildning*, Lund, 1987.
Elis, Hjalmar, "Matematikdebatten. En sakkunnig i kritikens skärseld", *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1935, s. 87, 92.
Elowsson, Gullbrand, *Elementar-lärobok i aritmetik*, Uppsala, 1868.
—, "Om den aritmetiska undervisningsmetoden. 1 Diskussion om undervisningen i aritmetik", *Tidskrift för matematik och fysik*, 1868, s. 294-297.
—, "Om den aritmetiska undervisningsmetoden. 1 Diskussion om undervisningen i aritmetik", *Tidskrift för matematik och fysik*, 1869, s. 40-56.
Emanuelsson, Göran, *Svårt att lära - lätt att undervisa?: om kompetens-utvecklingsinsatser för lärare i matematik 1965*-2000, Göteborg, 2001.
en, ny, "Om matematik såsom undervisningsämne för flickor, I och II", *Tidskrift för Hemmet*, 1865, s. 160-166.
Englund, Tomas, *Medborgerlig läroplanskod för folkskola, fortsättningsskola och grundskola 1918/19-?*, Stockholm, 1980.
Ericsson, Elsa, "Nya vägar i matematikundervisningen. Rön och experiment ur min praktik", *Svensk Läraretidning*, 1925, s. 814-816.

—, *Barnens räknearbete under de sex första skolåren: metodiska anvisningar för lärare*, Stockholm, 1928.
—, ”Några synpunkter på den grundläggande räkneundervisningen”, *Svensk Läraretidning*, 1931, s. 403-404.
Erikson, Kenneth, et al., ”Inte så himla viktigt kunna matematik”, *Dagens Nyheter*, 31 oktober 2004.
Ernest, Paul, *The philosophy of mathematics education*, London, 1991.
Eves, Howard Whitley & Jamie H. Eves, *An introduction to the history of mathematics*, Philadelphia, 1990.
Falck, Henrik, *Practisk lärobok i arithmetiken med fullständig underrättelse om in- och utrikes mått, mål, vigt och mynt*, Upsala, 1830.
—, *Practisk lärobok i geometrien och trigonometrien med strängt bevis i läran om parallela linier*, Uppsala, 1831.
Feyerabend, Paul K., ”Classical empiricism” i Robert E. Butts & John W. Davis (eds.), *The methodological heritage of Newton*, Oxford, 1970, s. 150-170.
Fichte, Johann Gottlieb, *Tal till tyska nationen*, Stockholm, 1914 [1807/1808].
Fineman, Carl Olof, *Lärobok uti räknekonsten, lämpad efter vexelundervisnings-methoden*, Stockholm, 1826.
—, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*, Stockholm, 1830.
—, *Inledning till geometrien jemnte linear-tecknings öfningar för folkscholor*, Stockholm, 1832.
”Folkskolebetygens praktiska betydelse”, *Svensk Läraretidning*, 1895, s. 35.
Forssell, Olof H., *Algebra för Begynnare. Författad och utgifven af Olof H. Forssell, Lector i Mathem. vid Kongl. Krigs-Academien*, Stockholm, 1801.
—, *Arithmetik för Begynnare. Författad och utgifven af Olof H. Forssell, Professor och Kyrkoherde*, Stockholm, 1818.
Foucault, Michel, *Övervakning och straff: fängelsets födelse*, Lund, 1987.
Fr., ”Räknelära för folkskolan framstäld genom exempel enligt eqvationsmetoden af J. Thysell och P. Nordström. Första årskursen”, *Svensk Läraretidning*, 1888, s. 451-452.
—, ”Räknelära för folkskolan, framstäld genom exempel enligt eqvationsmetoden af J. Thysell och P. Nordström. Första årskursen.”, *Svensk Läraretidning*, 1888, s. 451-452.
—, ”Svar [till Thysell och Nordström]”, *Svensk Läraretidning*, 1889, s. 16-17.
—, ”Thysell-Nordströms räknelära. Svar på 'protester och medgifvanden'”, *Svensk Läraretidning*, 1889, s. 46.
—, ”Räknebok för folkskolan af L. T. Larsson, seminarieadjunkt, och N. Lundahl, folkskollärare. Tredje och fjärde årskurserna.”, *Svensk Läraretidning*, 1890, s. 251.
—, ”Räknebok för folkskolorna af K. O. Sjölander och A. G. Vihlander. Häft. III och IV. Stockholm, P. A. Nordstedt söners förlag.”, *Svensk Läraretidning*, 1890, s. 310-311.
—, ”Räknebok för folkskolorna utarbetad med ledning af folkskolelärobokskommitténs grundsatser af K. O. Sjölander och A. G.

