This document is an historical remnant. It belongs to the collection Skeptron Web Archive (included in Donald Broady's archive) that mirrors parts of the public Skeptron web site as it appeared on 31 December 2019, containing material from the research group Sociology of Education and Culture (SEC) and the research programme Digital Literature (DL). The contents and file names are unchanged while character and layout encoding of older pages has been updated for technical reasons. Most links are dead. A number of documents of negligible historical interest as well as the collaborators' personal pages are omitted.

The site's internet address was since Summer 1993 www.nada.kth.se/~broady/
and since 2006 www.skeptron.uu.se/broady/sec/.

Detta manus är tills vidare tillgängligt från
www.skeptron.uu.se/broady/sec/eve-08.htm

Skolans matematik

av Sverker Lundin

avhandlingsmanus sammanställt inför seminarium, EDU-institutionen, Uppsala universitet, den 18 juni 2008 kl 13.15-15.00 i rum 1219, Seminariegatan 1.

Göteborg den 10 juni 2008

Till seminariedeltagarna

Texten som följer är ett manus till min avhandling med den preliminära titeln "Skolans matematik". Den handlar om den svenska skolmatematikens historia, och syftar till att belysa de problem som idag förknippas med grundläggande undervisning i matematik. Jag vill här säga något om textens status, för att sedan nämna några frågor angående texten som jag särskilt angelägen att få besvarade.

Avhandlingsmanuset består av 11 kapitel och av dessa är kapitel 2-8 mer färdiga än de övriga. Som helhet skall texten betraktas som work in progress. Jag skall disputera mot slutet av hösten 2008 och räknar med att behöva genomföra en hel del ändringar fram tills dess. Tyvärr finns det en mängd formella fel och inkonsekvenser i texten som jag inte hunnit göra något åt, till exempel rörande fotnoter och referenser.

I avhandlingen argumenterar jag för en tes som jag tror vissa uppfattar som ganska svårsmält. Därför vill jag gärna av seminariet få hjälp att se vilka aspekter av min tes som (eventuellt) framstår som märkliga, och vilka delar av min argumentation som inte får tillräckligt empiriskt stöd. Avhandlingen består till stor del av en redogörelse för skolmatematikens historia, och jag vill också gärna ha hjälp att knyta denna till annan historisk, idéhistorisk, matematikhistorisk och utbildningshistorisk forskning. Tveka absolut inte att säga till om något verkar fel eller konstigt.

Med vänlig hälsning

Sverker Lundin, sverker.lundin@gmail.com

Innehåll

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

1. Inledning

I den här avhandlingen sätter jag in svensk grundläggande matematikutbildning i ett historiskt sammanhang. Med utgångspunkt läroböcker, tidsskriftsartiklar, utredningar, kursplaner och andra typer av material, från 1700-talet fram till mitten av 1900-talet, redogör jag för den historiska process genom vilken det sätt att undervisa i matematik som är gängse idag, tagit form. En central roll i redogörelsen spelar, för det första, relationen mellan undervisningens praktiska villkor och dess därpå följande utformning; för det andra de föreställningar om matematiken vilka utgör den bakgrund mot vilken undervisningen motiveras och värderas; och för det tredje undervisningens funktion som en del av samhället.

I avhandlingen spelar distinktionen mellan å ena sidan *skolmatematiken* – vilken här skall förstås som en social institution vars syfte är att förmedla kunskaper i matematik till (först och främst) barn och ungdomar – och å andra sidan den *matematik* som den skolmatematiska undervisningen kretsar kring och syftar till att förmedla. Min tes är att dessa två "fenomen", skolmatematiken och matematiken, är oupplösligt förenade med varandra. Med detta som utgångspunkt kommer jag i den här avhandlingen att knyta an till två olika forskningsområden – och i en vidare bemärkelse två olika problemkomplex – som mig veterligen inte tidigare ställts i förbindelse med varandra.

Jag tänker här för det första på de problem som förknippas med grundläggande matematikundervisning, och den forskning som kretsar kring dessa problem, det vill säga framför allt forskning inom matematikdidaktik. Det förtjänar att nämnas att det var mitt möte med det matematikdidaktiska forskningsfältet som fick mig att ställa de frågor som slutligen ledde fram till den här avhandlingen. Mer specifikt var det de stora – för att inte säga tämligen fantastiska – anspråk, vilka i rapporter som *Hög tid för Matematik*[1] (2001) och matematikdelegationens betänkande *Att lyfta matematiken* (2004) reses angående matematikens och den grundläggande matematikutbildningens potential att fungera som en samhällsförbättrande kraft, som fick mig att reagera. Här är två exempel. Följande kan man läsa i rapporten *Hög tid för Matematik*, publicerad 2001 av det av regeringen inrättade resurscentrat Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM):

> Företrädare för utbildning, näringsliv och samhälle ger kraftfullt och enstämmigt uttryck för att matematikkunnande är viktigt och att goda, meningsfulla kunskaper är en förutsättning för självförtroende, demokrati, tillväxt och livslångt lärande. Samlade insatser för en långsiktig, hållbar utveckling av matematikundervisningen i skolan både krävs och välkomnas i alla samhällsgrupper och på alla utbildningsnivåer.[2]

Nedanstående citat är hämtat från matematikdelegationens betänkande *Att lyfta matematiken*:

> Matematik är ett mångfasetterat ämne; ett nödvändigt och nyttigt verktyg för utveckling inom naturvetenskap, teknik och ekonomi och ett oundgängligt redskap för ett aktivt medborgarskap.[3]

Citaten är i och för sig hämtade från statliga utredningar, snarare än forskningsrapporter producerade inom det matematikdidaktiska forskningsfältet. Gränsen mellan forskning och utredningsverksamhet är dock sällan skarp inom detta område, och det råder ingen tvekan om att även det matematikdidaktiska forskningsfältet vilar på en övertygelse om matematikens centralitet och potential. För övrigt kan sägas att detta även gäller den kritik mot matematikens behandling i skolan som kommer till uttryck inom detta forskningsfält.[4] Lite tillspetsar kan man säga att den matematikdidaktiska forskningen syftar till att låta matematikens potential komma eleverna till del.

---

[1] Bengt; m. fl. Johansson, *Hög tid för matematik, NCM-rapport, 2001:1* (Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs univ., 2001).
[2] Ibid., s. 25.
[3] Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken: intresse, lärande, kompetens: betänkande, Statens offentliga utredningar, 2004:97* (Stockholm: Fritzes offentliga publikationer, 2004), s. 102.
[4] Jag tänker här framför allt på arbeten av forskare som Ole Skovsmose, Stieg Mellin-Olsen och Paul Ernest. Vad de vänder sig mot är matematikens behandling i skolan. Lika mycket som andra forskare inom matematikdidaktik tar de matematikens centrali-

Detta faktum leder vidare till det andra problemkomplex som jag knyter an till i avhandlingen, vilket rör matematikens och den matematiska vetenskapens förhållande till framväxten av "det moderna samhället" i ett längre tidsperspektiv. Fram tills relativt nyligen betraktades matematikens och naturvetenskapernas utveckling som en process vilken fortskridit relativt oberoende av – eller möjligen i viss mån "trots" – mer allmänna samhälleliga omständigheter och förändringsprocesser. Den moderna vetenskapens ursprung knöts till första halvan av 1600-talet, och mer specifikt till sådana texter som Descartes *Avhandling om metoden*.[1] Den vetenskapliga metoden ansågs utgöra vetenskapens kännemärke, och man såg dess utveckling under 1600-talet som en "revolution" genom vilken mänskligheten trädde ut ur medeltidens religiösa mörker in i modernitetens ljus.[2] Genom en rad vetenskapshistoriska och vetenskapsteoretiska forskningsinsatser har emellertid denna bild sedan 1960-talet förändrats på ett genomgripande sätt.[3] Man betonar nu att föreställningar om matematiken nästan alltid under historiens lopp utgjort en integrerad del av större, ofta religiösa, tankesystem. Föreställningar om matematikens värde och egenskaper måste därför, menar man, tolkas mot bakgrund av den "politiska" funktion de fyllde som delar av samhället. En viktig aspekt av denna sida av den matematiska vetenskapens utveckling från slutet av 1500-talet fram till våra dagar, är att den allt mer kommit att ersätta religionen som sammanlänkande "kitt" i de västerländska samhällena. Vid flera tidpunkter i historien är det tydligt hur matematiken och den matematiserade naturvetenskapen kommit att representera en enande *visshet* som man hoppas skall göra slut på religiösa stridigheter. Med utgångspunkt från denna historieskrivning måste bilden av den matematiserade naturvetenskapen som något forskare ägnar sig åt, kompletteras av insikten om att denna matematiserade naturvetenskap också är något man i dagens västerländska samhällen – som ett resultat av en långsam historiskt process – kommit att *tro på*.

Det övergripande syftet med den här avhandlingen är att ställa dessa två problemområden i förbindelse med varandra. Med ett undantag, nämligen Ken Alders bok *Engineering the Revolution*, har nämligen den vetenskapshistoriska forskning inte i någon större utsträckning beaktat den roll grundläggande utbildning i matematik spelat för att sprida – och i viss mån givetvis också förändra – de förställningar om matematiken och vetenskapen som man sett breda ut sig i europa från 1700-talet och framåt. På ett motsvarande sätt tycks det matematikdidaktiska forskningsfältet och mer allmänt den politiska diskussionen rörande grundläggande matematikutbildningens problem, inte ha tagit intryck av nyare vetenskapshistorisk och vetenskapsteoretisk forskning rörande matematikens band till sin "sociala historia".[4] Detta leder fram till min frågeställning.

Frågeställning

Avhandlingen kretsar kring tre grupper av frågor. I den första gruppen av frågor står matematiken i centrum. En första utgångspunkt är de föreställningar om matematiken som kommer till uttryck inom matematikdidaktisk forskning, i offentliga utredningar och rapporter och i den offentliga diskussionen. I dessa sammanhang tas matematiken i allmänet för given som förknippad med en rik uppsättning positiva egen-

---

tet för given. Se Stieg Mellin-Olsen, *The politics of mathematics education, Mathematics education library,* (Dordrecht: Reidel, 1987). Ole Skovsmose, *Towards a philosophy of critical mathematics education, Mathematics education library, 15* (Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994); Ole Skovsmose, *Travelling through education: uncertainty, mathematics, responsibility* (Rotterdam: Sense Publishers, 2005). Paul Ernest, *The philosophy of mathematics education*, *Studies in mathematics education series, 1* (London: Falmer, 1991).

[1] René Descartes, *Discourse de la méthode* (Paris: Flammarion, [1637] 2000). Angående denna syn på vetenskapens historia, se tex. Stephen Toulmin, Lars Göran Larsson, och Bo Holmqvist, *Kosmopolis: hur det humanistiska arvet förfuskades* (Stockholm: Ordfront, 1995), 24.

[2] En redogörelse för föreställningen om en vetenskaplig revolution, tillsammans med en mer nyanserad bild av det historiska förloppet finns i Steven Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen* (Stockholm: Brutus Östling, 2000).

[3] Några viktiga namn i sammanhanget är Peter Dear, som skrivit om utvecklingen kring sekelskiftet 1600, Steven Shapin och Simon Shaffer som skrivit om slutet av 1600-talet, Ken Alder som skrivit om 1700-talet och Theodor Porter om 1800-talet och början av 1900-talet. Peter Dear, *Mersenne and the learning of the schools, Cornell history of science series,* (Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1988); Peter Robert Dear, *Discipline & experience: the mathematical way in the scientific revolution, Science and its conceptual foundations*, (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1995). Steven Shapin, *The scientific revolution* (Chicago, Ill.: Univ. of Chicago Press, 1996); Steven Shapin, Simon Schaffer, och Thomas Hobbes, *Leviathan and the air-pump: Hobbes, Boyle, and the experimental life: including a translation of Thomas Hobbes, Dialogus physicus de natura aeris by Simon Schaffer* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1985). Ken Alder, *Engineering the revolution: arms and enlightenment in France 1763-1815* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1997). Theodore M. Porter, *The rise of statistical thinking, 1820-1900* (Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1986); Theodore M. Porter, *Trust in numbers: the pursuit of objectivity in science and public life* (Princeton: Princeton Univ. Press, 1995).

[4] Här kan för tydlighets skulle nämnas att synen på matematikens som "socialt konstruerad", så som den till exempel kommer till uttryck i Paul Ernests *The philosophy of Mathematics education* inte har något med detta att göra.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

skaper, liksom de jag exemplifierade i citaten ovan. En annan viktig utgångspunkt är den tämligen djupt rotade *tro* på matematiken som många bär på, för övrigt ofta utan att i samman mån tillmäta sitt eget matematiska kunnande något särskilt högt värde.[1] En första fråga är vad som ligger bakom dessa föreställningar och denna tro. Är den "välgrundad" – i samma bemärkelse som till exempel tron på att jorden är rund och en sten faller om man släpper den? Om föreställningarna inte så enkelt kan förklaras, vad har de för ursprung? Kan de förklaras historiskt? Här syftar jag mer specifikt på frågan: kan dessa föreställningar knytas till den vetenskapshistoriska forskningens berättelse om de tankesystem som matematiken var den del av på 1600- och 1700- och 1800-talet? En fråga som leder vidare till min nästa frågegrupp är: kan föreställningar och tro på matematiken förklaras sociologiskt?

I den andra gruppen av frågor står skolan i centrum. Grundläggande matematikundervisning förknippas med rader av problem. Man talar om att elever upplever *ångest* inför matematiken.[2] Undersökningar visar att de matematikkunskaper eleverna om allt vill sig väl får sig till del i skolan kanske inte är fullt så användbara – till exempel i vardagslivet – som det ofta påstås, och att matematikens plats i kurs- och läroplaner kanske snarare är ett resultat av tradition än rationellt övervägande.[3] Frågan som jag ställer är: Varför undervisar man på det sätt man gör? Det är uppenbart att undervisningsmetoderna på ett plan motiveras med hänvisning till matematiken, hur den är, och de ramar detta sätter för hur den kan och bör förmedlas. Men om bilden av matematiken måste ses som en del av en komplex social historisk tankeväv, vad säger detta om föreställningarna om hur man kan och bör undervisa? Hur kan föreställningar om sättet att undervisa på ett historiskt plan relateras till motsvarande föreställningar om matematiken?

Till denna andra grupp av frågor hör en idé som strax kommer att få tydligare konturer i teoriavsnittet, nämligen att skolan, i egenskap av social institution där ungdomar – idag *alla* ungdomar – ägnar stor möda åt att lära sig matematik, så att säga "producerar" föreställningar om matematiken. Frågan blir därmed, i vilken mån föreställningar om matematiken kan förstås med utgångspunkt från hur matematiken, både på ett praktiskt och diskursivt plan, behandlas i skolan. I och med detta kan de två första grupperna knytas samman i frågan rörande *samspelet* mellan de föreställningar om matematik mot vars bakgrund som skolans praktiska verklighet åtminstone i viss mån motiveras, och den sociala praktiska verklighet genom vilken dessa föreställningar åtminstone i viss mån "produceras".

I den tredje gruppen av frågor står samhället i fokus. Utgångspunkten för dessa frågor är att det faktiskt finns ett samspel mellan matematiken och skolan. En första fråga blir därmed: vilken betydelse har detta samspel för det så att säga "omgivande" samhället? Vilken roll spelar det? Kan det sägas fylla någon "funktion"? En motsvarande fråga rör vilken betydelse denna funktion i så fall har, och har haft, för både skolan och matematiken. Kan sättet att undervisa i matematik förklaras mot bakgrund av att undervisningen fyller sociala behov? Kan föreställningar om matematiken förklaras på detta sätt?

Detta är frågor som avhandlingen kretsar kring och syftar till att besvara. Avhandlingen är i ganska hög utsträckning argumenterande. Låt mig därför klargöra vad det är jag argumenterar för.

Tes och syfte

Avhandlingens syfte är att med hjälp av en redogörelse för den svenska skolmatematikens genes problematisera de grundläggande föreställningar rörande matematiken som idag i stor utsträckning sätter ramarna för diskussionen rörande grundläggande matematikundervisning. Mer specifikt menar jag att matematiken i diskussionen framstår som objektivt given med en rik uppsättning egenskaper som definierar den matematiska utbildningens mål och utformning, men att dessa egenskaper måste förstås som ett resultat av hur matematiken behandlas i skolan. Denna behandling är i sin tur ett resultat av en komplex historisk process, där lager på lager av föreställningar knutna till matematiken samspelat med sociala "behov" som undervisning i matematik kommit att fylla i samhället.

Matematiken framstår idag, menar jag, som fylld av en inneboende potential att kunna bidra till att realisera samhällets högre mål, som till exempel högre tillväxt och förbättrad demokrati. Den fungerar därför

[1] Tex. Jan Unenge, *Från räkning till matematisk klokskap.* (Jönköping.: Institutionen för undervisning, kultur och information, 1991), 1.

[2] Ångest löper som en röd tråd genom den skolmatematiska diskussionen. Se till exempel Lars Gustafsson och Lars Mouwitz, *Vuxna och matematik: ett livsviktigt ämne, NCM-rapport, 2002:3* (Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs univ., 2002), sidorna 3, 5, 10, 25, 31, 55, 61, 75, 80, 81, 93 och 111. Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken: intresse, lärande, kompetens: betänkande*, s. 102. Lars Mouwitz, *Hur kan lärare lära? internationella erfarenheter med fokus på matematikutbildning, NCM-rapport, 2001:2* (Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs universitet, 2001), s. 46.

[3] Gustafsson och Mouwitz, s. 62.

som ett sätt att konkretisera samhället ambition att nå dessa mål. Den diffusa frågan: Hur skall vi förbättra tillväxten? får i matematiken ett konkret svar: Genom att förbättra elevernas matematikkunnande! Min tes är att det emellertid inte finns någon sådan potential i matematiken, och föreställningarna och tron på matematiken snarast tjänar till att flytta den politiska diskussionens fokus från grundläggande samhälleliga problem, till politiskt "ofarliga" frågor rörande matematikkunskaper.

Avhandlingen säger ingenting om de komplexa sambanden mellan till exempel forskning i matematik, naturvetenskap och teknik. Min poäng är att matematikens roll i skola och i samhället har mycket lite med den matematiska vetenskapen att göra – något som kommer att framgå av den historiska redogörelsen. Tesen är att skolan hänvisar till "matematiken", men att denna hänvisning är i grunden "tom", så till vida att den inte kan knytas till något specifikt socialt eller institutionellt sammanhang eller något specifikt innhåll relaterat till den funktion hänvisningen fyller på ett retoriskt diskursivt plan. När man i skolan talar om "matematik" syftar man inte på det matematiker, eller för den delen ingenjörer, ägnar sig åt.