Vihlander. Häft. III och IV. Stockholm, P. A. Nordstedt söners förlag.", *Folkskolans vän*, 1890, s. 5-6.
—, "Sjölander-Vilanders räknebok", *Svensk Läraretidning*, 1890, s. 376-377.
—, "Svar [till K. O. Sjölander]", *Svensk Läraretidning*, 1890, s. 409.
—, "Provräkningsuppgifter till Folkskolans räknebok av Värner Rydén, Karl Frank och Hedvig Norgren. Första-fjärde delarna. Fjärde-sjätte årsklassernas kurser.", *Svensk Läraretidning*, 1928, s. 785.
Freedman, David, "As others see us", *Journal of Educational Statistics*, vol 12, 1987, s. 101-128.
—, "Statistical models and shoe leather", *Sociological methodology*, vol 21, 1991, s. 291-313.
—, "Some issues in the foundations of statistics", *Foundations of Science*, vol 1, 1995, s. 19-39.
—, "From association to causation: some remarks on the history of statistics", *Statistical Science*, vol 14, nr 3, 1999, s. 243-258.
Friesen, Sixten von, "Geometrisk Elementarkurs af E. F. Gustrin, Docent vid Lunds Universitet. Första delen. Åskådningslära jämte några satser med bevis. Lund 1874. C.W. K. Gleerups förlag.", *Pedagogisk Tidskrift*, 1875, s. 235-263.
Frängsmyr, Tore, *Wolffianismens genombrott i Uppsala: frihetstida universitetsfilosofi till 1700-talets mitt*, Uppsala, 1972.
Frängsmyr, Tore, John L. Heilbron & Robin E. Rider, *The quantifying spirit in the 18th century*, Los Angeles, 1990.
Funkenstein, Amos, *Theology and the scientific imagination from the middle ages to the seventeenth century*, Princeton, N.J., 1986.
Förhandlingar vid Femte Allmänna Svenska folkskolläraremötet i Gefle den 25, 26, och 27 Juli 1865, Gävle, 1865.
Gadamer, Hans-Georg, *Sanning och metod: i urval*, Göteborg, 1997.
Gallander, Otto, "Om geometriundervisningen i England", *Verdandi*, 1902, s. 122-127.
Gascoigne, John, "Mathematics and meritocracy: the emergence of the Cambridge mathematical tripos", *Social Studies of Science*, vol 14, nr 4, 1984, s. 547-584.
—, "From Bentley to the victorians: the rise and fall of British newtonian natural theology", *Science in Context*, vol 2, nr 2, 1988, s. 219-256.
Gaukroger, Stephen, *Explanatory structures: a study of concepts of explanation in early physics and philosophy*, Brighton, 1978.
Giard, Luce, "Remapping knowledge, reshaping institutions" i Stephen Pumfrey, Maurice Slawinski & Paolo Rossi (eds.), *Science, culture and popular belief in renaissance Europe*, Manchester, 1991, s. 19-47.
Gigerenzer, Gerd, et al., *The empire of chance: how probability changed science and everyday life*, Cambridge, 1989.
Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande, Stockholm, 1887.
Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande. Räkning, Stockholm, 1887.
Green, Sven, "Barnens primära räkneövningar som uppgift för grupparbete", *Skola och Samhälle*, 1959, s. 171-176.

Gringas, Yves, ”What did mathematics do to physics?”, *History of Science*, vol 39, 2001, s. 384-416.

Gräns, Johan, *Undervisning uti räknekonsten, lämpad så väl til de okunniges som mera kunniges begrep, grundeligen och på et tydligt samt lätt sätt innefattande handels-och hushålls-räkning*, Stockholm, 1801.

Gustafsson, Lars & Lars Mouwitz, *Vuxna och matematik: ett livsviktigt ämne*, Göteborg, 2002.

Gårding, Lars, Otto Frostman, Åke Pleijel & C. E. Sjöstedt, ”Matematiken på det nya gymnasiet”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1953, s. 488-491.

Göransson, Edvard, ”Bidrag till kännedom om undervisningen i Sverige under 1800-talet” i O. G. A. Hahr & J. M. Lindqvist (eds.), *Redogörelse för Stockholms samgymnasium*, Stockholm, 1905.

—, ”Nyare riktlinjer för matematikundervisningen” *Årsredogörelse för högre realläroverket å Norrmalm*, Stockholm, 1907.

Haase, Hermann, *Den första räkneundervisningens metodik*, Lund, 1913.

Hacking, Ian, *The emergence of probability: a philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference*, London, 1975.

—, *Representing and intervening: introductory topics in the philosophy of natural science*, Cambridge, 1983.

—, ”The self-vindication of the laboratory sciences” i Andrew Pickering (ed.), *Science as practice and culture*, Chicago, 1992, s. 29-64.

—, ”What mathematics has done to some and only some philosophers” i Timothy Smiley (ed.), *Mathematics and necessity: essays in the history of philosophy*, Oxford, 2000.

Hadden, Richard W., *On the shoulders of merchants: exchange and the mathematical conception of nature in early modern Europe*, Albany, 1994.

Hagström, P., *Nyckel till Hagströms räknestafvar*, Trelleborg, 1885.

Hanson, Hertha, *J. H. Ekendal och den nya folkskolan*, Malmö, 1984.

Harvey, J. H., *Commercial arithmetic*, London, 1978 [1949].

Hassler-Göransson, Carita, et al., *Betänkande med utredning och förslag angående betygssättningen i folkskolan*, Stockholm, 1942.

Hatami, Reza, *Reguladetri: en retorisk räknemetod speglad i svenska läromedel från 1600-talet till början av 1900-talet*, Växjö, 2007.

Hazelius, J. A., *Bidrag till Svenska Elementarundervisningens historia. Anförande vid termin-afslutningen i Nya Elementarskolan den 15 Juni 1860 af Direktionens ledamot, numera generalmajoren J. A. Hazelius.*, Stockholm, 1862.

Hellström, Leif, *Undervisningsmetodisk förändring i matematik: villkor och möjligheter*, Malmö, 1985.

hgm., ”Om tysta öfningar i räkning (inom talområdet 1-1 000)”, *Folkskolans vän*, nr 21, 1886, s. 3-5.

Hultman, Frans Wilhelm, ”P. A. Siljeströms Lärobok i geometrin till folkskolornas tjenst. Stockholm 1867”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1867, s. 382-385.

—, ”Anmälan af tio stycken räkneböcker”, *Tidskrift för matematik och fysik*, 1868, s. 233-244.

—, ”Svenska aritmetikens historia”, *Tidskrift för matematik och fysik*, 1868-1871, 1874. (Införd 1868: s. 1-11, 53-67, 149-164, 245-256, 1869: s. 57-63, 105-113, 1870: s. 7-11, 49-95, 241-249, 1871: s. 5-12, 97-101, 209-225, 1874: s. 1-10, 145-162, 225-240.)

—, ”Svenska aritmetikens historia”, *Tidskrift för matematik och fysik*, 1871.

Humboldt, Wilhelm von, ”Ueber die innere und äußere Organisation der höheren wissenschaftlichen Anstalten in Berlin” [1810] i *Werke in fünf Bänden. 4, Schriften zur Politik und zum Bildungswesen*, utgivna av Andreas Flitner & Klaus Giel (eds.), Darmstadt, 1982, s. 255-266.

Husén, Torsten & Urban Dahllöf, *Matematik och modersmålet i skola och yrkesliv: studier av kunskapskrav, kunskapsbehållning och undervisningens uppläggning*, Stockholm, 1960.

Husserl, Edmund, ”Philosophie der Arithmetik” [1891] i Lothar Eley (ed.), *Husserliana. Edmund Husserl. Gesammelte Werke. Band XII: Philosophie der Arithmetik.*, Haag, 1970.

Håstad, Matts, ”Förslag till ny matematikkurs i grundskolan”, *Elementa*, 1966, s. 302-306.

—, *Matematikutbildningen från grundskola till teknisk högskola i går - idag - i morgon*, Stockholm, 1978.

Häggmark, Per, ”Skolmatematik för hundra år sedan”, *Nämnaren*, nr 3, 1984.

Hög tid för matematik, Göteborg, 2001.

Illich, Ivan, *Deschooling society*, New York, 1972.

”IMU i praktiken. Mer plus än minus”, *Lärartidningen svensk skoltidning*, nr 7, 1968, s. 11-16.

”IMU kräver mer förberedelse- och konferenstid”, *Skolvärlden*, nr 10, 1968, s. 6-7.

”J. H. Pestaozzi och hans uppfostrings-grundsatser”, *Tidskrift för Folkskolelärare och folkskolebildningens vänner*, 1849, s. 199-206.

Johansson, Bengt, ”Sveriges första forskare i matematikdidaktik”, *Nämnaren*, nr 3, 1986.

— (ed.), *Minnen och dokument. Aurelius' räknelära från 1614: nyutgåva av den första tryckta läroboken i matematik som skrivits på svenska*, Uppsala, 1995 [1614]. (Nyutgåva av Aegidius Matthiae Aurelius *Arithmetica Eller Een Kort och Eenfaldigh Räknebook uthi helle och brutne Taal.* Uppsala, 1614.)

Johansson, Bengt & Inger Wistedt, *Problemlösning*, Göteborg, 1991.

—, *Tal och räkning 1*, Göteborg, 1991.

Johansson, Jan-Erik, ”Om räkneundervisningens i folkskolan”, *Folkskolans vän*, 1889, s. 14-32.

Johansson, Jan Erik, ”Folkskolans geometri af J. E. Johansson, folkskollärare”, *Folkskolans vän*, 1890, s. 276-277.

Johnsson, Gunnar, ”Matematikundervisning på villovägar: Den 'nya' matematiken upp som en sol och ner som en pannkaka”, *Lärartidningen Svensk skoltidning*, nr 4, 1979, s. 10-12.

Josephson, Olof, ”Till frågan om gymnasiets matematikkurser”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1905, s. 301-308.

Jörlander, Henrik, Karl Spångberg, Conrad Lönnqvist & Harald Johnsson, ”Ämneskonferensen i Södertälje”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1949, s. 169.
Kaleen, Gustaf, *Sveriges första folkskollärarförening: ett bidrag till den pedagogiska och didaktiska diskussionen vid mitten av 1800-talet*, Stockholm, 1966.
Kant, Immanuel, *Grundläggning av sedernas metafysik*, Göteborg, 1997 [1785].
Karlström, Gustav, ”Räkneprov för folkskolan”, *Folkskollärarnas tidning*, 1927, s. 161.
Kastman, Karl, ”Bör läraren aldrig använda något af barnen till hjelp vid undervisningen?”, *Tidning för Folkskolan*, 1872, s. 116-120.
—, ”De tysta öfningarna i Folkskolan”, *Tidning för Folkskolan*, 1877, s. 72-77.
—, ”De tysta öfningarna i skolan”, *Tidning för Folkskolan*, 1877, s. 229-234.
—, ”Ytterligare om 'de tysta öfningarna'”, *Tidning för Folkskolan*, 1879, s. 209-215.
Kastman, Knut Arvid, ”Samling af Räkneexempel, till Folkskolornas tjenst utgif.”, *Tidning för Folkskolan*, 1871, s. 132-133.
—, ”Samling af Räkneexempel, till Folkskolornas tjenst utgif.”, *Tidning för Folkskolan*, 1874, s. 292-293.
Kellin, Sven O., *Den omutlige monitören: gm hvilken läraren kontrollerar utan facitbok uträkningen af Räknenötter*, Höör, 1878.
—, ”Ett strå till frågan om 'de tysta öfningarne'”, *Tidning för Folkskolan*, 1879, s. 281-283.
Kilborn, Wiggo, *Vad vet fröken om baskunskaper?: matematik för skolan och samhället*, Stockholm, 1981.
—, ”Synen på baskunskaper i ett tidsperspektiv” i Myndigheten för skolutveckling (ed.), *Baskunnande i matematik*, Stockholm, 2003.
Kjellberg, K. R., ”Undervisningen i räkning med decimaler”, *Svensk Läraretidning*, 1886, s. 165-167.
Kjellin, Carl Eric, *Grunderna till Arithmetiken, innehållande, jemte dess Tillämpning till alla vanligen förefallande Räkningar, åtskilliga andra, Genvägar till deras förenklande, särdeles genom Decimal-Räkningen, samt Flera Reductions-Tabeller*, Stockholm, 1816.
Kommissionen för behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor, *Underdånigt betänkande*, Stockholm, 1872.
Kongl. maj:ts förnyade nådiga skol-ordning, Stockholm, 1821.
Kongl. Maj:ts Nådiga Stadga angående folk-underwisningen i Riket; Gifwen Stockholms Slott den 18 Junii 1842, Falun, 1844.
Kristiansson, Margareta, *Matematikkunskaper Lgr 62, Lgr 69*, Göteborg, 1979.
Kruse, Anna, *Åskådningsmatematik: Ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikens område*, Stockholm, 1921 [1910].
Kuhn, Thomas S., *The structure of scientific revolutions*, Chicago, 1962.
—, ”Mathematical vesus experimental traditions in the development of physical science” i Thomas S. Kuhn (ed.), *The essential tension*, Chicago och London, 1977, s. 31-65.
Labinger, Jay A. & H. M. Collins, *The one culture?: a conversation about science*, Chicago, 2001.
Laclau, Ernesto & Chantal Mouffe, *Hegemony & socialist strategy*, London, 1985.