På ett praktiskt plan pekar den historiska redogörelsen mot att grundläggande undervisning i matematik fyller tre sammanlänkande sociala funktioner. Den första funktionen är att hålla elever sysselsatta, en funktion som kan knytas till den tidpunkt då det svenska samhället "industrialiserades" kring sekelskiftet 1900. Den andra funktionen är att, genom prestationsmätningar, bidra till utbildningssystemets fördelning av elever mellan olika sociala positioner – en funktion den fick under 1900-talets första hälft. Den tredje funktionen är att hos eleverna inplantera en tro på matematiken värde vilken får det "sysselsättande" arbetet i matematik att framstå som nödvändig övning, och utbildningssystemets fördelning av individer som förankrade i relevanta skillnader i kunnande i matematik.

1.1. Teori

I det här avsnittet skall jag visa hur jag förstår sambandet mellan skola, matematik och samhälle. Snarare än att presentera ett sammanhängande teoretiskt system, fokuserar jag på tre tankefigurr, vilka spelar en viktig roll för mitt sätt att tänka. Dessa tankefiguerar har jag hämtat från den slovenske filosofen Slavoj Zizek och den tanketradition han tillhör.[1]

Symbolisk och imaginär identifikation

Den första idé jag skall ta upp visar hur jag i den här avhandlingen förstår sambandet mellan skolan och matematiken. Zizek gör en distinktion mellan å ena sidan imaginär, och å andra sidan symbolisk identifikation. I *Ideologins sublima objekt* förklarar han denna distinktion genom att säga att imaginär identifikation är identifikation med älskvärda "bilder av oss själva", medan symbolisk identifikation är identifikation med "den position varifrån vi observerar eller betraktar oss i syfte att kunna framstå som älskvärda".[2]

Poängen är här att vi på ett plan vill något specifikt – Zizek exemplifierar med en tonåring som vill bli (som) en popstjärna – medan den mer grundläggande frågan som är vad det är som får oss att vilja just detta. Detta är frågan om vår symboliska identifikation. Man kan tala om detta i termer av en "blick" som vi identifierar oss med – en blick som vi (omedvetet) upplever oss betraktade av och vars värdesystem vi utgår från.

Vår symboliska identifikation är resultatet av en praktisk inskolning i ett sätt att tänka, tala och vara. Den hör till språket och praktiken. Våra imaginära identifikationer är istället "bilder" som vi uppfattar som meningsfulla och eftersträvansvärda.

Med utgångspunkt från denna distinktion kan man säga att jag i den här avhandlingen betraktar skolan som ett föremål för symbolisk identifikation. Detta innebär att jag ser den som en institutionaliserad social praktik, som genom att reglera människors tillvaro formar deras sätt att uppfatta sin omvärld. Matematiken kommer här att tvärtom behandlas i egenskap av något imaginärt, det vill säga som en bild, vars egenskaper i stor utsträckning är en effekt av skolan i egenskap av socialt sammanhang. Man kan därmed

[1] De av hans många böcker som varit viktigast för mig är Slavoj Zizek, *The sublime object of ideology, Phronesis (London),* (London: Verso, 1989); Slavoj Zizek, *The ticklish subject: the absent centre of political ontology* (New York, N.Y.: Verso, 1999). samt hans inlägg i diskussionsboken Judith Butler, Slavoj Zizek, och Ernesto Laclau, *Contingency, hegemony, universality: contemporary dialogues on the left, Phronesis (London),* (London: Verso, 2000). Zizek utgår från Lacan. Relationen mellan Lacans teori och dess användning som redskap för att förstå samhället klargörs i Yannis Stavrakakis, *Lacan and the political, Thinking the political,* (London: Routledge, 1999).

[2] Slavoj Zizek, *Ideologins sublima objekt* (Göteborg: Glänta, 2001), 122.

säga att det är "skolans matematik" som står i avhandlingens fokus, vilken jag här mer allmänt kommer att tala om i termer av "skolmatematik".

För att tydliggöra hur denna teoretiska ingång utgör en avgränsning, kan sägas att det också vore möjligt att betrakta matematiken med utgångspunkt från andra sociala sammanhang, till exempel den vetenskapliga matematikens. En sådan undersökning skulle ha varit med renodlat vetenskapssociologisk eller vetenskapshistorisk, och den skulle handlat om en helt annan "matematik" än den som står i den här avhandlingens fokus. Intressant nog tillhör många av skolmatematikens ihärdigaste kritiker den svenska matematikerkåren. Med utgångspunkt från *sin* praktiska verksamhet har de en annan bild av matematiken än den skolan genererar. De är ofta föga entusiastiska över det överflöd av betydelser som i skolan knyts till deras forskningsobjekt.[1]

Det teoretiska värdet av att förstå det vi uppfattar som verkligt i termer av imaginär och symbolisk identifikation, är att detta synsätt gör det möjligt att betrakta både skolans och vetenskapens matematik som "lika verkliga". Det ligger annars nära till hands att betrakta skolans matematik som blott en förvrängd bild av den vetenskapliga matematiken. I den mån skolans och vetenskapens matematik skall jämföras med varandra, kommer jag här snarare att betrakta vetenskapens matematik som ett viktigt undantag.

Ett möjligt sätt att tydliggöra att det är matematikens "sociala" roll som jag syftar på när jag i den här avhandlingen talar om "matematikens roll", hade varit att förse ordet matematik med någon typ av prefix, så att jag istället för "matematiken" till exempel skrev "bilden av matematiken". Problemet med detta skrivsätt är att det implicerar en föreställning om att det skulle gå att tala om en "matematikens roll", vilket skulle vara mer "verklig" än den roll "bilden av matematiken" skulle spela i samhället. Detta är, menar jag, inte möjligt. Givet idén om symbolisk och imaginär identifikation leder nämligen varje fråga om matematikens "instrumentella" användning oundvikligen vidare till frågan: "Vad är det som gör att du betraktar just denna praktik som matematisk?". Antag att någon säger: "Matematik behövs då man bygger broar". Är det då möjligt att precisera exakt när och exakt hur matematiken används i ett specifikt brobygge? Använder en kassör eller kassörska matematik när han eller hon drar varorna förbi streckkodsläsaren, och sedan läser upp den totala summan från kassaapparatens display? Använder en ingenjör matematik när han eller hon använder FEM-lab? Använder ett barn matematik när det säger tre? När det räknar till tre? Poängen är att varje påstående om matematikens användning utgår från en *identifikation* av matematiken som närvarande i ett visst sammanhang. Det är en identifikation av verkligheten som en bild där matematiken ingår, vilken i sin tur är en konsekvens av hur vi lärt oss att tala och tänka, det vill säga vår symboliska identifikation.

Matematiken som sublimt objekt

Min andra teoretiska idé handlar om tron på matematiken. Zizek använder termen "sublimt objekt" för att tala om delar av verkligheten som vi av någon anledning upplever som speciella. Det kan till exempel vara något vi är rädda för eller en person vi är förlskade i. Den teoretiska förståelsen av dessa objekt bygger på distinktionen mellan symbolisk och imaginär identifikation. Tanken är att objekten – på ett imaginärt plan – upplevs som speciella *i sig själva*, men att denna "speciellhet" måste förstås som orsakad av en speciell egenskap hos den symboliska ordningen. De sublima objekten måste, kan man säga, förstås som yttre "objektiva" representationer av egenskaper i språket och den sociala verkligheten.

Wittgenstein skriver i en av anteckningarna publicerade i *Om visshet* om filosofiska satser "till vilka man som förhäxad gång på gång kommer tillbaka".[2] Hans poäng rörande dessa satser är att *de inte döljer något*. Wittgenstein ville med sina reflektioner "bota" filosofin från sin upptagenhet av sina "förhäxande" problem. Han ville "gallra ut [dem] ur det filosofiska språket".[3] Det han talar om är i min terminologi just filosofins sublima objekt.

Låt mig nu knyta idén att det finns sublima objekt till relationen mellan skolan och matematiken. I *The tickelish subject* skriver Zizek om hur just det vi upplever som "ogreppbart" – eller kanske helt enkelt "obegripligt" – i objektet, det vill säga den del av verkligheten som ligger längst bort inom vår upplevelsehorisont, är just den del av verkligheten där vi själva, som subjekt, är allra mest närvarande.[4] Typiskt

[1] Se tex. Kenneth Erikson et al., ""Inte så himla viktigt kunna matematik"," *Dagens Nyheter*, 2004-10-31 2004.
[2] Ludwig Wittgenstein, *Om visshet* (Stockholm: Thales, 1992), 13.
[3] Ibid.
[4] Zizek, *The ticklish subject: the absent centre of political ontology*, 90.

för skolans sätt att tala och förhålla sig till matematiken är att den framställs just som något man i skolan aldrig till fullo kan behärska. Skolans kursplaner innehåller alltid mindre delar av matematiken. På en psykologisk nivå motsvaras detta faktum av en känsla – delad av lärare och elever – av att vara relativt okunnig i förhållande till matematiken "som helhet".

Med utgångspunkt från den vetenskapliga matematiken framstår givetvis denna känsla som helt befogad. Poängen är dock att skolan, i egenskap av socialt symboliskt sammanhang, *själv* upprättar den ideala punkt – matematikens plats – vilken man anser sig inte nå fram till. Den vetenskapliga matematiken företrädare ser sällan sin matematik som till exempel ett "oundgängligt redskap för ett aktivt medborgarskap".[1] Detta är skolans bild av matematiken.

Det är frånvaron av konkret praktisk erfarenhet av matematiken, eller mer exakt att matematiken inte betraktas som knuten till något konkret praktiskt sammanhang, utan som något mer, *som något man inte vet så mycket om*, som den kan fungera som sublimt objekt, som något man tillmäter fantastiska egenskaper, som man kan *tro* på och förknippa med en potential att realisera högre sociala mål.

De sublima objektens karaktäristiska egenskap är att de får en frånvaro att framstå som något dolt. Det är just upplevelsen av att inte veta allt, upplevelsen av att det finns något i objektet som vi inte känner till, som fångar vårt intresse och gör oss fascinerade. Särskilt tydligt är detta i fråga om sammanställningar som "matematiskt tänkande", "matematisk problemlösning" och "matematisk kreativitet", vilka i den skolmatematiska diskussionen behandlas med stort intresse. De får, kan man med hjälp av de sublima objektens teori säga, sin mening från den funktion de spelar som delar av skolmatematiken i egenskap av social institution, en funktion som mer specifikt består i att ge detta sammanhang en objektiv, för förhand given, "orsak".

Matematikens blick och matematiken som nodpunkt

Den tredje idén syftar till att klargöra vilken betydelse samspelet mellan matematiken och skolan har på en samhällsövergripande nivå. Poängen är här att sublima objekt kan fungera som vad man kallar "nodpunkter" för hela tankesystem. Tanken är här att en mängd termer har en ganska diffus mening, till exempel "demokrati" och "kunskaper". Nodpunkter är ord som fixerar och konkretiserar denna mening.[2] De knyter de annars flytande termerna till ett specifikt socialt sammanhang, och gör dem därmed möjliga att använda – på ett specifikt sätt. När frågan: Hur skall vi få bättre demokrati? Besvaras: Genom att förbättra elevernas matematikkunnande! fungerar matematiken som en nodpunkt.

Av central betydelse är emellertid vad det är som får en nodpunkt att framstå som *trovärdig*, det vill säga, i exemplet ovan, vad det är som gör att det framstår som rimligt att knyta demokrati till matematikkunnande.

För att förklara detta använder jag termen "blick", vilken jag nämnde ovan i avsnittet om imaginär och symbolisk identifikation. Att på ett symboliskt plan identifiera sig med skolmatematiken, innebär att "se sig själv med matematikens ögon". Det innebär att, på ett omedvetet plan, ta matematiken för given, med en viss uppsättning egenskaper, mot bakgrund av vilka man värderar sig själv och sin omvärld. När vi känner oss osäkra för att vi tycker oss kunna för lite matematik, eller känner oss nöjda för att vi lyckats bra på ett matteprov, är det matematikens blick vi identifierar oss med.

Karaktäristiskt för den "skolans matematik" som står i fokus för den här avhandlingen, är att matematiken, när den tas för given, tas för given som en del av den sociala och fysiska verkligheten, det vill säga som något som finns "där ute". I termer av symbolisk och imaginär identifikation, kan man säga att ett av skolmatematikens karaktäristiska drag är att den genererar en bild av matematiken som ständigt närvarande, dels som den fysiska verklighetens mest grundläggande struktur (vilket gör matematiken till det mest exakta sättet att beskriva denna verklighet), dels som det mest effektiva sättet att hantera den sociala verkligheten.[3] Den bild av matematiken som skolan genererar är en bild av verkligheten som i sig själv matematisk.

Slutligen kan sägas att det är mot bakgrund av denna matematiska verklighet som kunskaper i matematik framstår som en relevant utgångspunkt för utbildningssystemets sortering. Matematikens blick, vilken

---

[1] Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken: intresse, lärande, kompetens: betänkande*, s. 102.
[2] Zizek lånar denna term från Ernesto Laclau och Chantal Mouffe, *Hegemony & socialist strategy* (London: Verso, 1985).
[3] För en analys se Paul Dowling, *The sociology of mathematics education: mathematical myths/pedagogic texts, Studies in mathematics education series, 7* (London: Falmer, 1998). Se även Roland Barthes, *Mytologier*, 1. uppl., ny tr. utg., *Boc-serien,* (Staffanstorp; Solna: Cavefors; Seelig, 1969).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

utgår från den fysiska och sociala verkligheten, bidrar till att få utbildningssystemet att framstå som naturligt och rättvist.

1.2. Metod

I det här avsnittet skall jag berätta om vad det har gjorts för tidigare forskning med anknytning till min frågeställning, och hur jag med utgångspunkt från denna forskning avgränsat min egen undersökning. Jag skall börja med att redogöra för två typer av forskning som av olika anledningar inte når fram till det mål jag eftersträvar – för det första undersökningar som syftar till förankra skolmatematiken i kunskap om samhällets "behov av matematik" och för det andra redogörelser för skolmatematikens historia. Därefter tar jag upp ett par studier av skolmatematiken vars utgångspunkter ligger nämare mina egna. Sedan beskriver jag min egen metodologiska idé.

"Matematikens betydelse i samhället"

[I det här avsnittet skall jag redogöra för de undersökningar som tidigare gjorts av samhällets behov av matematik, och varför skolmatematiken inte svarar mot detta behov.]

- Mogens Niss nämns ofta. En tidig uppsats är "Hvad är meningen med matematikundervisningen".[1] Senare text: "Mål för matematikundervisningen" i *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv.*[2] Han introducerar där vad han kallar matematikens "relevansparadox".[3] Denna utvecklar Ole Skovsmose till ett helt program för matematisk "arkeologi" som går ut på att upptäcka matematiken i samhället och världen.[4]
- Dahllöfs undersökning.[5] Kommenteras i.[6] Även bok.[7]

Internationellt:

- 1980: Cockcroft committee.[8] Analyserad av Dowling, där han säger att man får fram att det människor gör kan *beskrivas* med hjälp av matematik – medan man inte lika lätt kan konstatera om människor *använder* matematik.[9]
- I Amerika. Wilson, 1939.[10] Sammanfattning av en rad undersökningar genomförda under 1900-talets första två decennier.[11]

Skolmatematikens historia

[Här skall jag redogöra för tidigare undersökningar av den svenska skolmatematikens historia.]

- Generellt kan man säga att de insatser som gjorts för att förstå den svenskaskolmatematikens historia hittills huvudsakligen varit begränsade sig till tiden efter 1950-talet. Nyast av dessa är Gö-

---

[1] Mogens Niss, *"Hvad er meningen med matematikundervisningen?" - Fire artikler. IMFUFA tekst nr. 36* (1980).
[2] Mogens Niss, "Mål för matematikundervisningen," i *Matematikdidaktik: ett nordiskt perspektiv*, red. Barbro Grevholm (Lund: Studentlitteratur, 2001).
[3] Mogens Niss, "Nogle perspektiver for matematikundervisningen i de gymnasiala uddannelser i 1990," i *"Hvad er meningen med matematikundervisningen?" - Fire artikler. IMFUFA tekst nr. 36* (1980), 10.
[4] Skovsmose, *Towards a philosophy of critical mathematics education*.
[5] 1957 års skolberedning och Urban Dahllöf, *1957 års skolberedning, Statens offentliga utredningar, 1960:15* (Stockholm: 1960).
[6] Urban Dahllöf, "En empirisk kursplaneundersökning. Skolkurser och samhällskrav.," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1957). Urban Dahllöf, "Nya enkäter från lärarhögskolan," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1958).
[7] Torsten Husén och Urban Dahllöf, *Matematik och modersmålet i skola och yrkesliv: studier av kunskapskrav, kunskapsbehållning och undervisningens uppläggning* (Stockholm: Studieförb. Näringsliv o. samhälle, 1960).
[8] Great Britain. Committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools och W. H. Cockcroft, *Mathematics counts: report of the Committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of W.H. Cockcroft* (London: HMSO, 1982).
[9] Dowling, *The sociology of mathematics education: mathematical myths/pedagogic texts*, 5.
[10] Guy Mitchell Wilson, *Teaching the new arithmetic*, 2nd utg., *McGraw-Hill series in education* (New York: McGraw-Hill, 1951 [1939]).
[11] Guy Mitchell Wilson, *What Arithmetic Shall We Teach?* (Boston: Houghton Mifflin Company, 1926).

ran Emanuelssons redogörelse för "kompetensutvecklingsinsatser för lärare i matematik 1965-2000" i rapporten *Svårt att lära – lätt att undervisa?* (2001) och Wiggo Kilborns kapitel "Synen på baskunskaper i ett tidsperspektiv" i rapporten *Baskunnande i matematik* (2001).[1] Både Emanuelsson och Kilborn har varit verksamma inom svensk skolmatematik sedan andra halvan av 1970-talet. De beskriver vilka ansträngningar som gjorts för att förbättra den svenska skolmatematiken och vad dessa ansträngningar fått, eller inte fått, för resultat.