Lagerhamn, C. M., *Geometri, i förening med linearteckning för Folk-Lärare-Seminarier och Folkscholor*, Stockholm, 1843.
Larson, Harald Yngve & Hans Seger, *Proportionslära, likformighetslära och planimetri*, Stockholm, 1961.
Larsson, Esbjörn, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning: Kungl. krigsakademien mellan åren 1792 och 1866*, Uppsala, 2005.
Larsson, Inger (ed.), *Individualiserad matematikundervisning: en bok om IMU-projektet*, Malmö, 1973.
Latour, Bruno & Steve Woolgar, *Laboratory life: the social construction of scientific facts*, Beverly Hills, 1979.
Laurin, P. G., "Om matematiken och fysiken i kommittébetänkandet", *Skolan*, nr 2, 1902, s. 252-264.
Lave, Jean, *Cognition in practice: mind, mathematics and culture in everyday life*, Cambridge, 1997 [1988].
Lave, Jean & Etienne Wenger, *Situated learning: legitimate peripheral participation*, Cambridge, 1991.
Lavén, Abraham Wilhelm, *Lärobok uti mathematik: bok 1. räknelära*, Stockholm, 1842.
—, *Lärobok uti mathematik.: Bok 1. Räknelära. 2:a uppl. 1. Arithmetik och algebra till läran om eqvationer; jemte kort tillägg om serier ochlogarithmer samt en tabell öfver mått, vigter och mynt*, Stockholm, 1852.
Liedman, Sven-Eric, *I skuggan av framtiden: modernitetens idéhistoria*, Stockholm, 1997.
Lindberg, Bo, *Humanism och vetenskap: den klassiska filologien i Sverige från 1800-talets början till andra världskriget*, Grillby; Stockholm, 1987.
Lindblom, L. C., "Räknestafvar af P. Hagström. Utgifvarens förlag, Kyrkoköpinge, Trelleborg.", *Folkskolans vän*, nr 7, 1886, s. 3-4.
Lithander, C. L., *Aritmetik och Euklides' Elementer uti Geometrien*, Stockholm, 1814.
Lundin, Sverker, "Matematikens betydelse" i Mikael Börjesson, et al. (eds.), *Fältanteckningar. Utbildnings- och kultursociologiska texter tillägnade Donald Broady*, Uppsala, 2006, s. 367-376.
Läroplanskommittén, *Skola för bildning: huvudbetänkande*, SOU 1992:94, Stockholm, 1992.
Läroverkskommittén, *Betänkande afgifvet den 8 december 1902 af den för utredning af vissa frågor rörande de allmänna läroverken den 26 maj 1899 i nåder tillsatta kommitté*, Stockholm, 1902.
m., "Lärobok i Aritmetik. Till skolornas tjenst utgifven af P. A. Siljeström", *Svensk Läraretidning*, 1883, s. 446.
Magne, Olof, "Sjunkande räknefärdighet", *Folkskollärarnas tidning*, nr 45, 1952.
—, "Undersökning om räknefärdigheten", *Folkskollärarnas tidning*, nr 51-52, 1953.
—, *En redogörelse för experimentella undersökningar rörande matematik-undervisningen för barn i åldern 6 - 12 år*, Stockholm, 1966.
—, *Teorier för folkundervisningen i matematik*, Malmö, 1986.
Mahoney, Michael S., "Changing canons of mathematical and physical intelligibility in the later 17th century", *Historia Mathematica*, vol 11, 1984, s. 417-423.

Marx, Karl, ”Der Fetischcharakter der Ware und sein Geheimnis” [1867] i Boris Goldenberg (ed.), *Karl Marx: Ausgewählte Schriften*, München, 1960, s. 469–473.

”Matematikdebatten”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1935, s. 68.

Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken: intresse, lärande, kompetens: betänkande*, SOU 2004:97, Stockholm, 2004.

”Matematiken och nya stadgan. En skrift av Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1934, s. 40.

Meehl, Paul, ”Theoretial risks and tabular asterisks: sir karl, sir ronald, and the slow progress of soft psychology” [1978] i Keith Gunderson C. Anthony Anderson (ed.), *Selected philosophical and methodological papers*, Minnesota, 1991, s. 1-41.

Mellin-Olsen, Stieg, *The politics of mathematics education*, Dordrecht, 1987.

Meyer, Ad., ”Granskning af läroböcker i Aritmetik verkstäld af komiterade, utsedde af Stockholms folkskollärareförening. Stockholm 1883. C. E. Fritze”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1884, s. 241-242.

Michalowica, Karen D. & Arthur C. Howard, ”Pedagogy in text: an analysis of mathematics texts from the nineteenth century” i Jeremy Kilpatrick & George M. A. Stanic (eds.), *A history of school mathematics*, Reston, VA, 2003, s. 77-113.

Mouwitz, Lars, *Hur kan lärare lära?: internationella erfarenheter med fokus på matematikutbildning*, Göteborg, 2001.

Murray, Mac, *Utbildningsexpansion, jämlikhet och avlänkning. Studier i utbildningspolitik och utbildningsplanering 1933-1985*, Göteborg, 1988.

Myndigheten för skolutveckling, *Baskunnande i matematik*, Stockholm, 2003.

Mönster, P. H. & J. Abrahamsson, *Om den indbyrdes Underviisnings väsen och värd*, Köpenhamn, 1821.

”Naturvetenskapen och skolorna”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1933, s. 66.

Newton, Isaac, *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*, Berkeley, Calif., 1999 [1687].

Niléhn, Lars, *Nyhumanism och medborgarfostran: åsikter om läroverkets målsättning 1820-1880*, Lund, 1975.

Niss, Mogens, *'Hvad er meningen med matematikundervisningen?' - Fire artikler. IMFUFA tekst nr 36*, Roskilde, 1980.

—, ”Nogle perspektiver for matematikundervisningen i de gymnasiala uddannelser i 1990” *"Hvad er meningen med matematikundervisningen?" - Fire artikler. IMFUFA tekst nr 36*, Roskilde, 1980.

—, ”Den matematikdidaktiska forskningens karaktär och status” i Barbro Grevholm (ed.), *Matematikdidaktik: ett nordiskt perspektiv*, Lund, 2001, s. 21-47.

—, ”Mål för matematikundervisningen” i Barbro Grevholm (ed.), *Matematikdidaktik: ett nordiskt perspektiv*, Lund, 2001, s. 51-90.

Nordin, Thor, *Växelundervisningens allmänna utveckling och dess utformning i Sverige till omkring 1830*, Stockholm, 1973.

Nordling, Gunnar, ”Angående Realskolans matematikkurser”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1950, s. 115.

Nordlund, K. P., *Räkneöfningsexempel för skolor: uppställda med afseende på heuristiska methodens användande*, Gefle, 1867.
—, *Räkne-öfningsexempel i algebra för skolor*, Gefle, 1872.
—, *En samling räkneuppgifter jemte fullständig redogörelse för deras lösning för seminarier, skolor och sjelfstudium bihang till samme utgifvares Räkneöfningsexempel*, Gefle, 1879.
—, *Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar*, Stockholm, 1890.
—, "Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen. Svar på Herr Rollins uppsats i Ped. Tidskrift 1891:10", *Pedagogisk Tidskrift*, 1892, s. 1-52.
—, "Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen. Svar på hr Rollins uppsats i fjärde häftet af pedagogisk tidskrift för år 1892.", *Pedagogisk Tidskrift*, 1892, s. 411-421, 453-465, 489-504.
Nyström, Carl Alfred, *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran, med talrika öfningsexempel och särskildt häftad facitbok*, Stockholm, 1853.
—, *Räknelära för fruntimmer: Omsl.: Med åtföljande särskildt häftad facitbok*, Stockholm, 1853.
—, *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran, med talrika öfningsexempel och särskildt häftad facitbok 2:a förb.o.betydl.tillökta uppl. (äfven upptagande den nya indelningen af sorter)*, Stockholm, 1855 [1853].
—, *Räknelära för folkskolor*, Stockholm, 1884.
—, "J. E. Johanssons 'Räknelära' och folkskolekommitterades 'utvecklande metod' m. m.", *Svensk Läraretidning*, 1888, s. 146-148.
—, "Vidräkning med kommitterade för granskning af folkskolans läroböcker", *Svensk Läraretidning*, 1888, s. 113-118.
Ohlsson, Anna, *Myt och manipulation. Radikal psykiatrikritik i svensk offentlig idédebatt 1968-1973*, Stockholm, 2008.
Oldberg, Anders, *Praktisk handbok i pedagogik och methodik för swenska folkunderwisningen*, Stockholm, 1846.
Otterström, Jakob, "Den 'nya' räknemetoden. Replik", *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare*, 1849, s. 331-336.
—, *Lärobok i aritmetik för skolans lägre stadium*, Stockholm, 1880.
Palmqvist, Fredric, *Inledning til algebra (I-II)*, Stockholm, 1748.
—, *Tal, om mathematiska vetenskapernas nytta i allmänna lefvernet*, Stockholm, 1754.
—, *Underwisning i Räkne-Konsten gifwen af Fredric Palmqvist, Ledamot af Kong.Wetenskaps-Adaemien*, Stockholm, 1763 [1750].
Pappas, John, "L'Esprit de finesse contre l'esprit de géometrie: en débat entre Diderot et Alembert", *Studies on Voltaire and the eighteenth century*, vol 86, 1972, s. 1229-1253.
Pearson, Karl, *The grammar of science*, Gloucester, Mass., 1957 [1892].
Pestalozzi, Johann Heinrich, *Lienhard och Gertrud: en bok för folket*, Göteborg, 1890 [1781/1787].
—, *Huru Gertrud undervisar sina barn: ett försök att gifva mödrarna ledning att sjelfva undervisa sina barn, i bref*, Göteborg, 1895 [1801].