- Till samma genre hör en grupp avhandlingar och böcker författade av personer i den generation som dominerade den svenska skolmatematiken innan Kilborn, Emanuelsson med flera tog plats på scenen. Jag tänker här på Matts Håstads avhandling *Matematikutbildningen från grundskola till teknisk högskola igår – idag – imorgon* (1978), Margareta Kristianssons avhandling *Matematikkunskaper i Lgr 62, Lgr69* (1979) och Jan Unenges *Skolmatematiken i går, i dag och imorgon: med mina ögon sett* (1999).[2] Även dessa böcker har ett tydligt infrånperspektiv. De utgör i princip initierade utvärderingar, med syfte är att sätta skolmatematiken på rätt kurs.
- Två aktuella studier som sträcker sig bortom 1950-talet är Johan Prytz *Speaking of Geometry: a study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates* (2007) och Reza Hatamis *Reguladetri: en retorisk räknemetod speglad i svenska läromedel från 1600-talet till början av 1900-talet* (2007).[3] Prytz redogör för diskussionen av geometriundervisning under två perioder under första halvan av 1900-talet då denna var särskilt intensiv. Hatami beskriver hur regula de tri behandlats i räkneundervisningen utifrån ett matematiskt perspektiv.
- Relevant för den svenska skolmatematikens historia är även Esbjörn Larssons avhandling *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning: Kungl. krigsakademien mellan åren 1792 och 1866* (2005).[4] Larssons fokus ligger på den sociala betydelsen av krigsakademin på Carlbergs. En relativt viktig roll för denna betydelse spelade emellertid undervisningen i matematik.
- En typ av litteratur som det är svårt att överblicka är den som handlar om den svenska folkskolan. Jag tror inte jag missat någon längre redogörelse för matematikundervisningens historiska utveckling. Däremot finns säkert en mängd bilder av hur matematikundervisning bedrevs i folkskolan på olika platser och vid olika tidpunkter som jag inte känner till. Ur denna litteratur kan nämnas Gustaf Kaleens *Sveriges första folkskollärarförening* (1966) vilken innehåller ett avsnitt om matematikundervisningen i folkskolan kring mitten av 1800-talet.[5]
- Något äldre är Edward Göranssons *Bidrag till kännedom om undervisningen i Sverige under 1800-talet* från 1905, i vilken matematikundervisning ges stort utrymme, liksom den historiska redogörelsen i inledningen av Harald Dahlgrens artikel *Die Mathematik an den Volksschulen und volksschullehrerseminarien Schwedens* (1911), vilken ingår i den samling rapporter som författades i samband med den "Internationella kommissionen för matematiska undervisningen" i Rom 1911.[6]

---

[1] Göran Emanuelsson, *Svårt att lära - lätt att undervisa? om kompetensutvecklingsinsatser för lärare i matematik 1965-2000, NCM-rapport, 2001:3* (Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs universitet, 2001). Sverige. Myndigheten för skolutveckling, *Baskunnande i matematik, Stödmaterial [2003:2]* (Stockholm: Myndigheten för skolutveckling: Fritzes kundservice distributör, 2003), 28-59.

[2] Matts Håstad, *Matematikutbildningen från grundskola till teknisk högskola i går - idag - i morgon: Training in mathematics from grade school to technical university yesterday - today - tomorrow, Trita-EDU, 016* (Stockholm: 1978). Margareta Kristiansson, *Matematikkunskaper Lgr 62, Lgr 69: Knowledge of mathematics curriculum 62, curriculum 69, Göteborg studies in educational sciences, 29* (Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis, 1979). Jan Unenge, *Skolmatematiken i går, i dag och i morgon: -med mina ögon sett,* 1. uppl. utg., *Lärare lär,* (Stockholm: Natur och kultur, 1999).

[3] Reza Hatami, *Reguladetri: en retorisk räknemetod speglad i svenska läromedel från 1600-talet till början av 1900-talet, Reports from MSI, 07005* (Växjö: Växjö universitet, 2007); Johan Prytz och Uppsala universitet. Matematiska institutionen, *Speaking of Geometry: a study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates, Uppsala Dissertations in Mathematics, 49* (Uppsala: Department of Mathematics Uppsala university, 2007).

[4] Esbjörn Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning: Kungl. krigsakademien mellan åren 1792 och 1866, Studia historica Upsaliensia, 220* (Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis: Uppsala University Library distributör, 2005).

[5] Gustaf Kaleen och Föreningen för svensk undervisningshistoria, *Sveriges första folkskollärarförening: ett bidrag till den pedagogiska och didaktiska diskussionen vid mitten av 1800-talet, Årsböcker i svensk undervisningshistoria, 46(1966); 116* (Stockholm: Föreningen för svensk undervisningshistoria, 1966), 296-313. Som bilaga finns även en rad biografier över folkskollärare, av vilka Carl Axel Kindwall och Jonas Bäckman författat läroböcker i matematik.

[6] Harald Dahlgren, "Die Mathematik an den Volksschulen und volksschullehrerseminarien Schwedens," *Pedagogisk Tidskrift* (1911): 10-13; Edvard Göransson, "Bidrag till kännedom om undervisningen i Sverige under 1800-talet," i *Redogörelse för Stockholms samgymnasium*, red. O. G. A.;Lindqvist Hahr, J. M. (Stockholm: 1905). Citatet är hämtat från en presentation i Pedagogisk Tidskrift, 1911, s 126, författad av Göransson.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

- Slutligen kan nämnas Franz Hultmans artiklar om *Svenska aritmetikens historia* i Tidskrift för matematik och fysik 1868-1874 (vilka dock tyvärr inte behandlar utvecklingen under 1800-talet).[1]

Internationell forskning

Min ingång till den internationella forskningen om skolmatematikens historia har varit två forsknings-översikter av Gert Schubring, publicerade i tidskriften *Pedagogica Historica* 2006, tillsammans med en bibliografi sammanställd av samme Schubring.[2] Bibliografin pekar på att det finns en hel del forskning. En betydande del av forskningsresultaten har dock visat sig svåra att få tag på, eftersom de ofta inte är publicerade, och om de är publicerade, är publicerade i forskningsrapporter knutna till enskilda institutioner. Även då resultaten är publicerade i böcker, har dessa i de flesta fall inte funnits tillgängliga i norden, vilket innebär att enda sättet att få tillgång till dem varit att köpa dem lokalt, något jag inte haft ekonomiska möjligheter till. I den mån resultat publicerats i tidskrifter, har dessa tidskrifter i stor utsträckning inte funnits tillgängliga i norden. Svårigheten att ta del av andras forskningsresultat är också en av flera aspekter av forskningsläget som Schubring beklagar sig över i sina artiklar från 2006.

Den bild av forskningens "state of the art" som Schubring ger pekar emellertid mot att merparten av den forskning jag inte kunnat ta del av, ändå knappast skulle varit mig till någon större nytta. Denna bild stärks av den internationella forskning jag trots allt tagit del av.[3] Vad som gör resultaten mindre användbara är, på samma sätt som när det gäller den svenska forskningen, att ambitionen att *förbättra* matematikundervisningen i så stor utsträckning genomsyrar det historiska perspektivet. Låt mig exemplifiera vad jag menar med detta.

Gert Schubrings artikel *Researching into the History of Teaching and Learning Mathematics: the State of the Art* från 2006, inleds med en motivering till varför man över huvud taget bör studera skolmatematikens historia.[4]. Hans argument för historisk forskning lyder som följer:

> Since the present situation is the product of a historical process, the evolution informs the mathematics education regarding political, social and cultural constraints to improving mathematics instruction. Practically all the research questions in mathematics education have a historical dimension that too often, however, remains implicit, or is treated too superficially. Research can be improved by explicit consciousness for the history of teaching and learning mathematics. And, what is probably evan more important, the history of mathematics instruction should constitute one of the dimensions of the professional knowledge of mathematics teachers. In order to be able to handle the problems they encounter in their professional life, mathematics teachers should know how their profession emerged historically, how it developed and which types of problems were encountered during this development, and what obstacles had to be overdome for the effective establishment of mathematics teaching.[5]

Karaktäristiskt är här för det första att fokus ligger faktorer som *begränsar* möjligheterna att *förbättra* matematikundervisningen, för det andra att denna kunskap har sitt värde för att den kan förbättra den nutidsorienterade matematikdidaktiska forskningen och för att den kan förbättra matematiklärares undervisning; för det tredje att den nutida matematikundervisningen beskrivs som "effektiv", och som ett resultat av en historisk "evolution".[6]

En central plats i Schubrings fortsatta framställning intar en dikotomi mellan religion och kunskap, där matematik betraktas som synonym med kunskap. En viktig uppgift för historikern är, menar Schubring, att visa hur staten, som, skriver han, ofta varit tätt sammanvävd med religiösa intressen, på olika sätt förhindrat att kunskapen, dvs matematiken, tagit plats i skolans läroplaner. Han tar för givet att skolmatematikens historia är en process av succesiv modernisering genom vilken matematiken fått sin rättmätigt cen-

[1] F.W. Hultman, "Svenska aritmetikens historia," *Tidskrift för matematik och fysik, 1868-1870, 1874.*

[2] Gert Schubring, "Introduction. History of Teaching and Learning Mathematics," *Pedagogica Historica* 42, no. 4&5 (2006); Gert Schubring, "Researching into the History ofTeaching and Learning Mathematics: the State of the Art," *Pedagogica Historica* 42, no. 4&5 (2006). Bibliografin fanns våren 2008 tillgänlig online på hemsidan för tidskriften *The International Journal for the History of Mathematics Education*.

[3] Hit hör Jeremy Kilpatrick och George M. A. Stanic, *A history of school mathematics* (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003).

[4] Eftersom, skriver han, man "uppenbarligen" inte ägnar sig åt forskning rörande skolmatematikens historia av "ren nyfikenhet" (Schubring, "Researching into the History ofTeaching and Learning Mathematics: the State of the Art," 665.

[5] Ibid.

[6] Schubring befinner sig så nära frågor kring lärarprofession och lärarutbildning att han efter denna inledning påpekar att han "vet att det är svårt att introducera nya moment i lärarutbildningen" Ibid.: 666.

trala plats i utbildningssystemet (med "demokratisering" som följd), och ser därmed snarast historikerns uppgift som att klarlägga vad som gjort att detta tagit så lång tid.

Typisk för den internationella forskning rörande skolmatematikens historia som tagit del av är Karen D. Michalowicz och Arthur C. Howards kapitel "Pedagogy in Text: An Analysis of Mathematics Texts from the Nineteenth Century" i boken *A History of School Mathematics* (2003).[1] Beskrivningarna av läromedel är informativa och sprider ljus över svenska förhållanden, så till vida att de visar att mycket av det som hände i Sverige under 1800-talet vad gäller skolmatematik, hände ungefär samtidigt i USA. Däremot framstår de slutsatser som författarna drar av det förlopp de beskriver, som väldigt färgade av deras uttalat normativa perspektiv.

Uppenbart är att den svenska, liksom den internationella, forskningen om skolmatematikens historia utgår från premisser som ligger tämligen långt från de jag beskrivit ovan.

Metodidé

Problemet med den forskning jag redogjort för ovan är att den tenderar att ta två saker för givna: dels matematiken, dels undervisningen. Matematiken tas för given som just det eviga och i förhållande till det sociala oberoende objekt som vetenskapshistorisk forskning under de senaste decennierna kommit att ifrågasätta. Lika problematiskt är att undervisningen, och mer specifikt matematikundervisning i egenskap av svårlöstligt problem, betraktas som något i det närmast lika "evigt". Föreställningen om att matematiken finns där ute, och att den så att säga kräver obligatorisk undervisning, har satt ramarna även för "kritisk" forskning om skolmatematiken.[2] Syftet att problematisera dessa ramar har väglett mitt metodval.

Avhandlingen handlar å ena sidan om föreställningar om matematik, och å andra sidan om hur dessa föreställningar kommer till uttryck och får konsekvenser inom lika typer av utbildningsinstitutioner.

Vad gäller föreställningar om matematiken har min ambition varit att så långt möjligt spåra dem till sitt historiska ursprung. Här har jag dock avgränsat mig till modern tid, och utelämnat matematikens antika historia, även om den säkert är nog så intressant. Mitt fokus har legat på att förstå hur föreställningar om matematik vävts samman med övergripande tankesystem, och hur denna sammanvävning kan förstås sociologiskt.

Vad gäller matematikens behandling i skolan har min ambition varit att visa hur dessa tagit form så att säga "från början". Min tanke är att undervisningspraktiker kan förstå som ett resultat av tre faktorer: för det första idéer, till exempel om matematiken, som finns till hands och kan ge vissa praktiker en viss mening som ändamålsenliga; för det andra sociala "behov", till exempel av att hålla barn och ungdomar sysselsatta eller att förhindra att de begår brott eller orsakar andra typer av problem; och för det tredje olika typer av praktiska villkor, som till exempel materiella och ekonomiska förutsättningar. Med detta som utgångspunkt kan man tala om ett *samspel* mellan å ena sidan skolan, som social institution, och å andra sidan matematiken, vilket jag försöker följa genom historien. Viktigt är dock att skolan inte bara använder idéer om matematiken för att få sin praktiska verksamhet att framstå som meningfull, den bidrar även till att transformera föreställningar om matematiken, vilka den även för ut till andra delar av samhället.

Avgränsning

- Undersökningen handlar om svenska förhållanden. Bortsett från sekundärlitteratur rörande matematikens historia, har texter författade utanför Sverige och texter som handlar om förhållanden utanför Sverige, bara använts undantagsvis för att belysa någon viss aspekt av det svenska förloppet.
- Vad gäller empiri består denna huvudsakligen av texter producerade inom olika typer av utbildningsinstitutioner, från början av 1700-talet fram till idag, med tonvikt på 1800-talets andra hälft, vilken visade sig vara särskilt betydelsefull för skolmatematikens utveckling. För perioden före 1830 är framställningen – förutom att jag givetvis använt sekundärlitteratur – huvudsakligen ba-

[1] Karen D. Michalowica och Arthur C. Howard, "Pedagogy in Text: An Analysis of Mathematics Texts from the Nineteenth Century," i *A history of school mathematics*, red. Jeremy Kilpatrick och George M. A. Stanic (Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003).

[2] Det finns ett par undantag från denna regel. Hit hör Dowling, *The sociology of mathematics education: mathematical myths/pedagogic texts*., en bok i vilken Dowling visar att läroböcker i matematik "(re)producerar" vad han kallar *myter* om matematiken. Dessa myter stämmer mycket väl överens med det jag kallar matematikens "blick". Till undantagen hör även Jean Lave, *Cognition in practice: mind, mathematics and culture in everyday life* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988). och Valerie Walkerdine, *The mastery of reason: cognitive development and the production of rationality* (London: Routledge, 1988).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

serad på läroböcker och deras förord. Från 1850-talets och framåt blir istället artiklar i lärartidningar den huvudsakliga empirin. Jag tror att jag tagit del av det mesta som skrivits om matematik i svenska skoltidningar fram till mitten av 1970-talet. Från 1870-talet tillkommer statliga utredningar samt olika typer av planeringsdokument som en viktig typ av källmaterial. Från 1900-talets första decennier tillkommer texter om skolmatematik med vetenskapliga ambitioner. Mitt historiska källmaterial sträcker sig fram till slutet av 1970-talet, men av olika anledningar har jag valt att huvudsakligen begränsa min framställning till tiden före 1960.

- Jag har inte haft ambitionen att skriva den svenska skolmatematiken historia. Istället har jag fokuserat på vissa skeden som visat sig betydelsefulla i förhållande till min frågeställning. Jag har inte på förhand avgränsat någon viss del av matematiken, eller någon viss ålderkategori, som mitt huvudsakliga fokus.

Disposition

Den historiska redogörelsen består av två delar. Den första handlar om den långa period under vilken undervisning i matematik på ett samhälleligt plan var ett relativt perifert fenomen. Den sträcker sig fram till 1850-talet, då skolmatematiken av en rad anledningar började få större betydelse. Den historiska redogörelsens andra del handlar om hur skolmatematiken kom att inta en central och betydelsefull plats i det svenska samhället. Den sträcker sig från 1850-talet till omkring 1950. Den historiska redogörelsen har 9 kapitel (kapitel 2-10). Varje kapitel inleds med en beskrivning av vad det handlar om och avslutas med en "Analys" där den empiriska redogörelsen relateras till avhandlingens övergripande syfte. Avhandlingen avslutas i kapitel 11 med några sammanfattande slutsatser. Med detta sagt, låt mig nu ge en kortfattad presentation av avhandlingens innehåll.

Kapitel 2: Räknekonsten

Avhandlingen tar avstamp i en beskrivning av matematiken så att säga "innan den blev matematik", nämligen i en typ av böcker som kallades "räkneläror", vilka handlar om "den borgerliga räknekonsten". Denna konst presenteras i räknelärorna som ett system av tekniker för att besvara frågor som uppstår i det "borgerliga livet". Den första svenska räkneläran publicerades 1614, och den sista – så som jag avgränsar genren – 1843.[1] Karaktäristiskt för räknelärorna är att deras disposition antyder att de var tänkta att använda som handböcker i praktisk räkning. De var inte knutna till någon specifik undervisningspraktik, och de gav inte uttryck för några specifikt vetenskapliga ambitioner. Det var räknekonstens tekniker som kom att utgöra skolmatematikens huvudsakliga "stoff".

Kapitel 3: Matematiken

Det var under 1600-talet som den process ägde rum genom vilken matematiken kom att få det allmänt erkända värde som vetenskap vilket den fortfarande förknippas med. Detta hände utanför Sverige. Den "uppvärderade" matematiken – vilken var sammanvävd med en mängd olika, ibland religiösa, tankesystem – kom till Sverige under 1700-talets första hälft. Kapitel 3 handlar om det möte, mellan den "vetenskapliga" matematiken och räknekonsten, som då ägde rum.

I den "vetenskapliga" matematikens centrum stod den matematiska metoden, exemplifierad av en bok författad under antiken: Euklides *Elementa*.[2] Denna matematik var i motsats till räknekonsten något det talades mycket om, och det är från denna tid som man kan tala om en svensk "matematisk diskurs". Man tillmätte matematiska studier en gynnsam effekt så väl på förmågan att tänka rationellt som förmågan att fatta moraliskt riktiga beslut. Det praktiska räknandet fick i detta sammanhang en mer underordnad roll.

Mötet mellan den vetenskapliga matematiken och räknekonsten resulterade i en ny typ av läroböcker, i vilka räknekonsten – med delvis märkliga resultat – omformats för att passa det ideal som förknippades med Euklides *Elementa*.[3]

---

[1] Aegidius Matthiae Aurelius, "Arithmetica Eller Een Kort och Eenfaldigh Räknebook uthi helle och brutne Taal," i *Minnen och dokument*, red. Bengt Johansson, *Årsböcker i svensk undervisningshistoria* (Uppsala: Fören. för svensk undervisningshistoria, [1614] 1995). Roloff Andersson, *Genwäg till borgerliga räkne-konsten*, 8. uppl. utg. (Örebro: 1843).