—, *Enslingens aftonstund*, Lund, 1901 [1780].
Petrini, Henrik, ”Matematiken i skolan”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1905, s. 193-219.
Petterson, Lars, *Frihet, jämlikhet, egendom och Bentham*, Uppsala, 1992.
Pettersson, Astrid, *Matematik från början - ett studiematerial.* (Nedladdad våren 2008 från: www.prim.su.se.)
Phragmén, Lars, ”Om undervisningen i Mathematik med hufvudsakligt afseende på vigten av den s.k. hufvudräkningen”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1868, s. 284-288.
Piaget, Jean, *Psykologi och undervisning*, Stockholm, 1972 [1969].
Pickering, Andrew, *Science as practice and culture*, Chicago, 1992.
Pingel, V. & N. J. Nörlund, ”Den gamla och nya pedagogiken”, *Svensk Läraretidning*, 1886, s. 33-34.
Popkin, Richard Henry, *The history of scepticism: from Savonarola to Bayle*, Oxford, 2003.
Popper, Karl, *Conjectures and refutations: the growth of scientific knowledge*, London, 2002.
Porter, Theodore M., *Trust in numbers: the pursuit of objectivity in science and public life*, Princeton, 1995.
Poupeau, Franck, *Une sociologie d'état: l'école et ses experts en France*, Paris, 2003.
Prytz, Johan, ”'Moderna' idéer från förr och nu”, *Nämnaren*, nr 1, 2003.
—, *Speaking of geometry: a study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates*, Uppsala, 2007.
Qvarsebo, Jonas & Linköpings universitet. Tema barn, *Skolbarnets fostran: enhetsskolan, agan och politiken om barnet 1946-1962*, Linköping, 2006.
Rancière, Jacques, *The ignorant schoolmaster: five lessons in intellectual emancipation*, Stanford, Calif., 1991.
”Rektors-mötet 1868”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1868. (Införd som ”bihang” om 24 sidor till den inbundna utgåvan av tidskriften.)
Richards, Joan L., *Mathematical visions: the pursuit of geometry in victorian England*, Boston, 1988.
—, ”God, truth, and mathematics in nineteenth century England” i M. J. Nye, J. Richards & R Stuewer (eds.), *The invention of physical science: intersections of mathematics, theology and natural philosophy since the seventeenth century*, Dodrecht, 1992, s. 51-78.
Richardsson, Gunnar, *Kulturkamp och klasskamp. Ideologiska och sociala motsättningar i svensk skol- och kulturpolitik under 1880-talet*, Göteborg, 1963.
Robinson, ”Mera om 'Geometrin såsom läroämne i flickskolan'”, *Verdandi*, 1893, s. 217-221.
”Roligt + Lärande = Sant”, *Göteborgsposten*, 16 oktober 2008.
Rollin, Birger, ”Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1891, s. 403-412.
Rorty, Richard, *Philosophy and the mirror of nature*, Princeton, N.J., 1980.
Rosengren, Mats, *Doxologi: en essä om kunskap*, Åstorp, 2002.

Rossander, Jenny, *Nya elementarskolan för flickor vid afslutningen af höstterminen 1871; Förberedande lärokursen för qvinliga elever; afhandling: om matematik och dess studium vid våra flickskolor*, Stockholm, 1871.
Rousseau, Jean Jacques, *Emil eller om uppfostran*, Uppsala, 1912 [1762].
Rudenschöld, Torsten, *Svenska folkskolans praktiska ordnande*, Götheborg, 1856.
Rydman, A., "Provräkningsblad, Emil Dalin", *Folkskollärarnas tidning*, 1927, s. 746.
Ryrberg, Klas, "Herr Engbergs osakkunnighet", *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1934, s. 301.
Rönnberg, Irene & Lennart Rönnberg, *Minoritetselever och matematikutbildning: en litteraturöversikt*, Stockholm, 2001.
Rönström, Anna, "Geometrin såsom läroämne i flickskolan. Föredrag vid femte allmänna flickskolemötet i Lund", *Verdandi*, 1893, s. 145-159.
—, "Om en praktisk anordning af räkneundervisningen", *Verdandi*, 1894, s. 177-191.
Sammanfattning av utlåtanden och yttranden i anledning av Skolkommissionens den 28 april 1922 avgivna betänkande, SOU 1923:66, Stockholm, 1923.
Sandberg, Fredrik, *Småskolan. En handledning för dem, hvilka sysselsätta sig med den första barna-undervisningen i skolan.*, Stockholm, 1869.
—, *Småskolans metodik i kort sammandrag för småskolelärarinne-seminarier*, Stockholm, 1869.
—, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, Stockholm, 1870.
Sandgren, Lennart, "Undervisningen i matematik moderniseras", *PM. Pedagogiska meddelanden från skolöverstyrelsen*, nr 7, 1966, s. 2-4.
Sandin, Bengt, *Hemmet, gatan, fabriken eller skolan: folkundervisning och barnuppfostran i svenska städer 1600-1850*, Lund, 1986.
Sarfatti Larson, Magali, "In the matter of experts and professionals, or How impossible it is to leave nothing unsaid" i Rolf Torstendahl & Michael Burrage (eds.), *The formation of professions: knowledge, state and strategy*, London, 1990.
Schubring, Gert, "Introduction. History of teaching and learning mathematics", *Pedagogica Historica*, vol 42, nr 4&5, 2006, s. 511-514.
—, "Researching into the history of teaching and learning mathematics: the state of the art", *Pedagogica Historica*, vol 42, nr 4&5, 2006, s. 665-677.
Schuster, John A., "Cartesian method as mythic speech: a diachronic and structural analysis" i John A. Schuster & Richard R. Yeo (eds.), *The politis and rhetoric of scientific method*, Dodrecht, 1986, s. 33-96.
Segerstedt, Albrekt, "Om lösning af s.k. 'regula de tri' frågor i folkskolan", *Tidning för Folkskolan*, 1871, s. 33-38.
—, *Geometrien i folkskolan och för nybegynnare. Metodiska anvisningar af Albrekt Segerstedt, seminarii-adjunkt*, Stockholm, 1883.
Selander, Staffan, "Från geometri till aritmetik: 1700-talets skolmatematik" i Madeleine Löwing, Bengt Johansson, Göran Emanuelsson & Ronnie Ryding (eds.), *Vänbok till Wiggo Kilborn*, Göteborg, 2000.
Shapin, Steven, "Robert Boyle and mathematics: reality, representation, and experimental practice", *Science in Context*, vol 2, 1988, s. 23-58.