[2] Mårten Strömer, *De Sex Första Böckerna Af Euklidis Elementa, eller grundeliga inledning til geometrien* (1748 [1744]).

[3] Jag syftar här först och främst på Anders Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-konst, Til En Grundelig Inledning För Swea-Rikes Ungdom Utgifwen af And. Celsius Mathes. Prof. wid Kongl. Acad. och Secret. wid Kongl. Wetensk.Societ. i Upsala* (Stockholm: Hos Gottfried Keisewetter, Kongl. Academ. Bokhandlare i Upsala, 1741 [1727]).

Kapitel 4: Meritokrati

Från slutet av 1600-talet var matematiken relativt ohotad som det begreppsliga ramverk från vilket undersökningar om naturen måste utgå. Matematikens samhälleliga betydelse var dock fortfarande under 1700-talet relativt marginell. Ett första steg mot en förändring av detta togs i och med att matematik i Frankrike och i England gjordes till centrala delar av vad jag kallar lokala meritokratiska system.[1] Det höga värde, och den mängd positiva egenskaper som kring mitten av 1700-talet hade kommit att förknippas med matematiken, kom i dessa sammanhang att utnyttjas för att skänka legitimitet åt sociala institutioner vilka hade relativt lite att göra både med matematik i egenskap av vetenskap och matematikens koppling till teknik och naturvetenskap. I Sverige skedde något motsvarande i och med att matematik gjordes till en central del av studierna vid kungliga krigsakademin på Karlberg utanför Stockholm, vilken bildades 1792.[2]

Inom dessa institutionaliserade sammanhang började ett specifikt skolmatematiskt stoff att avskiljas från den vetenskapliga matematiken, uppdelat i väl avgränsade kurser definierade av avslutande examinationer. Det var i dessa sammanhang som elevers prestationer i matematik för första gången (i modern tid) kom att tillmätas stor betydelse. Matematik blev ett pluggämne. Jag argumenterar för att det sätt på vilket matematiken framställdes i läroböckerna resulterade i en identifikation med en viss matematikens "blick" genom vilken matematiken fyllde sin funktion att legitimera den sociala institutionens sätt att fungera.

Kapitel 5: Matematik för medborgerlig bildning

Under 1800-talets första hälft expanderade de matematiska studierna från den specifikt militära sfären till ny institutionella sammanhang. Samtidigt tog delvis nya idéer plats rörande de matematiska studiernas mål. Det pågick en strid rörande läroverket, där de klassiska språken – vilka dominerade undervisningen – utsattes för hård kritik och kontrasterades mot "realbildande" ämnen, bland vilka matematiken intog en särställning.

I den process under vilken matematiken flyttade in i nya institutionella sammanhang, författades en ny typ av läroböcker i aritmetik, vars särskiljande drag var att de huvudsakligen bestod av å ena sidan regler och å andra sidan övningsuppgifter. Dessa kom att utgöra den gemensamma referenspunkten för den skolmatematiska diskussion som tog form i Sverige kring mitten av 1800-talet.

Kapitel 6: Matematik för folket

Om skolmatematikens två första ursprung är räknekonsten och den "vetenskapliga" matematik som föddes under 1600-talet, kan ett tredje ursprung sägas vara de betydelser matematiken kring sekelskiftet 1800 kom att tillskrivas som instrument för uppfostran av barn. Det namn som förknippas med denna syn på matematiken är Heinrich Pestalozzi. Han utformade vad som närmast framstår som en uppfostringskonstens metafysik, inom vilken matematiken spelade en central roll.

I detta skede av skolmatematikens historia är det väldigt tydligt hur sociala och praktiska omständigheter bidrar till att omforma bilden av matematiken. Pestalozzi förespråkade en mycket speciell undervisningsmetodik, vars kännetecknande drag bland annat var att en ytterst liten del av matematiken (eller för den delen räknekonsten) behandlades, men att denna däremot behandlades oerhört "grundligt" genom att eleverna fick utföra samma elementära räkneoperationer om och om igen. Pestalozzis undervisning var praktisk, och bestod i att barnen fick aktigt förhålla sig till och tala om sin fysiska omvärld i matematiska termer – men dock inom strikta ramar.

Med Pestalozzi, förskjöts undervisningens mål, på ett mer definitivt sätt än tidigare, från bibringande av kunskaper i matematik, till användning av matematik som redskap för att göra barn sedliga och harmoniska. Pestalozzi gjorde matematiken till en del av en "metafysik" genom vilken den förbands med Gud, människan och verklighetens essens. Denna "metafysik" satte ramarna för hans tänkande kring undervisningspraktiken. Det är dock lätt att se att det snarare var undervisningspraktiken, och dess praktiska villkor, som satte ramarna för hans "metafysik" än tvärtom.

Under detta skede i matematikens historia tog en rad idéer form, rörande matematikens relation till barnet, vilka i stor utsträckning kom att sätta agendan för den skolmatematiska diskussionen.

---

[1] Se Alder, *Engineering the revolution*; Ken Alder, "French Engineers Become Professionals; or, How Meritocracy Made Knowledge Objective," i *The Sciences in Enlightened Europe*, red. William; Golinski Clark, Jan; Schaffer, Simon (Chicago & London: The University of Chicago Press, 1999). samt vad gäller England John Gascoigne, "From Bentley to the Victorians: The Rise and Fall of British Newtonian Natural Theology," *Science in Context* 2, no. 2 (1988); John Gascoigne, "Mathematics and Meritocracy: The Emergence of the Cambridge Mathematical Tripos," *Social Studies of Science* 14 (1984).

[2] Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning.*

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Kapitel 7: Matematiken tar plats i folkskola och läroverk

I kapitel 7, som är det första i den historiska redogörelsens andra del, löper de trådar som beskrivits i de tidigare kapitlen samman. Det handlar om decennierna efter 1800-talets mitt, då matematiken tagit plats i läroverket och samtidigt blivit ett av ämnena i den då snabbt växande folkskolan. Som ett resultat av att allt fler skulle undervisas i matematik, publicerades vid denna tid en mängd nya läroböcker, genom vilka ståndpunkter rörande hur undervisningen borde vara utformad kom till uttryck. Det uppstod en skolmatematisk diskussion. I denna diskussion formulerades ett antal grundläggande frågor och svar rörande grundläggande matematikundervisning som sedan kom att stötas och blötas av varje ny generation skolmatematiker, utan att egentligen förändras särskilt mycket.

Vid denna tid bredde en konsensus ut sig som sade att skolmatematiken i allmänhet inte levde upp till vad man med utgångspunkt från matematikens mångafaldiga positiva egenskaper kunde förvänta sig av den. Därmed sattes fokus först på de bristfälliga metoder som, menade man, måste vara orsaken till skolmatematikens misslyckande, och sedan på de nya metoder med vars hjälp man hoppades att skolmatematiken kunde nå större framgång.

Kapitel 8: Skolmatematik för tyst övning

Den enskilt viktigaste förändring som skolmatematiken genomgick från mitten av 1700-talet till mitten av 1900-talet var att mängden övningsuppgifter i läroböckerna ökade, från några tiotal i 1600-talets räkneläror, till att kunna räknas i hundra tusental (!) mot slutet av 1950-talet.[1] Denna process accelererade efter 1870-talet, och i kapitel 8 visar jag hur detta kan förklaras med hänvisning till en viss praktisk funktion som läroböcker i matematik vid denna tid författades för att fylla, nämligen att hålla eleverna tysta och sysselsatta.

Kapitel 9: Matematiken, barnet och vetenskapen

I den skolmatematiska diskursen hade matematiken under hela 1800-talet huvudsakligen betraktats som ett *bildningsmedel*, något den var i kraft av sin "evigt exemplariska" vetenskaplighet. Huvudsaken var inte att lära barnen räkna (eller att lära dem använda algebra eller geometri på något praktiskt sätt), utan att de skulle arbeta med matematiken, för att därmed *ta intryck* av matematikens specifikt bildande egenskaper.

Decennierna kring sekelskiftet 1900 förändrades på ett övergripande idémässigt plan relationen mellan matematiken, vetenskapen och skolan. Framför allt skedde en utveckling inom den vetenskapliga matematiken, som avlägsnade den från folkskolans och läroverkets undervisningspraktiker. Universitetsmatematiker riktade kritik mot skolmatematiken, vilken de betraktade som irrelevant, ovetenskaplig och opraktisk. Det var vid denna tid som termen skolmatematik började användas mer allmänt, just för att tala om vad som då framstod som folkskolans och läroverkets *säregna* matematiska stoff.

Min poäng i kapitlet 9 är emellertid att skolmatematiken, kritiken till trots, under denna tid intog en allt mer central position i samhället. Det sätt att tänka kring matematiken och undervisningen som var gängse under 1800-talet levde kvar, om än i något eufemiserad form.

Vid denna tid kom folkskolan och småskolan att nå ut till en allt större del av befolkningen. Småskollärarinnor tog plats på den skolmatematiska scenen, och i deras skolmatematiska diskussion stod "barnet" i centrum.

Kapitel 10: Utbildningssystemet, skolmatematiken, och vetenskapen

I den historiska redogörelsens sista kapitel visar jag hur skolmatematiken under första halvan av 1900-talet blir en central del av det då framväxande utbildningssystemet. Det svenska samhället blir en meritokrati, inom vilken prestationer i matematik används för att fördela individer mellan sociala positioner, samtidigt som matematiken, genom sina egenskaper, får denna sortering att framstå som relevant och rättvis.

Examinationernas växande betydelse leder till en fixering av det matematiska stoffet, och ett ytterligare intensifierat fokus på övande.

På grund av sin nu stora samhälleliga betydelse hamnar skolmatematiken i centrum för en politisk diskussion. Matematiken får talesmän som försvarar den mot kritik och man kan tala om en kamp om matematikens plats i skolan.

[1] Jag syftar här på antalet uppgifter som en elev räknade under hela sin skolgång.

Det sista steget i min berättelse utgörs av att skolan, under 1950- och 1960-talet får så att säga "egna" vetenskaper, bland vilka matematikdidaktiken kom att vara närmast knuten till skolmatematiken. En av matematikdidaktikens viktigaste funktioner blev att fungera som en sorts institutionaliserad kritiker av skolmatematiken. På så sätt kom skolmatematiken att framstå som ett "vetenskapens föremål", allt för komplicerat för att kunna tas upp i ett demokratiskt offentligt samtal.

Kapitel 11: Slutsatser

I avhandlingens sista kapitel drar jag några sammanfattande slutsatser i anknytning till mina inledande frågeställning och min tes.

Jag konstaterar att våra nuvarande föreställningar om matematiken måste ses som ett resultat av en långsam historisk process som pågått sedan slutet av 1500-talet – en process genom vilken matematiken successivt kommit att spela en allt viktigare roll för att konstituera västerlandets enhetliga världsbild.

Mot bakgrund av den historiska redogörelsen står det klart att den offentliga skolan spelat en avgörande roll för att understödja denna matematikens världsbild. Skolmatematikens praktiker är delvis formade med utgångspunkt från räknekonstens och den vetenskapliga matematikens särskilda egenskaper. Dessa har dock omformats i skolan, för att passa skiftande praktiska omständigheter och samhälleliga behov. Som en effekt av detta har skolan bidragit till att förskjuta och förändra bilden av matematiken, samtidigt som den utsträckt erkännandet av dess värde till allt större delar av samhället.

Det står klart att skolmatematiken fyller en rad praktiska funktioner, som att sysselsätta och sortera Sveriges barn och ungdomar. Den skolmatematiska praktiken är sådan att den genererar tro på en matematik som finns "där ute" i den sociala och fysiska verkligheten. Denna utgör sedan utgångspunkten för bedömning av såväl skolan som det samhälle den är en del av. Den matematik skolan konstituerar får både dess egna hierarkiserande praktiker och det hierarkiska samhälle den därmed bidrar till att reproducera att framstå som förankrade i en objektivt existerande matematiska verklighet.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Del 1: Skolmatematik i periferin

2. Räknekonsten

I det här kapitlet beskriver jag det äldsta och viktigaste ursprunget till det som senare skulle bli den svenska skolmatematiken. Detta ursprung finns inte i matematikens vetenskapliga historia, utan i en typ av böcker som kallades "räkneläror" och den "räknekonst" de handlade om. Kapitlet syfte är att förklara vad räknekonst är och hur den presenterades i räknelärorna, för att sedan kunna återknyta till denna beskrivning i de följande kapitlen.

1614 trycktes den första svenska räkneläran: Aegidio Aurelius *Arithmetica.*[1] Den sista upplagan av en svensk räknelära trycktes 1843.[2] Mellan dessa år kom det ut ett drygt tjugotal olika räkneläror. Läroverksläraren Frans Hultman diskuterar flera av de äldre räknelärorna i en serie artiklar under rubriken "Svenska Aritmetikens Historia" publicerade i *Tidskrift för matematik och fysik* 1868-1874.[3] Till de Hultman tar upp, kommer några stycken publicerade under 1700-talet, Johan Gräns' *Underwisning uti Räknekonsten* från 1801, samt möjligen ytterligare några böcker från perioden kring sekelskiftet 1800.[4]

Det är inte självklart hur genren "räkneläror" bör avgränsas. En gräns måste dras åt åtminstone tre håll: dels mot det som från och med 1600-talet var på väg att bli den moderna matematiska vetenskapen, dels mot böcker som i och för sig berörde "matematiska" frågor, men hade fokus på annat, till exempel handel och bokföring, och slutligen mot den typ av läroböcker som mot slutet av 1700-talet kom att ersätta räknelärorna som utgångspunkt för grundläggande undervisning i matematik. Förenklat kan man säga att genren, från att vara relativt lätt att identifiera under 1600-talet, under 1700-talet sönderfaller i de tre ovan nämnda riktningarna. Vad jag vill göra här, är att karaktärisera ett slags räknelärornas idealtyp. Detta alltså snarare än att beskriva å ena sidan den variationsrikedom som genren innefattade, eller å andra sidan dess relation till andra närliggande genrer

Bland räknelärorna intar Nicolao Agrelius *Institutiones Arithmeticae* en särställning.[5] Den publicerade första gången 1655, och kom sedan ut i en mängd upplagor ända fram till 1798.[6] I de räkneläror som publicerades under senare hälften av 1700-talet utgör den en återkommande referenspunkt, som man efterliknar, hänvisar till, eller (oftast) tar avstånd från. Agrelius *Institutiones Arithmeticae* kan därför sägas utgöra ett sorts paradigm för räkneläran som genre.

Det är emellertid inte denna bok jag här tar som utgångspunkt för min redogörelse. Under 1700-talet kom räknelärorna – i synnerhet Agrelius *Institutiones Arithmeticae* – att utsättas för skarp kritik. Denna kritik utgjorde en del av den rörelse genom vilken räkneläran som genre successivt försvann, och ersattes av andra typer av böcker. Räknelärorna hade dock flera försvarare. Under 1700-talet försågs till exempel Agrelius *Institutiones Arithmeticae* med ett förord, författat av Johannes Bilberg,[7] i vilket Agrelius med stort patos försvaras mot sina "fiender".[8] Klart är att de som tog sig för att författa räkneläror under andra hälften av 1700-talet säkerligen var medveten om den kritik som riktats mot genren.

---

1 Vilken idag, tack vare Bengt Johanssons försorg, finns i nytryck: Aurelius, "Arithmetica." Aegidio Aurelius föddes någon gång på slutet av 1500-talet och dog 1648. Han var verksam i Uppsala.

2 Jag syftar här på Andersson, *Genwäg till borgerliga räkne-konsten*.

3 Hultman, "Svenska aritmetikens historia." Se även Hatami, *Reguladetri: en retorisk räknemetod speglad i svenska läromedel från 1600-talet till början av 1900-talet.*

4 Johan Gräns, *Undervisning uti räknekonsten, lämpad så väl til de okunniges som mera kunniges begrep, grundeligen och på et tydligt samt lätt sätt innefattande handels-och hushålls-räkning* (Stockholm: 1801).

5 Nicolaus Petri Agrelius, eller på svenska: Niklas Peter Agrell, studerade i Uppsala från 1646. Han blev "tullnär" i Varberg 1658, borgmästare 1660 och från 1665 "inspektor" på det Wrangelska godset Lindeberg i Halland. Han dog 1681.

6 Jag använder upplagan från 1798: Nicolaus Agrelius, *Institutiones arithmeticae, eller Kårt underwisning, om de förnämsta och högnödigsta reglor, exempel, italienska practiquer och compendier, som i dagelig räkning mäst brukelige äro. Dem konst-älskadom til nytto och gagn sammanskrefwen: af Nicolao P. Agrelio. Men nu förökt med några kårtare räkne-sätt, samt tydelig underrättelse om wäxel-räkningar och italienska bokhålleriet. Stockholm, Tryckt i Langeska Tryckeriet 1798.* (Stockholm: 1798 [1655]).

7 Johannes Bilberg (1646-1717) var professor vid Uppsala universitet, först i matematik, men från 1689 istället i teologi.

8 Nicolaus Agrelius, *Institutiones arithmeticae, eller Kårt underwisning, om de förnämsta och högnödigsta reglor, exempel, italienska practiquer och compendier, som i dagelig räkning mäst brukelige äro. Dem konst-älskadom! til nytto och gagn sammanskrefwen* (Stockholm: 1754 [1655]), förord.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

I synnerhet syns en sådan medvetenhet i Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica*, publicerade första gången 1779.[1] I denna bok tycker jag mig kunna se en slags renodling av de principer som utgör räknelärans särdrag, vilka skiljer den från de olika genrer som växte fram under 1700-talet. Andersson riktar kritik mot tidigare räkneläror (läs Agrelius) vilka enligt honomn inte lever upp till vad man kan förvänta sig av en räknelära. Samtidigt är han kritisk mot de förändringstendenser han såg i sin samtid, vilka även de stred mot hans syn på vad en räknelära borde innehålla. Av dessa skäl har jag därför valt att ta Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica* som utgångspunkt för min redogörelse för de svenska räknelärorna.

Räkneläror handlar om något som i deras titlar kallas "räknekonsten" eller "den borgerliga räknekonsten". Andersson förklarar att denna räknekonst är "en vetenskap, som lärer huru alla de frågor som i det Borgerliga lefwernet förekomma angående Tal, Mynt, Wigt, Mått, Mål, etc, kunna rätt upplösas och beswaras, att man får wisst weta hwad man frågar efter".[2] Man kan emellertid inte sätta likhetstecken mellan räknelärornas innehåll, och den praktik de utger sig för att beskriva. Det är varken säkert att de frågor räknelärorna beskriver faktiskt förekom i praktiken eller att de besvarades med hjälp av de metoder räknelärorna beskriver. Tvärtom måste räkneläran betraktas som en delvis autonom litterär genre, vilken levde sitt eget liv, oberoende både av samhälleliga förändringar med konsekvenser både för behovet av "räkning" och utvecklingen av metoder anpassade till dessa behov.

I fokus för min redogörelse står därför, framför allt, *hur* räknelärorna beskriver räknekonsten, inte böckerna (som text) eller räknekonsten (som praktik). Det är med utgångspunkt från räknelärornas framställningssätt – vilka frågor de tar upp, hur de beskriver metoderna för att besvara dem, och mer allmänt hur de tilltalar sina läsare – som jag utmejslar min idealtyp. Den inbegriper därför inte bara "räknekonsten" i egenskap av ett system av tekniker för att besvara en viss typ av frågor, utan även en viss relation mellan författare och läsare, samt mer allmänt en relation mellan människa och verklighet. Termen *räknekonst* inbegriper här allt detta, och har med andra ord en ganska vid innebörd.

I det följande är det viktigt att komma ihåg att min redogörelse inte syftar till att ge en heltäckande bild varken av de svenska räknelärorna eller den räknekonst de beskriver. Vad jag vill göra är istället att konstituera räknekonsten som ett av flera ursprung till den skolmatematik som står i avhandlingens centrum. Det visar sig nämligen att skolmatematiken, när den tog form under 1800-talet, utgick från räknekonsten. De läroböcker som då tog form utgjorde en sorts schematiserade räkneläror, som trots en förändrad form, i stor utsträckning knöt an till räknelärornas innehåll.

Som exempel kan tas att räknelärorna, vilka i stor utsträckning består av konkreta "recept" för hur olika praktiska frågor kan besvaras, innehåller ett sätt att räkna som ursprungligen kallades "regula societatis".[3] Det beskriver hur man (enligt räknekonstens principer) skall räkna om ett antal personer satsat pengar i ett gemensamt "bolag" och detta bolag efter en tids verksamhet skall lösas upp. Utgångspunkten för räknesättet är att personernas ursprungliga satsningar definierar deras respektive andelar i bolaget, och att de, när bolaget löses upp, skall få ut pengar motsvarande dessa andelar.[4] Detta räknesätt kom under 1700-talet att få den svenska beteckningen "bolagsräkning". Under 1800-talet tog många läroboksförfattare fasta på vad de förmodligen uppfattade som det väsentliga i räknesättet och döpte om det till "delningsräkning".

Poängen är nu att läroböcker så sent som på 1940-talet – en period då många av de läroböcker som användes utgjorde mer eller mindre bearbetade nyutgåvor av böcker författade på 1890- eller ibland till och med 1880-talet – ofta hade "bolagsräkning" eller "delningsräkning" som överskrift på något av bokens avsnitt. Och även i läroböcker från denna tid där dessa rubriker inte var utsatta, döljer sig räknesättet inte desto mindre garanterat i många av de övningsuppgifter som då utgjorde läroböckernas huvudsakliga innehåll.

Fallet "bolagsräkning" är inget undantag. Tvärtom levde många av räknelärornas särdrag vidare genom hela 1800-talet och första halvan av 1900-talet som delar av skolmatematiken. Min berättelse om skolmatematikens historia kan till och med i viss mån ses som en beskrivning av den "ursprungliga" räknekonstens successiva transformationer. Här är emellertid citationstecknen nödvändiga, eftersom det, som jag

---

[1] Roloff Andersson levde mellan 1744 och 1828.

[2] Roloff Andersson, *Arithmetica tironica, eller Kort och grundlig anwisning at practice lära all nödwändig hus- och handelsräkning; efter den nu för tiden mäst brukliga och fördelaktigaste läro-methode, til allmänhetens och i synnerhet scholarnes tjenst: och nytta, efter sednaste kongl. maj:ts mynt-ordning* (Örebro: 1830 [1779]), 1.

[3] Tex i Agrelius, *Institutiones arithmeticae*.

[4] Antag att A satsat 5000 kronor och B satsat 10000 kronor. Eftersom 5000 är en tredjedel av 15000 kan man då säga att A äger en tredjedel av bolaget, medan B äger två tredjedelar. Då bolaget skall lösas upp är det, eftersom det gått med vinst, värt 300000 kronor. Då skall, enligt de antaganden som ekonomiska villkor etc som räknekonsten implicerar, A få en tredjedel av 300000, dvs 100000 kronor och B två tredjedelar av 300000 dvs 200000 kronor.

också skall visa, knappast är meningsfullt att tala om räknekonsten som ett ursprung i denna konkreta historiska bemärkelse. Mindre problematiskt – men inte mindre intressant – är konstaterandet att det är tack vare skolmatematiken som räkneläran och den räknekonst den beskriver faktiskt, om än i deformerad form, kom att leva vidare ända in i 1900-talet. Detta i motsats till liknande litterära uttryck från samma tid vilka hörde till andra kunskapsområden. Till exempel kom medeltida sammanställningar av *medicinska* recept och patentlösningar att utrangeras redan under 1700-talet. Lite tillspetsat kan man säga att räknekonsten, trots att den i en vetenskaplig bemärkelse blev inaktuell redan under 1600-talet, levde vidare så länge tack vare att den blev en del av de framväxande institutionerna för offentlig utbildning, vilka gav den "skydd" från vetenskapen och det omgivande samhället.

På grund av att räknelärorna och räknekonsten utgör en så central aspekt av skolmatematikens historia, kommer jag här gå igenom Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica* relativt grundligt. Jag kommer även att relatera hans framställning till bland andra Agrelius' för att i visa på den enhetlighet över tid som karaktäriserar räkneläran som genre. Jag kommer sedan, i de följande kapitlen, flera gånger få anledning att återkomma till denna redogörelse, inte bara för att peka på ursprunget till innehållet i skolmatematiska läroböcker och till teman den skolmatematiska diskussionen. Lika viktigt är att här visa att räknekonsten, exemplifierad av Anderssons framställning i hans *Arithmetica Tironica*, utgjorde ett sammanhängande och begripligt system för praktiskt räknande som inte på något uppenbart sätt kan sägas vara *sämre* än de motsvarigheter som kom till uttryck senare. Ett karaktäristiskt drag hos den skolmatematiska diskussionen – ett drag som kan följas från 1850-talet fram till vår tid – är nämligen ett systematiskt nedvärderande av skolmatematikens förflutna. Man kontrasterar "traditionen" – de bakvända metoder man använt förr – med de nya riktiga metoder som, menar man, just sett dagens ljus.[1] Om skolmatematikens förflutna skall knytas till någon tradition som så att säga ligger bortom dess egen reflektion, måste denna tradition vara räknelärornas. Därför är det viktigt att visa att denna tradition inte *stämmer* med skolmatematikens svepande karaktäristik av det förflutna som den ständigt säger sig vilja överskrida.

Min redogörelse här är huvudsakligen begränsad till ett fåtal svenska räkneläror. Med stöd av att Agrelius *Institutiones Arithmeticae* publicerades 1655, och att denna räknelära har stora likheter såväl med Aurelius *Arithmetica* från 1614 som med Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica* från 1779, argumenterar jag för att de böcker jag hänvisar till kan ses som representanter för en *genre* – räkneläran. Det är emellertid uppenbart att denna genre inte har sitt ursprung i Sverige, utan att de svenska räknelärorna tvärtom snarare måste betraktas som uttryck för en tradition som växt fram och utvecklats på andra håll i Europa. Efter den empiriska redogörelsen gör därför jag ett försök att sätta in de svenska räknelärorna i ett Europeiskt historiskt sammanhang. Tyvärr tycks det samma gälla för övriga Europa som för Sverige i fråga om räknelärorna, nämligen att de inte varit föremål för några detaljerade historiska undersökningar, vilket sätter snäva gränser för vad som med rimlig arbetsinsats är möjligt att säga om detta sammanhang.

Avslutningsvis sammanfattar jag räknelärans och räknekonstens egenskaper med utgångspunkt från mitt teoretiska ramverk. Här mer än tidigare framställer jag räknekonsten som idealtyp, med syfte att tydliggöra dess särskiljande drag i förhållande till den matematik som står i fokus för nästa kapitel, samt givetvis i förhållande till den skolmatematik som räknekonsten pekar fram mot. På grund av detta jämförande syfte tar jag här även upp några aspekter av vad räknekonsten uppenbarligen *inte* var.[2]

2.1. Räknelärornas disposition och innehåll

Alla de böcker som jag för till genren räkneläror har en likartad struktur. De börjar med en grundläggande genomgång av talsystemet, sedan följer en beskrivning av de fyra räknesätten i hela tal, sorter och bråk. Merparten av räknelärorna upptas sedan av en redogörelse för Regula de Tri – ett sätt att räkna som jag kommer att ägna en hel del utrymme i det följande. Utöver detta obligatoriska innehåll tillkommer ibland annat – såsom redogörelser för progressioner, rotutdragning, räkning med decimaler och geometri. Dessa

[1] Hänvisningar till skolmatematikens defekta förflutna har periodvis varit närmast obligatoriska i lärartidningarnas artiklar om skolmatematik från 1850-talet fram till vår tid. Den nyfikne vill jag uppmana att jämföra Gullbrand Elowsson, "Om den aritmetiska undervisningsmetoden. 1 Diskussion om undervisningen i aritmetik.," *Tidskrift för matematik och fysik* (1869)., ett läsvärt tidigt exempel på denna retoriska figur, med Matematikdelegationen, *Att lyfta matematiken: intresse, lärande, kompetens: betänkande*, 11,17,58.

[2] Med tanke på skolmatematiken är det till exempel viktigt att påpeka att räknekonst aldrig varit något för *barn*.

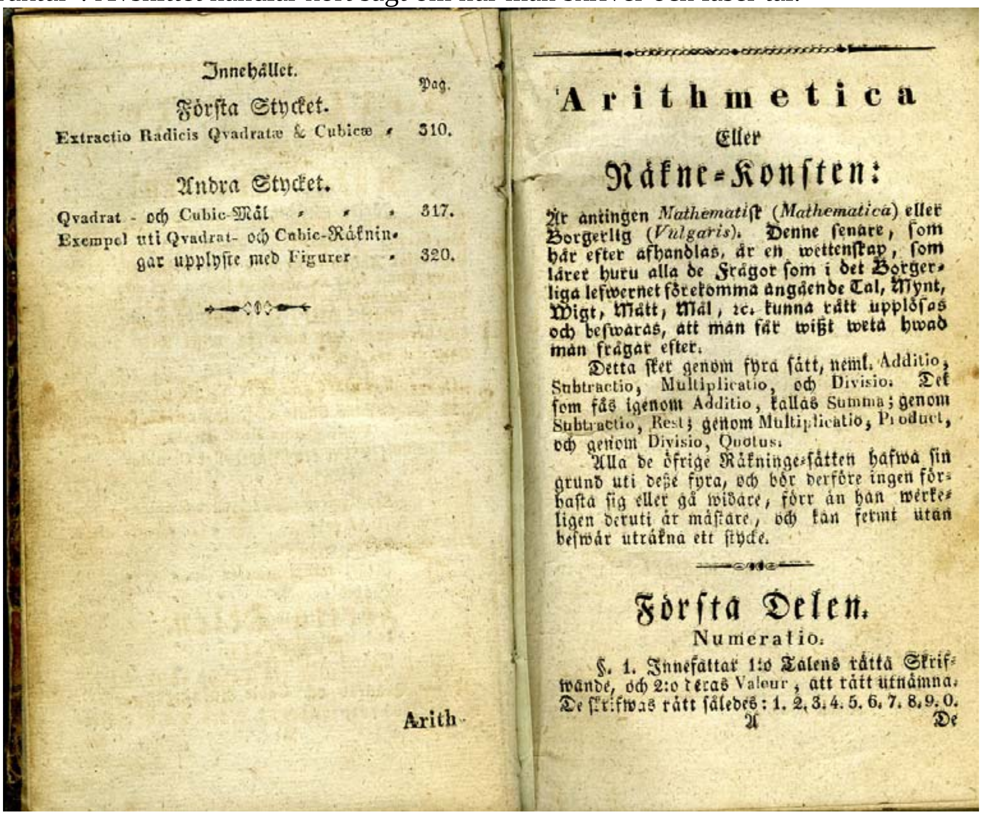
senare områden, vilka i och för sig är intressanta i förhållande till utvecklingen av matematiken som vetenskap, kommer inte att tas upp i redogörelsen som följer.[1]

Även räknelärornas framställningssätt följer en ganska enhetligt mönster. Räknelärorna består huvudsakligen av en kombination av löpande text och kommenterade exempel. Den löpande texten har ofta formen av "reglor" som beskriver räknekonstens algoritmer. Reglorna är i sin tur olika beroende på den uppgift som skall lösas, och i räknelärorna talas därför om olika "förändringar" eller "händelser", som beskriver hur olika fall skall hanteras.[2] De flesta räkneläror innehåller dessutom tabeller, till exempel gångertabellen.

Numeratio

Anderssons räknelära inleds med en kort förklaring av bokens ämne, vilket han kallar "den borgerliga räknekonsten".[3] Syftet med denna konst är, skriver Andersson, att besvara de frågor som uppstår i "det borgerliga lefwernet".[4] Den bygger på de fyra räknesätten och man kommer ingen vart i denna konst, fortsätter han, om man inte börjar med att lära sig att "fermt och utan besvär" använda dem.[5]

Efter denna inledning följer ett avsnitt med titeln "Numeratio".[6] Denna rubrik, liksom avsnittets innehåll, följer hos Andersson den mall som är typisk för de svenska räknelärorna. Här beskrivs hur det man senare ofta kallat *talsystemet* är uppbyggt. Typiskt för räknelärorna är att framställningen har ett uteslutande praktiskt syfte, vilket kan kontrasteras mot till exempel att på ett stringent sätt beskriva talsystemets "struktur". Avsnittet handlar kort sagt om hur man skriver och läser tal.


Innehållet.

	Pag.
Första Stycket.	
Extractio Radicis Qvadratæ & Cubicæ	310.
Andra Stycket.	
Qvadrat- och Cubic-Mål	317.
Exempel uti Qvadrat- och Cubic-Räkningar upplyste med Figurer	320.

Arith

Arithmetica
Eller
Räkne-Konsten:

Är antingen Mathematisk (*Mathematica*) eller Borgerlig (*Vulgaris*). Denne senare, som här efter afhandlas, är en wettenskap, som lärer huru alla de Frågor som i det Borgerliga lefwernet förekomma angående Tal, Mynt, Wigt, Mått, Mål, &c. kunna rätt upplösas och beswaras, att man får wißt weta hwad man frågar efter.

Detta sker genom fyra sätt, neml. Additio, Subtractio, Multiplicatio, och Divisio. Det som fås igenom Additio, kallas Summa; genom Subtractio, Rest; genom Multiplicatio, Product, och genom Divisio, Quotus.

Alla de öfrige Räknings-sätten hafwa sin grund uti deße fyra, och bör derföre ingen förhasta sig eller gå widare, förr än han werkeligen deruti är mästare, och kan fermt utan beswär uträkna ett stycke.

Första Delen.
Numeratio.

§. 1. Innefattar 1:o Talens rätta Skrifwande, och 2:o deras Valeur, att rätt utnämna. De skrifwas rätt således: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0.

A De

Figur 1. Efter innehållsförteckningen i Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica* följer en kort inledning. Här kan man läsa att bokens ämne är den "Borgerliga" räknekonsten, vilket är en vetenskap som "lärer huru alla de frågor som i det Borgerliga lefwernet förekomma angående Tal, Mynt, Wigt, Mått, Mål, etc. unna rätt upplösas och besf-

[1] Många räkneläror innehåller dessutom *övningsuppgifter*. Även dessa betraktar jag som externa i förhållande till min idealtypiska räknekonst. Frågan är emellertid komplicerad. *Exempel*, och även okommenterade exempel, utgör en integrerad del av räknelärornas innehåll. Skillnaden mellan dessa exempel och övningsuppgifterna är att exemplen syftade till att å ena sidan illustrera och komplettera den löpande texten, å andra sidan till att låta läsaren *pröva om han förstått*. Detta är något annat än att öva. Typiskt för räknelärorna, så som jag förstår dem, är att övandet lämnades åt läsaren att sköta på egen hand. Se nedan s. 37.**Error! Reference source not found.Error! Reference source not found.**

[2] Se nedan s. 27.

[3] Andersson, *Arithmetica Tironica*, 1.

[4] Ibid.

[5] Ibid.

[6] Ibid.

waras". Andersson förklarar att denna räknekonst bygger på de fyra räknesätten, och att man inte bör "förhasta sig" och gå vidare förrän man "fermt och utan besfwär" kan hantera dessa.[1]

Andersson skriver att Numeratio innefattar "Talens rätta Skrifwande" och att "rätt utnämna" deras "Valeur", och fortsätter:

> De skrifwas således: 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9. 0. De första Nio kallas Numeri Significativi, eller betydlige tal, emedan de hwar för sig hafwa något att betyda s. s. 1 betyder ett, 2 betyder tu, 3 tre, etc. Men den tionde kallas nulla, eller Numerus non Significativus d. ä. obetydligt Tal, emedan det i och för sig sjelft intet betyder.[2]

Sedan beskriver Andersson hur siffrornas värde bestäms av hur många nollor de har till höger om sig: "när de betraktas ifrån högre till wänstra handen", förklara han, så "anses den första för så stor som hon i sig sjelf är, den andra tio gånger större än hon är, och så widare, så att de efter sina rum få sin valeur".[3]

Inledningen innehåller, karaktäristiskt för räknelärorna, ett antal exempel som kompletterar den löpande texten. Något som troligtvis skulle förvåna en nutida läsare är att Andersson redan på bokens första sidor använder extremt stora tal som exempel. Talen fyller här emellertid en helt annan funktion än talen i de övningsuppgifter vi idag är vana vid. Låt mig säga något kort om detta.