—, *A social history of truth: civility and science in seventeenth-century England*, Chicago, 1994.
—, *Den vetenskapliga revolutionen*, Stockholm, 2000.
Shapin, Steven & Simon Schaffer, *Leviathan and the air-pump: Hobbes, Boyle, and the experimental life: including a translation of Thomas Hobbes, Dialogus physicus de natura aeris by Simon Schaffer*, Princeton, N.J., 1985.
Shea, William R., ”The unfinished revolution: Johann Bernoulli (1667-1748) and the debate between the cartesians and the newtonians” i William R. Shea (ed.), *Revolutions in science: their meaning and relevance*, Canton, MA, 1988, s. 70-92.
Sigrell, Anders, *Att övertyga mellan raderna: en retorisk studie om underförståddheter i modern politisk argumentation*, Åstorp, 2001.
Siljeström, Per Adam, *Arbetarens fritimmar. Skrifter i nyttiga ämnen till läsning för handtwerks- och fabriksarbetare*, Calmar, 1844.
—, ”Geometri för nybegynnare, af P. N. Ekman, Lektor i Matematiken vid Wexjö Gymnasium”, *Tidskrift för lärare och uppfostrare*, 1846, s. 100.
—, *Lärobok i räknekonsten til folkskolornas tjänst*, Stockholm, 1866.
—, *Lärobok i geometrien, till folkskolornas tjenst*, Stockholm, 1867.
—, *Samling af räkne-exempel till folkskolornas tjenst: första häftet innehållande omkr. 1100 exempel i de fyra räknesätten med hela tal: med svar*, Stockholm, 1870.
—, *Lärobok i aritmetik för små nybegynnare*, Stockholm, 1874.
Sismondo, Sergio, *Science and technology studies*, Malden, Mass., 2004.
Sjöberg, Mats, *Att säkra framtidens skördar. Barndom, skola och arbete i agrar miljö: Bolstad pastorat 1860-1930*, Linköping, 1996.
Sjöstedt, C. E., ”'Matematikherraväldet'”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1933, s. 203.
—, ”Studentskrivningarna i matematik”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1940, s. 20.
—, ”Studentskrivningarna i matematik”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1942, s. 20
—, ”Examensskrivningarnas svårighetsgrad”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1945, s. 132-134.
—, ”Studentuppgifterna i matematik”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1949, s. 152-153.
—, ”Den 'orimligt svåra' matematikskrivningen”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1950, s. 173-174.
—, ”Det nya gymnasiets kursplaner i matematik”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1953, s. 399-400.
Sjöstrand, Wilhelm, *Pedagogikens historia*, band III:2, Lund, 1966.
”Skolkommissionens verk bedömt av pressen”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1922, s. 145-146.
Skolverket, *Kursplan i matematik för grundskolan.* (Nedladdad från skolverkets hemsida våren 2008: www.skolverket.se.)
—, *Kursplan i matematik för gymnasieskolan.* (Nedladdad från skolverkets hemsida våren 2008: www.skolverket.se.)
—, *Läroplan för förskolan, Lpfö 98.* (Nedladdad från skolverkets hemsida våren 2008: www.skolverket.se.)

—, *Lusten att lära - med fokus på matematik: nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002*, Stockholm, 2003.

—, "TIMMS 2003. Svenska elevers kunskaper i matematik och naturvetenskap i skolår 8 i ett nationellt och internationellt perspektiv", 2003. (Nedladdad från skolverkets hemsida våren 2008: www.skolverket.se.)

—, *PISA 2003: svenska femtonåringars kunskaper och attityder i ett internationellt perspektiv*, Stockholm, 2004.

Skolöverstyrelsen, *Basfärdigheter i matematik*, Stockholm, 1973.

Skovsmose, Ole, *Towards a philosophy of critical mathematics education*, Dordrecht, 1994.

—, *Travelling through education: uncertainty, mathematics, responsibility*, Rotterdam, 2005.

Sloterdijk, Peter, *Kritik av det cyniska förnuftet*, Stockholm, 1988.

St-, "En av dagens frågor", *Tidskrift för Hemmet*, 1863, s. 257-274.

Sterner, Görel & Ingvar Lundberg, *Läs- och skrivsvårigheter och lärande i matematik*, Göteborg, 2002.

Strömer, Mårten, *De Sex Första Böckerna Af Euklidis Elementa, eller grundeliga inledning til geometrien*, Uppsala, 1748 [1744].

—, *De Sex Första Jämte Ellofte och Tolfte Böckerna Af Euclidis Elementa, eller grundeliga inledning til geometrien, til Svenska ungdomens tjänst utgifne af Mårten Strömer, För detta Astronomie professor i Uppsala, och Ledamot af Kongl. Vetensk. Acad. i Stockholm och Societ. R. Lit. et Scient. i Uppsala.*, Stockholm, 1800 [1744].