Under andra halvan av 1800-talet började man mer allmänt i Sverige betrakta matematiska kunskaper i termer av "talbegrepp".[4] Man menade att riktiga talbegrepp bara kunde formas genom en långsam "utveckling" inom eleven. För att denna utveckling skulle förlöpa på ett bra sätt krävdes, menade man, idogt övande. Väsentligt i sammanhanget är att man fäste stor vikt vid att övningarnas föremål så att säga speglade hur väl utvecklade elevernas talbegrepp var vid en given tidpunkt. Ett föga utvecklat talbegrepp kunde bara utvecklas genom övning med små tal, medan ett mer utvecklat talbegrepp krävde större tal för att manas till ytterligare utveckling. Detta synsätt hängde samman med att undervisning i räkning vid denna tid blivit något för barn.

Inom räknekonsten framstår tal tvärtom snarast som i sig meningslösa sammanställningar av siffror. Huruvida talen kan "begripas" saknar här betydelse. Vad som är viktigt är att talen kan bemästras i en instrumentell bemärkelse, genom de många regler som räknekonsten innehåller. I det inledande avsnittet i Anderssons räknelära handlade det mer specifikt om att kunna skriva och benämna dem. Givet detta syfte hade de stora talen den fördelen att de satte reglerna på prov. Andersson skriver:

> Det står och utnämnes således:
> 744,345,376,932,186,216,739: det är 744 Trillioner, 345 Tusen 376 Billioner, 932 Tusende 186 Millioner, 216 Tusen 739.[5]

Om man hänger med på utläsandet av detta tal, tycks tanken vara, då har man sannolikt förstått hur det hela skall gå till. Som ytterligare illustration till räknelärornas praktiska syfte kan nämnas att Andersson i detta inledande avsnitt även tar upp ett särskilt sätt att skriva och utnämna tal, nämligen med hjälp av sorten "Tunnor Guld".[6] Med "Tunnor Guld" avses, förklarar Andersson, "hundrade gånger Tusende Daler Silfwermynt", och detta skrivsätt kan därför endast användas då talet betecknar en viss mängd "Daler Silfvermynt".[7] Han ger följande exempel:

> 4,668,312,546,731,45,682. Det är: 4 Billioner, 668 Tusen 312 Millioner 546 Tusen 731 Tunnor Guld 45 Tusen 682.[8]

---

[1] Ibid.
[2] Ibid., 2.
[3] Ibid., 2-3.
[4] Skiftande innebörder tillskrevs denna term. En specifik innebörd knuten till något som kallades "talsortsmetoden" hade talbegreppe i *Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande. Räkning.*, (Stockholm: Kongl. boktryckeriet, 1887). En mer allmän innebörd togs för given av Fredrik Sandberg i hans Fredrik Sandberg, *Småskolans metodik i kort sammandrag för småskolelärarinne-seminarier* (Stockholm: A. V. Carlsons förlag, 1869).
[5] Andersson, *Arithmetica Tironica*, 4. Om det fanns en tävling i stora tal skulle ändå Johan Gräns, som författade den sista svenska räkneläran, vinna. Han ägnar en hel sida åt utnämnande av stora tal. Han föreslår att man, "om et Tal möjligtwis kunde stiga så högt", skall sätta en punkt ovanför den siffra som står för en miljon, två över siffran som står för en billion, tre för trillion, fyra för kvadrillion, och ger som exempel talet 21,222,364,567,890,123,456,799,658,005. Gräns, *Underwisning uti Räknekonsten*, 5.
[6] Andersson, *Arithmetica Tironica*, 4.
[7] Ibid.
[8] Ibid.

Här skall alltså alla siffror till vänster om ",45," förstås som räknande "Tunnor Guld", medan "45,682" syftar på "Daler Silvermynt".[1] Att man skrev tal på detta sätt är en kuriositet. Det väsentliga är den plats detta skrivsätt intar i Anderssons framställning, nämligen i avsnittet "Numeratio", bredvid beskrivningen av siffrorna och talsystemet. Detta visar att det för honom inte var fråga om att beskriva en abstrakt systematisk teori, utan om att beskriva en viss grundläggande aspekt av räknekonsten, nämligen hur man använder siffror och utläser tal.

De fyra räknesätten i hela tal

Karaktäristiskt för räknelärornas redogörelse för addition, subtraktion, division och multiplikation är att de tar fasta på hur man *gör* när man räknar. De beskriver, kan man säga, algoritmer, mer eller mindre explicit i termer av ett antal regler. Andersson beskriver addition på följande sätt:

> Summorne uppställas så, att den första Siffran till höger i hwardera ställes under hwarannan: sedan börjar man wid höger att antingen uppföre eller nedföre lägga den ena Siffran till den andra, tills man gåt alla i första rummet igenom, då Summan skrifwes under linien. Sammanledes gör man med den andra, tredje, fjerde raden etc. såsom: [...][2]

Varpå följer ett kort exempel, med bifogad redogörelse för de operationer som krävs för dess uträknande ("Säg således: 2 och 1 är 3, och 6 dertill är 9. Skrif detta 9 under linien [...]" osv).[3] Dessa beskrivningar av räknekonstens algoritmer utgjorde en del av räknelärorna som var relativt konstant över tid. Detta kan illustreras av en jämförelse mellan den ovanstående beskrivningen och den som finns i Agrelius *Institutiones Arithmetica*, vilken alltså publicerades redan 1655:

> Här uti Additione, som de öfriga tre Species, skola talen emot högre handen sålunda upskriwas, at ett under ett, (det är första Talet mot höger under det första wid samma hand,) tio under tio, hundrade underhundrade, etc. skrefne warda: Sedan de sålunda äro satte och stälde, dragas under alla Talen en Linea: Sist begynner man addera ifrån högre handen: Facit eller Summan skrifwes under Linien, rätt under den Rad, af hwilken hon (igenom Additionen) består.[4]

Förutom språkliga skillnader är beskrivningarna mycket lika varandra. Låt mig nu återgå till min redogörelse för Andressons *Arithmetica Tironica*. Liksom i avsnittet "Numeratio" tvekar Andersson inte för att, direkt efter den ovanstående beskrivningen av additionsalgoritmen, ge sig på tämligen svårhanterliga exempel. De är emellertid noga kommenterade, vilket innebär att läsaren antingen kunde använde dem som en konkretisering av den löpande texten, eller, om han så önskade, använda dem för att pröva sin egen förmåga. Till saken hör att avsnittet om addition av hela tal endast sträcker sig över 5 sidor. Anderssons framställning är tämligen koncis och exemplen samspelar med den löpande texten för att på litet utrymme förklara hur man gör när man adderar.

Beskrivningen av de fyra räknesätten hade i räknelärorna ett dubbelt syfte. Framför allt syftade den till att lägga en grund för de mer sammansatta tekniker som presenteras senare. Det var dessa som kunde användas för att lösa de "realistiska" problem som utgör räknelärornas huvudsak. Räknesättet Regula de Tri, som jag snart skall komma till, utgjorde räknekonstens motor. Den som räknade behövde behärska de fyra räknesätten – och mer därtill – för att, så att säga, denna motor skulle fungera. Först i andra hand presenteras de fyra räknesätten som tekniker användbara i sig själva. Detta visar på det viktiga faktum att räknelärorna i allmänhet inte ägnade något större utrymme åt *enkla* problem. Sådana problem diskuterades snarast i ett didaktiskt syfte – för att illustrera en poäng i den löpande texten. Ytterligare ett skäl kunde att vara att, som Andersson gör, ge ett exempel på addition för att visa "till hwad nytta" detta räknesätt kunde vara.[5] Karaktäristiskt för Anderssons framställning är att alla hans exempel, även det mycket enkla exempel han ger på addition i hela tal, är realistiska i den bemärkelsen att de är tänkbara som beskrivningar av en uträkning som faktiskt kunde ägt rum. Ovan hänvisade jag till Agrelius för att visa hur en aspekt av räknelärorna varit konstant över tid. Angående exemplen kan Agrelius användas för att illustrera hur räknelärorna innefattade en viss spännvidd vad gäller framställningssättet. Agrelius var friare än

[1] Om det var brukligt att på något sätt markera att talet skulle förstås på detta särskilda sätt framgår inte.
[2] Andersson, *Arithmetica Tironica*, 5.
[3] Givetvis förklarar Andersson även hur "minnessiffran" skall hanteras, etc.
[4] Agrelius, *Institutiones arithmeticae*, 7.
[5] Andersson, *Arithmetica Tironica*, 7.

Andresson i sin exempelkonstruktion. Hans exempel kan ofta snarare ses som *illustrationer* av räknekonstens algoritmer, än som verklighetstrogna beskrivningar av algoritmernas användning.[1] Följande exempel hos Agrelius är typiskt i detta avseende:

> Item. Från år 1550 in til 1586 hafwa Papisterna mördat, brändt och ihjälslagit några, uti åtskillige Länder, derföre at de Påfwiska Läran ej wille emottaga:[2]

Furstliga Personer	49
Grefwar	148
Friherrar	235
Adeliga Personer	147518
Gement Folk	700060
hwad är Summan?	Facit 848010

Typiskt för räknelärorna är att stor plats ägnas åt en rad "specialfall". För att återgå till Andersson, diskuterar han till exempel på särskild plats hur förekomster av siffrorna noll och ett i de tal som skall behandlas kan utnyttjas för att snabba upp uträkningarna. Till skillnad från när det gäller minnessiffran i addition, och "lån" i subtraktion, syftar jag här på situationer som i princip *kan* hanteras med hjälp av de generella reglerna. Vad Andersson gör är emellertid att presentera praktiska genvägar, eller med andra ord tekniker för hur specialfall kan utnyttjas för att effektivisera det praktiska räknandet. Ett enkelt exempel är konstaterandet att man, vid multiplikation med ett, helt enkelt skriver av talet som skall multipliceras. Av samma slag är konstaterandet att om två tal skall divideras vilka båda har "nollor i ändan", så "få utstrykas lika många af bägge, hwilka således utstrukna nollor icke upptagas uti bråket".[3]

Karaktäristiskt för räknelärorna är också att Anderssons avsnitt om de fyra räknesätten avslutas med "probor", det vill säga tekniker med vars hjälp man kan kontrollera om man räknat rätt.
Slutligen kan sägas att de tecken vi idag förknippar med de fyra räknesätten (+, =, etc) inte nödvändigtvis användes i räknelärorna. Varken Agrelius eller Andersson använde dem. Frånvaron av räknetecken, tillsammans med frånvaron av algebra, utgör ett av räknekonstens kännetecken. Räknelärornas uppställningar är uteslutande praktiska, det görs i dem ingen skillnad mellan sättet att *utföra* beräkningarna, och sättet att *representera* dem. Räknekonsten var en väg mellan två punkter, mellan indata och utdata.

De fyra räknesätten i blandade tal

Efter de fyra räknesätten i "enkla" tal, följer hos Andersson de fyra räknesätten i "sammanblandade" tal, det vill säga tal med, som det heter idag, olika "enheter" (kronor, meter, liter, etc). Ett riktigt hanterande av sådana tal, enligt räknekonstens alla regler, kräver egentligen en förmåga att hantera bråk. Bråk och sorter utgör därmed en sammanhängande helhet, och i räknelärorna presenteras de alltid mer eller mindre parallellt. Agrelius har till exempel inget särskilt avsnitt för "blandade tal", utan låter sorterna flyta in i alla typer av beräkningar redan från början i sin bok. Andersson valde emellertid, som nämnts, att börja med själva sorterna, för att sedan fokusera på bråken.

Hanterandet av sorter utgjorde en integrerad och central del av räknekonsten. Sorterna var många: Andersson går på ett uppslag igenom relationerna mellan nästan 60 olika sorter.[4] Man använde olika sorter för mynt, vikt, längd, yta, volym och stycketal, och till detta kom att man använde olika sorter beroende på vilken typ av vara man mätte (torra varor, våta varor, metaller, mm.), samt att det förekom variationer mellan olika delar av landet, både vad gäller sorternas namn, och vad dessa namn stod för.[5]

Det framgår av Anderssons framställning att han inte förväntade sig av läsaren att han skulle lära sig alla sorter utantill. Räknelärorna kunde användas som handböcker för hantering av ovanliga situationer, dels vad gällde relationen mellan olika sorter, men också, vilket skall framgå nedan, för att klargöra vilka lagar och regler som gällde inom något visst område, samt hur konkreta "räknesituationer" kunde hanteras

---

[1] Denna typ av exempel är emellertid likväl, som jag ser det, undantag snarare än regel, även hos Agrelius.
[2] Agrelius, *Institutiones arithmeticae*, 10. Detta exempel ger, liksom många andra hos Agrelius, en intressant inblick i de frågor som stod på agendan i Sverige kring mitten av 1600-talet. Det är svårt att säga om Agrelius hade något allvarligt menat syfte med valet av tema för just detta exempel.
[3] Andersson, *Arithmetica Tironica*, 19.
[4] Till exempel Ducat, Fjerding, Skålpund, Riksdal, Kappa, Lod, Schilling, Kanna. Ibid., 24-25.
[5] Andersson tar upp de särskilda måtten som tydligen användes i Bergslagen.

på ett smidigt sätt. Däremot var vissa sorter så centrala att man var mer eller mindre tvungen att lära sig dem utantill.

Anderssons genomgång av räkning med sammanblandade tal börjar med en förklaring av hur man omvandlar mellan olika sorter. Sedan följer ett kort avsnitt för varje räknesätt, vars huvudsakliga innehåll är kommenterade exempel. Följande stycke är typiskt:

> Talen uppställes här (äfwensom uti addition i Simpla Tal) under hwarannan, de högre sorterna till wänster och de mindre till högre, wharefter man börjar på den minsta sorten addera; och om då summan deraf stiger till så stort Tal, att det någon gång innhåller närmast högre sort, måste det reduceras genom division, alldeles som i nästföregående Capitel lärt är. Således gör man, ock med de andre sorterne, tills man gått em alla igenom. Såsom till exempel [...][1]

Därefter följer ett exempel. Att sorterna var många, och framför allt att relationen mellan dem var komplicerad, var vad som mer än något annat gjorde räknekonsten till något som knappast kunde läras i en handvändning.

De fyra räknesätten i bråk

Att kunna hantera bråk var en förutsättning för att kunna hantera sorter. *Detta är den enda anledningen till att räknelärorna ägnade utrymme åt bråkräkning*, vilket förtjänar att påpekas med tanke på de många andra motiv för bråkräkning som presenterats senare, särskilt sedan det metriska systemet började användas mer allmänt kring sekelskiftet 1900 och det nära bandet mellan bråk och sorter därmed löstes upp. Roloff Anderssons sätt att ta sig an räkning med "Bråk eller Brutna tal", som han kallar det, är fokuserad på vad man kan kalla praktiskt handhavande. Han inleder med ett avsnitt om bråk "i gemen". Detta innehåller först "Numeratio" motsvarande det för hela tal, där han redogör för terminologin och grundläggande egenskaper hos bråken. Sedan följer "Abbreviatio", där Andersson visar hur bråk kan "förkortas".[2] Han skriver att förkortning "mäst" sker med siffrorna 2, 3 och 5, och ger sedan enkla regler för när bråk kan förkortas, nämligen: om de slutar på en jämn siffra (då kan de förkortas med 2), om både täljarens och nämnarens siffersumma blir 3, 6 eller 9 (då kan de förkortas med 3), om både täljare och nämnare slutar på 5 eller 0 (då kan de förkortas med 5).

I fråga om bråkräkningen är Agrelius framställning från 1655 än mer än Anderssons fokuserad på "hur man gör". Hela hans inledning till bråk består av något tiotal regler, bland annat för att förkorta bråk och hitta tals största gemensamma delar. Det samma gäller texten i de följande avsnitten för de respektive räknesätten. Avsnittet om multiplikation i Agrelius' *Institutiones Arithmetica* inleds:

> Regula I. Om enfaldiga Bråk med enfaldiga Bråk multipliceras skola; så multiplicera allenast båda Täljarena och båda Nämnarena tillsammans, så är rätt multiplicerat, antingen Nämnarena äro lika eller olika, hwilket här är lika godt.[3]

Karaktäristiskt för räknelärorna i allmänhet och Anderssons framställning i synnerhet, vad gäller bråk och i övrigt, är att beskrivningen av räknekonstens algoritmer är uppdelad i en mängd fall (vilka Andersson kallar "förändringar" eller "händelser"). Anledningen till detta är inte ovetskap om att räknekonsten utgår från vissa generella principer – ett påpekande som kan tyckas omotiverat, men vars betydelse kommer att framgå i nästa kapitel. Jag tycker mig kunna identifiera två skäl till det ibland till synes pedantiska särskiljandet av olika "fall".

För det första en strävan efter tydlighet. Som exempel på detta kan tas Anderssons sju förändringar för multiplikation av bråk. Han skiljer där på multiplikation mellan:

1. Brutna med Hela
2. Hela och Brutna med Hela
3. Hela med Brutna[4]

---

[1] Andersson, *Arithmetica Tironica*, 32.

[2] Med "Abbrevatio" syftar Andersson på att dividera både bråkets nämnare och täljare med samma tal. Till exempel kan $\frac{8}{16}$ förkortas till $\frac{1}{2}$ genom division med 8.

[3] Agrelius, *Institutiones arithmeticae*, 132.

[4] Andersson förklarar sig: "Denna förändring är egentligen den samma, som den första; men på det ingen discipel må blifwa förwillad, om Bråket står öfwer eller under, har jag äfwen uti sednare fallet welat här införa några exempel, och wisa huru man dem tracterar, nemligen [...]" Andersson, *Arithmetica Tironica*, 65.

4. Brutna med Brutna
5. Hela och Brutna med Brutna
6. Hela med Hela och Brutna
7. Brutna med Hela och Brutna
8. Hela och Brutna med Hela och Brutna

För vart och ett av dessa "fall" visar Andersson med exempel hur räknandet skall ske. Det kan tyckas enkelt att så att säga "översätta" mellan dessa fall, eller kanske än bättre att se dem som tillämpningar av en generell princip. Indelningen utgör emellertid en annan strategi för att förmedla konsten att räkna. Typiskt för räknekonsten är en direkt relation till den teknik som skall utföras. Räkneläran beskriver tämligen exakt vad som skall göras, utan inblandning av "begrepp" eller "teorier". Man kan se det som en "sekventiell" eller "algoritmisk" förståelse av räknande. Räknelärorna innehåller en rik uppsättning olika program eller "recept" för att hantera olika situationer. Räknarens uppgift består i att lära sig recepten (eller lära sig följa dem med hjälp av en bok) och att identifiera vilket recept som är tillämpbart.[1] Detta förhållningssätt kontrasterar skarpt mot en förståelse av matematiken som en uppsättning "begrepp", med vars hjälp verkligheten kan bemästras – ett synsätt jag redogör för nedan, och som kom att genomsyra skolmatematiken.[2]

För det andra syftar indelningen i fall till att i möjligaste mån undvika praktiskt svårhanterliga uträkningar. Väsentligt är att lära sig *identifiera* till vilket "fall" en viss uträkning hör – för att därigenom lösa den på lättast möjliga sätt. Detta syfte blir tydlig i det Andersson skriver om addition och subtraktion som avslutning på hela bråkräkningsavsnittet:

> §. 52. Till beslut på de fyra sätten att räkna (Quator Species) i Bråk eller Brutan Tal, måste jag ärindra, att uti Addition och Subtractio är hufvudsaken, at kunna fermt uppsöka General-Nämnaren, hwilken man wäl kan finna genom en enda Regeln: multiplicera alla Nämnare tillsamman, så är producten General-Nämnare: Men emedan härigenom förorsakas en widlyftig operation, måste man alltid beflita sig om den minsta General-Nämnaren, till hwilkens finnande nödwändigt fordras de 5 Förändringar, som uti Bråken finnas tecknade.[3]

Andersson observerar alltså att det å ena sidan finns en *generell princip* som alltid kan följas, men att denna leder till "widlyftiga" uträkningar, och av denna anledning har han delat in uträkningarna i fem "förändringar" vilka kan användas för att hålla operationerna hanterliga.

Regula de Tri

Såväl räkning med hela tal och sorter som bråkräkning utgör i räknelärorna snarast en förberedelse till den generella teknik för lösning av praktiska problem vilken gick under namnet Regula de Tri. Regula de Tri, skriver Andersson, "lärer huru man till trenne gifna Tal skall söka och finna det fjerde".[4] För att Regula de Tri skall vara tillämpbar måste vissa villkor vara uppfyllda. Dessa villkor kan enkelt förklaras med hjälp av algebra. Anderson använder emellertid inte algebra, och detta är ett av räknekonstens kännetecken. Signifikativt är att Andersson istället börjar med en *regel*. Han skriver:

> Sjelfwa Regeln är denna: Multiplicera det andra Talet genom de tredje, och det productum integrum då fås dividera med det första.[5]

Sedan förklarar han vad regeln kan användas till i fyra punkter, vilka knappast kan mäta sig med algebran vad gäller tydlighet. Vad vi idag kanske skulle kalla "den matematiska principen" är sammanvävd med hur den kan komma till nytta inom räknekonsten. Budskapet framgår emellertid, inte minst genom ett

---

[1] För övrigt en syn på matematiken som stämmer mycket bra med Wittgensteins så som han presenterar den i Ludwig Wittgenstein och Georg Henrik von Wright, *Remarks on the foundations of mathematics: Bemerkungen über die Gründlagen der Mathematik* (Oxford: Blackwell, 1956).

[2] Givetvis är det lätt att se brister i räknelärornas sätt att presentera räknekonsten. En viktig poäng i den här avhandlingen är emellertid att skolmatematikens "lösning" på det problem som förmedling av förmågan att räkna utgör, nämligen att basera den på formerande av "matematiska begrepp", knappast kan sägas ha varit mer framgångsrik än räknelärornas framställningar baserade på "recept".

[3] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 75-76.

[4] Ibid., 78.

[5] Ibid.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

insprängt exempel: "När 2 ger 4, hwad ger då 16? Sw. 32", tillsammans med följande förklarande kommentar:

> Emedan 4 i andra rummet är dubbelt så stort som 2 i första rummet, måste det som sökes wara dubbelt så stort som 16 i tredje rummet. Eller, emedan 2 är 1/8 af 16, måste 4 wara 1/8 af det jag söker; så att till följe häraf det fjerde talet straxt skulle kunna tagas, om möjligt wore, att uti alla exempel genast se rätta proportionalen ; men som detta uti större tal, i synnerhet irrationala, eller då frågan är om flere sorter, större och mindre, icke låter sig göra, måste efter förenämnde Regel det fjerde Proportional-Talet sökas.[1]

Regeln som sådan är med andra ord motiverad, eftersom en mängd frågor är så komplexa att man inte genast kan "se" det rätta svaret.

Att tala om Regula de Tri som en "regel" är egentligen missvisande. Snarare handlar det om ett i viss mån generellt system av handgrepp vilka, genom att kombineras på olika sätt, kunde användas till att besvara en mängd olika frågor. Regula de Tri utgör, kan man säga, räknekonstens motor – den är en sorts apparat med vars hjälp givna data och förutsättningar omvandlas till ett svar, som alltid är ett enskilt *tal*, nästan alltid uttryckt i en kombination av sorter.[2]

I matematiska termer kan man säga att Regula de Tri löser problem där det föreligger proportionalitet. Den enklaste situationen är att det finns fyra tal, a, b, c och d för vilka gäller att $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, där tre av talen är kända och det fjärde efterfrågas. Så är det i Anderssons exempel. Genom att sätta $a = 2$, $b = 4$ och $c = 16$, kan det passas in i den algebraiska formeln, av vilken följer att $d = 32$. Precis som Andersson säger är emellertid detta exempel så enkelt att någon "regel" knappast är behövlig. De fall som Andersson behandlar är betydligt mer komplicerade. Svårigheter kan tillkomma genom att fler än fyra tal ingår i frågan. Framför allt tillkommer emellertid svårigheter i och med att talen alltid är uttryckta i *sorter*.

Väsentligt är att så gott som alla frågor, bortsett från de allra mest triviala, inom räknekonstens besvaras med hjälp av Regula de Tri. Detta även om det som skall göras "bara" är att multiplicera eller dividera två tal med varandra. Man börjar alltid med att "ställa upp" talen i vad man kallade deras respektive "rum". Rummen åtskildes ofta av kolon – enkelt kolon mellan första och andra rummet, dubbelkolon mellan andra och tredje, samt enkelt kolon mellan det tredje och fjärde rummet, dvs

första rummet : andra rummet :: tredje rummet : fjärde rummet

Roloff Andersson skrev emellertid av någon anledning istället

första rummet – andra rummet = tredje rummet – fjärde rummet

Det som ser ut som minus- och likhetstecken har alltså här en helt annan innebörd.

Att ställa upp talen på rätt sätt utgjorde i själva verket, enligt flera författare, räknekonstens svåraste moment. Det motsvarade vad vi idag skulle kalla att avgöra "vilket räknesätt" som var tillämpligt. När talen väl var uppställda återstod bara att följa räknekonstens regler. Jag skall strax ge ett par exempel på hur detta i praktiken kunde gå till.

Först skall jag emellertid beskriva en särskild teknik för hantering av Regula de Tri-tal, som i räkneläorna kallas *Praxis Italica*. Dess syfte var att hantera de rent räknetekniska svårigheter som ofta uppstod på grund av att talen var stora och sorterna stod i komplicerade förhållanden till varandra. Hade man otur var inga förkortande genvägar tillämpliga – då återstod inget annat än att ta itu med vad Andersson ofta kallar "widlyftiga" uträkningar. Praxis Italica var ett generellt hjälpmedel för att i möjligaste mån hantera sådana uträkningar.

Praxis Italica

Redan på den 6:e av de 21 sidor som hans "Inledning till Regula de Tri" upptar, introducerar Andersson Praxis Italica. Detta är en princip för att hantera sorter. Agrelius skriver att Praxis Italica är "ett härlig och konstrikt Compendium Regulæ Aureæ, förmedelst hwilket man kan undwika mycken widlöftighet, och

---

[1] Ibid., 79. Man undrar vad Andersson menar med "irrationala" tal. *Irrationella* tal, i den vetenskapliga matematikens mening, har ingen plats i Anderssons följande redogörelse för regula de tri.
[2] Till exempel för pengar: 595 Riksdaler 24 Schillingar 4 Runstenar 4 Penningar,

med fast ringa omak och beswär, utreda Frågorna, ehuru intricate de hälst synas".[1] Andersson är mer *down to earth* i sin beskrivning, och jag skall använda den som utgångspunkt för en förklaring av vad Praxis Italica innebär.

Den i teorin enklaste principen för att hantera sorter är att reducera alla tal till den minsta i frågan förekommande sorten, sedan genomföra alla beräkningar, och slutligen förkorta (tillbaka) till större sorter. Andersson ger följande exempel: Antag att ett Skålpund av en viss vara kostar 3 Riksdaler och 24 Schillingar. Vad kostar då 8 Skålpund? Detta motsvarar i termer av Regula de Tri att vi "i andra rummet" har 3 Riksdaler och 24 Schillingar och i det tredje har 8 Skålpund, vilket i algebraisk notation motsvarar ekvationen:

$$\frac{1}{3 \text{ Riksdaler } 24 \text{ Schillingar}} = \frac{8 \text{ Skålpund}}{x}$$

Här skulle man kunna uttrycka de 3 Riksdalerna i den mindre sorten Schillingar (1 Riksdaler = 48 Schillingar), vilket ger 168 Schillingar i den första nämnaren och multiplicera detta med 8, vilket ger 1344 Schillingar. Detta belopp måste sedan förkortas till riksdaler genom att divideras med 48, vilket slutligen ger 28 riksdaler som svar.

Praxis Italica går ut på att man istället för att uttrycka alla storheter i termer av den minsta sorten, genom hela talet räknar i delar (i "part") av den största. I detta exempel skulle man därmed, istället för att uttrycka de 3 Riksdalerna till Schillingar, utnyttja att 24 Schillingar är en halv riksdaler. Detta ger uträkningen

$$8 * 3 \text{ Riksdaler} + 8 * \frac{1}{2} \text{ Riksdaler} = 28 \text{ Riksdaler}$$

det vill säga, man slipper det "stora" mellanledet uttryckt i den mindre sorten, samtidigt som man slipper den avslutande förkortningen: "Och hwem finner icke, att detta sättet medförer mindre möda", frågar sig Andersson.[2]

Emellertid kräver uppenbarligen Praxis Italica ett gott handlag med bråk. Andersson skriver: "[För att] wäl och fort kunna practice räkna, fordras":

> 1:o Att fermt multiplicera sammanblandade Tal, så att man kan till exempel säga: 7 gånger 14 Schillingar är 98 eller 2 Riksdaler och 2 Schillingar, utan att räkna det afsides med griffel.
>
> 2:o Att wäl dividera in mente (i tankarna) med ett Tal, så wäl sammanblandade som simpla Tal.
>
> 3:o Att följa en wiss och säker methode, så att i händelse man räknar felaktigt, man wisst wet att felet icke består i sättet, utan i Talen.[3]

Den förmåga Andersson beskriver här involverar dels en förmåga att snabbt och säkert tillämpa räknekonstens algoritmer, dels en förmåga att komma ihåg och dra sig till minnes fakta rörande sorter. Båda dessa förmågor var centrala för ett behärskande av räknekonsten.

Karaktäristiskt är att räknelärorna är fyllda med olika typer av hjälpmedel för praktiskt räknande. Reglerna kan ses som sådana hjälpmedel, liksom gångertabellen och tabeller som beskriver sorternas förhållanden till varandra. I avsnittet om Praxis Italica presenterar Andersson ytterligare ett antal tabeller, vars syfte är att underlätta "tagandet i part". Först en "Tabula Multiplicationis Major", multiplikationstabellen från 11 till 20 (vilken givetvis samtidigt är en divisionstabell). Sedan en "Tabula Reductionis", som visar hur 1-9 Schillingar omvandlas till Runstenar (1 Schillingar = 12 Runstenar) samt hur 1-9 Riksdaler omvandlas till Schillingar (1 RB = 48 Sch) enligt följande:[4]

[1] Agrelius, *Institutiones arithmeticae*, 214.
[2] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 83.
[3] Ibid. Det Andersson menar är alltså att man, om man ser att man fått fel svar, måste vara säker på att detta beror på att man helt enkelt *räknat fel*, och att felet inte ligger i att man missförstått hur algoritmerna man använder fungerar – säg, glömt bort hur man hanterar lån i subtraktion, etc.
[4] Ibid., 85. "rst" är en förkortning av Runstenar, "Sch" står för Schillingar och "RB" står för Riksdaler.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

12 rst	=	1 Sch	48 Sch	=	1 RB
24	=	2	96	=	2
36	=	3	144	=	3
48	=	4	192	=	4
60	=	5	240	=	5
72	=	6	288	=	6
84	=	7	336	=	7
96	=	8	384	=	8
108	=	9	432	=	9

Om denna skriver Andersson

> Nyttan af denna Tabell wisar sig straxt uti Regula di Tri, der sammanblandade Tal merändels i alla Exempel antingen multipliceras eller divideras, eller ock begge tillika; och emedan man, så ofta görligt är, så lagar, att man ej har mer än en siffra att multiplicera eller dividera med, som i det högsta är 9, kan man genom tillhjelp af denna Tabula, sedan den är wäl fästad i minnet och lärd utantill, reducera i tankarna, och således långt fortare, än om man hwarje gång skulle göra det afsides med en griffel.[1]

Slutligen presenterar Andersson ett antal "Tabulae Practicales" vilka anger hur ett visst antal av en mindre sort kan beskrivas som en summa av delar av den närmast större sorten.[2] Dessa tabeller skulle man lära sig utantill, och de utgjorde tämligen intrikata hjälpmedel för hanteringen av sorter enligt Praxis Italica.[3] Praxis Italica är ett redskap för att, med de till buds stående medlen, dvs huvudet och en griffel, lösa den typ av räkneproblem som faktiskt uppkom i praktiken. Algoritmerna, tabellerna och reglerna hänger samman på ett systematiskt sätt. Tas någon av dem bort, blir de övriga tämligen oanvändbara. Man har ingen praktisk nytta av addition och subtraktion av bråk, om man inte kan hantera de många sorterna. Kunskap om omvandling mellan sorter är inte praktisk användbar utan praktisk färdighet i att kunna multiplicera och addera. Och så vidare.

Tillämpningar av Regula de Tri

Såväl Roloff Anderssons, som alla andra räkneläror, avslutas med en lång rad "tillämpningar" av Regula de Tri. Dessa utgjorde räknelärornas huvudsak. Johan Gräns, som var en av de sista svenskar som författade en räknelära relativt trogen räkneläran som genre, beskriver i sin räknelära dessa räknesätt på följande sätt:

> Genom Regula de Tri upplösas en oändelig mängd af frågor, som upstå i Handel och allmänna lefwernet. [...] Af de flere **händelser** til hwilka denna Regel lämpas, upkomma de flere namn eller titlar under hwilka den utöfwas. Namnen härleda sig från sjelwa räkningens egenskap, men icke från räknesättet, som i hwad händelse som hälst proportionalitet blir detsamma. Således förekommer at lära **Intresse-Räkning, Rabatt-Räkning, Thara-, Bytes-** och **Wrak-Räkning, Winst-** och **Förlust-Räkning, Sällskaps-Räkning m. m.** Och ehuru olika upgifterna til sin natur kuna wara, komma de dock deri öfwerens, at de alla kunna uplösas genom Regula de Tri.[4]

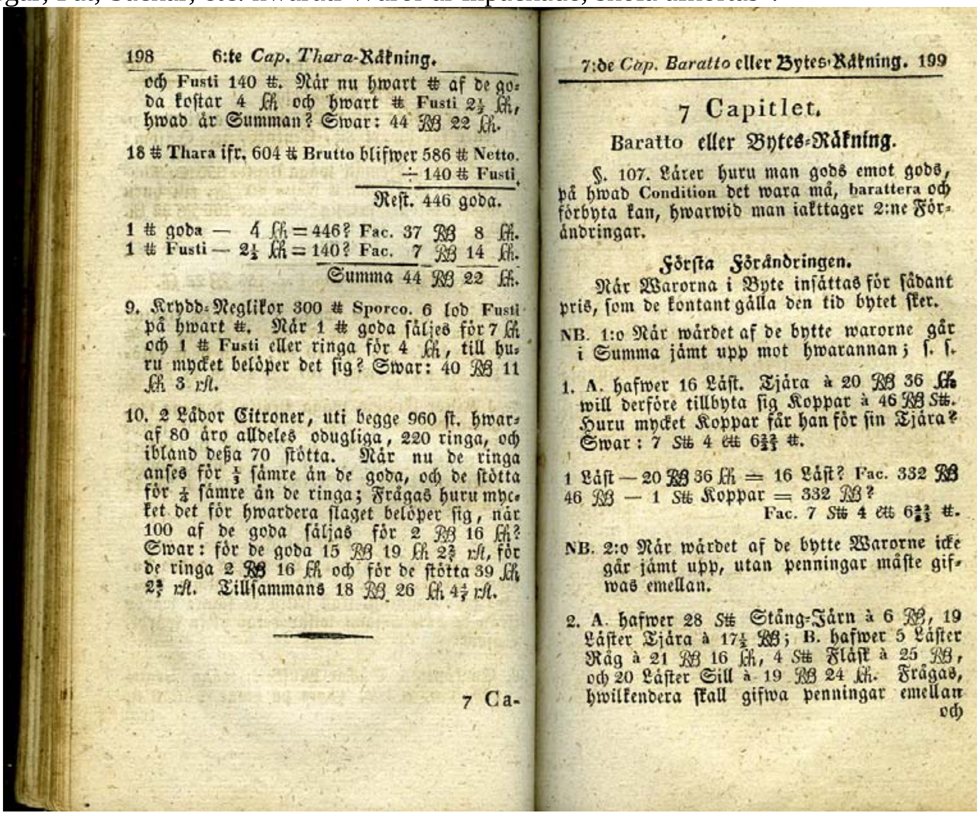
Räknesättens namn låter oss i många fall – men inte alltid – ana vilken typ av uträkningar det är fråga om. Avsnitten är utformade som recept. De inleds med en kort förklaring av när räknesättet är tillämpbart. Sedan följer löpande text och kommenterade exempel vilka beskriver "räknesättets" användning. Till

[1] Ibid.
[2] Att använda denna tabell utgjorde i själva verket såväl den stora fördelen, som den stora svårigheten, med Praxis Italica.
[3] I avsnittet om Praxis Italica blir det tydligt hur Agrelius och Anderssons framställningssätt skiljer sig åt. Andersson har betydligt mer löpande text än Agrelius. Agrelius låter tvärtom sin framställning kretsa kring kommenterade exempel. Andersson presenterar ofta sitt material i form av tabeller. För att förklara Praxis Italica använder Agrelius istället ett grafiskt tämligen intrikat sätt att redovisa hur uträkningarna i praktiken går till.
[4] Gräns, *Underwisning uti Räknekonsten*, 148. I innehållsförteckningen till Anderssons räknelära nämns följande räknesätt: Regula Qvæstionis Inversa, Regula Dupla Directa & Regula Dupla Inversa, Intresse-Räkning, Rabatt-Räkning, Terminers Reduction, Thara-Räkning, Baratto-eller Bytes-Räkning, Winst och Förlust, Commissions-Räkning, Regula Societatis, Om Arf-Delning, Fatorie- eller Factors-Räkning, Skepps-Parters Räkning, Hafverie- eller Sjö-Skadas Räkning & Assecurance-Räkning, Falisements- eller Banqueroute-Räkning, Regula Alligationis, Beskickningsräkningar i guld, silver och tenn, Regula Falsi, Regula Cæsis eller Virginum, Cambio-Conto eller Wäxelräkning. Till dessa kommer en rad särskilda "fall" med eget namn, som inte fått plats i innehållsförteckningen.

exempel är "Regula Qvaestionis Inversa" en regel för att hantera frågor om "sådana ting, af hwilka Mindre fordrar Mera, och Mera fordrar Mindre, och således tyckes wara stridande mot Regula de Tri Directa".[1] Ett långt avsnitt i Anderssons räknelära handlar om "Intresse-räkning", det vill säga olika typer av ränteberäkningar.