"Stärkt ställning i folkskolan åt modersmål och räkning", *Småskolan*, 1931.

Swetz, Frank J., *Capitalism and arithmetic*, La Salle, Illinois, 1987.

Säljö, Roger, "Begreppsbildning som pedagogisk drog", *Utbildning och demokrati*, vol 4, 1995, s. 5-22.

Taylor, Charles, *Hegel*, Cambridge, 1975.

Thorndike, Edward L., *The psychology of arithmetic*, New York, 1922.

Toulmin, Stephen, *Kosmopolis: hur det humanistiska arvet förfuskades*, Stockholm, 1995.

Ullman, Annika, *Stiftarinnegenerationen: Sofi Almquist, Anna Sandström, Anna Ahlström*, Stockholm, 2004.

Unenge, Jan, "Hundra års skolmatematik i Pedagogisk Tidskrift", *Pedagogisk Tidskrift*, 1964, s. 373-382.

—, *Från räkning till matematisk klokskap*, Jönköping, 1991.

—, *Skolmatematiken i går, i dag och i morgon: -med mina ögon sett*, Stockholm, 1999.

Utbildningsdepartementet, *Skollag (1985:1100)*. (Nedladdad våren 2008 från: lagen.nu.)

—, *Matematik i skolan. Översyn av undervisningen i matematik inom skolväsendet.* Ds U 1985:5, Stockholm, 1986.

Wahlgren, Agne, "Om kurserna i matematik på latingymnasiet", *Pedagogisk Tidskrift*, 1905, s. 65-76.

Wahlström, Baltzar, "Realgymnasiets matematikkurser", *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1940, s. 42.

—, ”Examensskrivningarnas svårighetsgrad”, *Tidning för Sveriges Läroverk*, 1945, s. 150–151.
Walkerdine, Valerie, *The mastery of reason: cognitive development and the production of rationality*, London, 1988.
Weber, Max, *Vetenskap och politik*, Göteborg, 1977 [1919].
Velander, J. P., *Velanders Räknebok för folkskolan*, Stockholm, 1884.
—, ”Ämnet räkning i folkskolan”, *Svensk Läraretidning*, 1884, s. 381-382, 389-390, 401-403, 417-419, 430-431, 449-450.
—, ”Hela tal i folkskolan”, *Svensk Läraretidning*, 1885, s. 49-50, 61-62, 77-78, 85-86.
Wester-Wåhlström, Vendela, ”Om räkneundervisning. Några funderingar med anledning av en utkommen räknelära för nybörjare”, *Svensk Läraretidning*, 1920, s. 417-419.
Westrin, Th. (ed.), *Nordisk familjebok*, Stockholm, 1911.
Wicksell, Sven & Tor Jerneman (eds.), *Betänkande med undersökningar och förslag i anledning av tillströmningen till de intellektuella yrkena*, SOU 1935:52, Stockholm, 1935.
Wiemer, Anders, *Allmän proportionslära*, Stockholm, 1850.
—, ”Elementarkurs i Räknekonsten, jemte öfningar i Hufvudräkning. Af. Axel Theodor Bergius. Särskilt häftade svar medfölja. Sthlm, 1850”, *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare*, 1850, s. 227-231.
Wigforss, Frits, *Den grundläggande matematikundervisningen: översikt av folkskolans kurs i räkning och geometri ur metodisk synpunkt*, Stockholm, 1925.
Wikipedia contributors, ”Ångest”, 2008. (Nedladdad från svenska wikipedia våren 2008: sv.wikipedia.org.)
Wilson, Guy Mitchell, *What arithmetic shall we teach?*, Boston, 1926.
—, *Teaching the new arithmetic*, New York, 1951 [1939].
Wittgenstein, Ludwig, *Remarks on the foundations of mathematics: Bemerkungen über die Gründlagen der Mathematik*, Oxford, 1956.
Wolff, Christian von, *Auszug aus den Anfangs-Gründen aller Mathematischen Wissenschafften: zu bequemerem gebrauche der Anfänger auf Begehren verfertiget*, Franckfurt und Leipzig, 1743 [1713].
Žižek, Slavoj, ”Da capo senza fine” i Judith Butler, Ernesto Laclau & Slavoj Žižek (eds.), *Contingency, hegemony, universality*, New York, 1999, s. 213-262.
—, *The ticklish subject: the absent centre of political ontology*, New York, 1999.
—, *Ideologins sublima objekt*, Göteborg, 2001.
Zweigbergk, Per Anton von, *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel: med facit-tabeller*, Stockholm, 1839.
—, *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel*, Stockholm, 1843 [1839].
Åstrand, Sigurd (ed.), *Berättelser om de Allmänna Svenska Läraremötena 1852, 1854 och 1863*, Stockholm, 1971.
Öberg, Tore, ”Gymnasiets matematikkurs”, *Elementa*, 1970, s. 257-263.
Öije, Einar, ”Realitet och skolmässighet i matematiska problem”, *Pedagogisk Tidskrift*, 1918, s. 217-230.

ACTA UNIVERSITATIS UPSALIENSIS
Studier i utbildnings- och kultursociologi

Editores: Donald Broady, Mikael Börjesson, Peter Waara

1. Palme, Mikael 2008, *Det kulturella kapitalet. Studier av symboliska tillgångar i det svenska utbildningssystemet 1988–2008.*
2. Lundin, Sverker 2008, *Skolans matematik. En kritisk analys av den svenska skolmatematikens förhistoria, uppkomst och utveckling.*