Det tolfte kapitlet i Anderssons räknelära sträcker sig över arton sidor och handlar om "Beskicknings-Räkningar uti Guld, Silfwer och Tenn". Här blir det särskilt tydligt att huvudsaken i denna bok inte är "matematik" så som detta ord används idag. Avsnittet är tvärtom tydligen tänkt att fungera som en handbok för beskickning (dvs en handbok i sammansmältning av metaller för produktion av mynt). I ett flertal tabeller redogör Andersson för de olika myntslagens innehåll av olika metaller och de processer genom vilka man förändrar dessa halter. *En* aspekt av dessa processer utgörs av aritmetiska operationer, men Anderssons redogörelse för själva manipulationerna av tal – enligt Regula de Tri – tar här betydligt mindre plats än beskrivningen av allt det andra som måste kännas till för att dessa manipulationer skall vara möjliga att utföra.

Uppslaget i Anderssons räknelära nedan ger en känsla för vilken typ av frågor som räknesätten besvarade. Till vänster syns sista sidan på kapitlet om "Thara-Räkning", vilken "Lärer hur många skålpund för korgar, Fat, Säckar, etc. hwaruti Waror är inpackade, skola afkortas".[2]



198 6:te Cap. Thara-Räkning.

och Fusti 140 #. När nu hwart # af de goda kostar 4 sk och hwart # Fusti 2½ sk, hwad är Summan? Swar: 44 Rb 22 sk.

18 # Thara ifr. 604 # Brutto blifwer 586 # Netto.
÷ 140 # Fusti
Rest. 446 goda.

1 # goda — 4 sk = 446? Fac. 37 Rb 8 sk.
1 # Fusti — 2½ sk = 140? Fac. 7 Rb 14 sk.
Summa 44 Rb 22 sk.

9. Krydd-Neglikor 300 # Sporco. 6 lod Fusti på hwart #. När 1 # goda säljes för 7 sk och 1 # Fusti eller ringa för 4 sk, till huru mycket belöper det sig? Swar: 40 Rb 11 sk 3 rst.

10. 2 Lådor Citroner, uti begge 960 st. hwaraf 80 äro alldeles odugliga, 220 ringa, och ibland dessa 70 stötta. När nu de ringa anses för ⅓ sämre än de goda, och de stötta för ¼ sämre än de ringa; Frågas huru mycket det för hwardera slaget belöper sig, när 100 af de goda säljas för 2 Rb 16 sk? Swar: för de goda 15 Rb 19 sk 2⅔ rst, för de ringa 2 Rb 16 sk och för de stötta 39 sk 2⅔ rst. Tillsammans 18 Rb 26 sk 4⅓ rst.

7 Ca-

7:de Cap. Baratto eller Bytes-Räkning. 199

7 Capitlet.

Baratto eller Bytes-Räkning.

§. 107. Lärer huru man gods emot gods, på hwad Condition det wara må, barattera och förbyta kan, hwarwid man iakttager 2:ne Förändringar.

Första Förändringen.

När Warorna i Byte insättas för sådant pris, som de kontant gälla den tid bytet sker.

NB. 1:o När wärdet af de bytte warorne går i Summa jämt upp mot hwarannan; s. s.

1. A. hafwer 16 Läst. Tjära à 20 Rb 36 sk will derföre tillbyta sig Koppar à 46 Rb S#. Huru mycket Koppar får han för sin Tjära? Swar: 7 S# 4 L# 6 2/3 #.

1 Läst — 20 Rb 36 sk = 16 Läst? Fac. 332 Rb
46 Rb — 1 S# Koppar = 332 Rb?
Fac. 7 S# 4 L# 6 2/3 #.

NB. 2:o När wärdet af de bytte Warorne icke går jämt upp, utan penningar måste gifwas emellan.

2. A. hafwer 28 S# Stång-Järn à 6 Rb, 19 Läster Tjära à 17½ Rb; B. hafwer 5 Läster Råg à 21 Rb 16 sk, 4 S# Fläsk à 25 Rb, och 20 Läster Sill à 19 Rb 24 sk. Frågas, hwilkendera skall gifwa penningar emellan och

Figur 2. Kapitel 7, som handlar om "Baratt-" eller "Bytesräkning", kan tjäna som illustration av de många tillämpningarna av regula de tri som alltid kommer sist, eller nästan sist, i räknelärorna. Bytesräkning, skriver Andersson, "Lärer huru man gods emot gods, på hwad Condition det wara må, barattera och förbyta kan". Det handlar med andra ord om hur priser skall sättas då varor byts mot varor. I Anderssons första exempel, tjära mot koppar.[3]

Uppslagets högra sida inleder ett avsnitt om "Baratto eller Bytes-Räkning", vilket användes för att räkna på byten av varor. Andersson delar in detta räknesätt i två "förändringar". Den första gäller då "Warorna i Byte insättas för sådant pris, som de kontant gälla den tid bytet sker". Denna "förändring" delar Andersson i sin tur in i tre fall, varav vi ser de första två på sidan 199. Det första fallet är "När wärdet af de bytta warorne går i Summa jämt upp mot hwarannan". Detta fall beskriver Andersson med följande exempel:

[1] Andersson, *Arithmetica Tironica*, 158. Det typiska exemplet på detta räknesätt är följande: antag att 3 arbetare kan gräva ett dike på 5 dagar. Hur lång tid tar det då för 8 arbetare gräva ett motsvarande dike? Här fordrar *fler* arbetare *mindre* tid – alltså är Regula Qvaustionis Inversa tillämplig.

[2] Ibid., 199.

[3] Ibid., 198-99.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

1. A. hafwer 16 Läst. Tjära à 20 RB 36 Sch will derföre tillbyta sig Koppar à 46 RB Skeppundet. Huru mycket koppar får han för sin Tjära? Swar: 7 Skeppund 4 Lispund $6\frac{22}{23}$ Skålpund.

1 Läst - 20 RB 36 Sch = 16 Läst Fac. 332 RB.
46 RB - 1 Skeppund Koppar = 332 RB
Fac. 7 Skeppund 4 Lispund $6\frac{22}{23}$ Skålpund.[1]

I den första radens uträkning – där det som ser ut som ett minustecken och ett likhetstecken här markerar de olika "rummen" i en "vanlig" Regula de Tri – räknar Andersson ut hur mycket de 16 Läster tjära A har är värda. Eftersom det tal som står i första rummet är en etta, hör denna Regula de Tri till en särskild grupp som Andersson kallar "Multiplikations-Exempel".[2] Det som skall göras är därför helt enkelt att multiplicera 20 RB 36 Sch med 16, vilket ger 332 RB. Den andra radens Regula de Tri uttrycker att vi vet att 1 Skeppund koppar kostar 46 Riksdaler och undrar hur många Skeppund vi då får för 332 Riksdaler (vilket vi från den första radens uträkning vet att A:s tjära är värd). Svaret har Andersson utan kommentarer uttryckt i lämpliga sorter.

Med detta exempel på tillämpad Regula de Tri avslutar jag min empiriska redogörelse för de svenska räknelärorna. Syftet med den ovanstående redogörelsen är att ge en bild av räknelärornas innehåll och deras framställningssätt som visar att de presenterade räknekonsten som ett sammanhängande och i någon mening "trovärdigt" system för praktiskt räknande. Jag skall nu fördjupa denna bild genom att sätta in räkneläran som genre i ett större Europeiskt historiskt sammanhang. Direkt kan sägas att jag här kommer jag begränsa mig till *räknelärornas* historia – vilken kan skiljas från den betydligt mer genomforskade *matematikens* historia.

2.2. Räknelärans historia

Genrens ålder och utveckling

I den ovanstående redogörelsen för räknelärorna tog jag Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica* som utgångspunkt. Denna bok publicerades 1779, och kom ut i nya upplagor fram till 1830. I en mening har jag därmed beskrivit genren så som den framträder kring sekelskiftet 1800. Med hänvisningar till Agrelius *Institutiones Arithmetica*, som publicerades första gången 1655, har jag emellertid argumenterat för att genren har en lång historia, som präglats av ett stort mått av kontinuitet både vad gäller böckernas disposition och deras innehåll. Min första poäng i detta historiska avsnitt är att genren faktiskt är betydligt äldre än så. Jag skall visa detta med hjälp av tre exempel.

Mina två första exempel berör det inledande avsnitt i räknelärorna som ofta har titeln "Numeratio". Innehållet i detta avsnitt följer ett mycket regelbundet mönster. Först beskrivs *siffrorna* – hur de skrivs och "utnämns". Sedan beskrivs hur siffrornas värden bestäms av deras olika "rum" i tal. Därefter beskrivs hur dessa *tal* skrivs och utnämns – alltid med hänvisning till extremt stora tal. Denna inledning finns i såväl Agrelius *Institutiones Arithmetica* som Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica*. I sin bok *Capitalism & Arithmetic* beskriver matematikhistorikern Frank J. Swetz detta inledande avsnitt i anslutning till en räknelära kallad *Treviso Arithmetic*:

> The first operation to be considered is numeration, which is defined in a rather modern vein as the representation of numbers by symbols. To fully appreciate the task the *Treviso's* author is undertaking in this section, one should understand the level of acceptance for the "Hindu-Arabic" numeral system that existed in Europe at this time. The new numerals had been known in Europe from about 1000 A. D. yet they had not been universally accepted for use.[3]

Den bok han skriver om publicerades 1478. Vid *denna* tidpunkt var kunskap om de siffror vi använder idag inte allmängods. Men redan på 1600-talet torde avsnittet i stor utsträckning ha förlorat den betydelse det ursprungligen hade.

Intressant nog var denna inledning dessutom ett av de moment i räknelärorna som bevarades under det skede under början av 1800-talet då räknelärorna användes som mall för en ny typ av mer regelrätta läro-

[1] Ibid.
[2] Ibid., 100.
[3] Frank J. Swetz, *Capitalism and arithmetic* (La Salle, Illinois: Open Court, 1987), 181.

böcker i matematik. Som jag skall berätta i kapitel 5, kom Per Anton von Zweigbergks *Lärobok i Räknekonsten*, publicerad första gången 1839, att få ett enormt inflytande över den svenska skolmatematiken under andra halvan av 1800-talet.[1] Den kom ut i nya upplagor en bra bit in på 1900-talet. Tämligen fascinerande är att framställningssättet i detta avsnitt kom att ligga relativt fast under 1800-talet, samtidigt som det kom att tillskrivas en helt annan innebörd än den det ursprungligen hade. Under denna tid kom nämligen läroböckerna att i allt större utsträckning rikta sig till barn, vilka inte kunde antas vara bekanta med siffrorna. Det avsnitt som på 1400-talet förtjänade sin plats i räknelärorna på grund av att siffrorna då var en kulturell nyhet, kunde därmed under 1800-talet motiveras med hänvisning till att siffrorna var en nyhet för de barn böckerna då riktade sig till.

Som andra exempel kan tas förklaringen till bruket i de svenska räknelärorna att ibland kalla till synes vanliga tal för "blandade tal". Att termen "blandade tal" användes i samband med bråk- och sorträkning är inget att förvånas över. I det inledande avsnittet kallade man dock förbryllande nog även tal som 54 och 31 för blandade, till synes i motsats till dels 1, 2, 3 etc., men också till tal som 20 och 430.[2] Även detta språkbruk har en historisk förklaring. Swetz skriver:

> Following medieval practice, numbers were divided into three categories: the nine *digiti* or "fingers" from 1 to 9; the *articuli* or "joints" designating multiples of ten, such as 10, 50, 650, etc, and the *numeri compositi* or "composite numbers" which were those formed by joining the previous two classes, i.e., 24, 753, etc.[3]

Även denna terminologi var alltså ett arv från 1400-talet eller tidigare, vilket bevarats i de svenska räknelärorna ända in i 1800-talet.

Som tredje exempel på hur räknelärornas innehåll hade ett ursprung äldre än 1600-talet kan nämnas att många av de tillämpningar på Regula de Tri som ingår i såväl Agrelius' som Anderssons räkneläror även finns med i *Treviso Arithmetic* från 1478. Mer specifikt ingår i denna bok (i översättning till svenska): Tararäkning, Bolagsräkning, Bytesräkning och Alligationsräkning – som synes alltså bland annat den bolagsräkning som fanns kvar under egen rubrik i svenska läroböcker ända fram till 1940-talet.

Böckernas användning

Att räknelärornas innehåll och disposition var relativt konstant under så lång tid väcker frågan om hur dessa böcker användes. Klart är att samhället förändrades radikalt mellan 1400-talet och 1700-talet, och sedan än mer under 1800-talet. Det verkar otroligt att samma typ av frågor behövde besvaras i det borgerliga livet under denna långa tidsrymd. Att nya typer av räkneböcker, vilka frångick räkelärornas mönster, började publiceras under 1700-talet, talar även det för att samhällslivet då hade förändrats på ett sätt som fick räknelärornas framställningar att i mångas ögon framstå som ett arv från det förgångna.[4]

Det är en fundamental skillnad mellan den bild av räknande som böcker innehåller (i form av text, tabeller, exempel, etc) och själva räknandet i egenskap av social praktik. Lika viktigt är dessutom att författande och läsande av böcker är något helt annat än att räkna. Att en bok innehåller en viss bild av räknande kan med andra ord inte förklaras med hänvisning till att man då boken skrevs räknade på ett visst sätt. Tvärtom pekar resonemangen ovan på att räknelärorna i stor utsträckning måste förstås som delar av en litterär genre, där nya räkneläror utgör variationer på ett relativt konstant tema. Ny inslag måste förstås som resultatet av ett möte mellan det nya och denna genre.

Den franske historikern Luce Giard skriver att boktryckarkonsten mot slutet av 1500-talet hade gett upphov till nya litterära genrer, bland annat en typ av böcker vilka, snarare än att göra anspråk på att säga något nytt, utgjorde en sorts samlingar av vetande. En ny sorts författare, som ägnade sig åt "sifting, quoting, compiling and combining the writings of others for the benefit of their readers", tog plats på scenen. I deras böcker, fortsätter Giard:

> all things are set down, apparently mixed at random, oblivious to contradictions. [...] The new scholars combined the passion for collecting the least fragment of wisdom and the encyclopedic compulsion to re-

[1] Per Anton von Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel: med facit-tabeller* (Stockholm: 1839).
[2] [Refrens till Agrelius eller Andersson!]
[3] Swetz, *Capitalism and arithmetic*, 179.
[4] Här är det dock viktigt att skilja mellan den kritik som riktades mot räknelärorna med utgångspunkt från den nya matematiska vetenskapen, och kritik som utgick från det praktiska räknandet. Som exempel på den senare sortens kritik kan tas Johan Bergmarck, *Svensk räkne-bok, eller et sådant räknesätt, hvarigenom alla.hushåldnings-mål kunna.vederbörligen utredas* (Stockholm: 1755). Den vetenskapliga matematikens kritik mot räknelärorna diskuteras i nästa kapitel.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

assemble the totality of knowledge, with a taste for rare words, borrowings from the classical languages, ostentatious quotations, mythological allusions and anecdotes where legend had the better of history.[1]

I viss mån träffar denna karaktäristik de svenska räknelärorna, särskilt vad gäller deras obligatoriska och ofta omfattande uppräkning av tillämpningar av Regula de Tri. Denna uppräkning framstår som en *samling av recept*, utan inbördes ordning (de är till exempel inte ordnade efter växande teknisk svårighet).

I *Science and the Secrets of Nature* ger William Eamon ytterligare en infallsvinkel till den litteratur Giard beskriver. Eamon tar fasta på att författarna till dessa böcker ofta ville göra gällande att de blottlade olika typer av hemligheter, om matlagning, hantverk, medicin, alkemi, och så vidare. Det rörde sig här om "handböcker" med vars hjälp – påstod författarna – vem som helst kunde få tillgång till praktiskt kunnande som tidigare var förbehållet specialister. Eamon skriver att 1500-talet "saw the publication of compendiums of almost every specialized field of knowledge”.[2] Produktionen av böcker inom genren *books of secrets*, som Eamon kallar den, "was eagerly exploited by a host of surgeons, empirics, and self-styled 'experimenters', who toward the century's end began producing dozens of little booklets of secrets for ordinary people".[3] Dessa böcker var författade för en då kraftigt växande grupp människor som var allt annat än rika men inte desto mindre läskunniga. Det var en sorts skräplitteratur, spelande på folks förhoppningar. Flera av dessa böcker blev mycket populära. Eamon skriver:

> Many of the sixteenth-century books of secrets continued to be published down through the eighteenth century: the last edition of Alessio’s Secreti was published in 1780. [...] During the Enlightenment, however, the descendants of the professors of secrets were increasingly marginalized as the professional scientific community shored up its borders against charlatans, ’crackpots’, and intruders.[4]

Vad Eamon skriver pekar mot att räknelärorna, vilka även de kom att kritiseras under upplysningen, har något viktigt gemensamt med *books-of-secrets*. Samtidigt måste man vara medveten om en avgörande skillnad, mellan dessa böcker och räknelärorna. De svenska räknelärorna författades nämligen inte i boktryckarkonstens kölvatten, utan betydligt senare.

Räknekonsten och vetenskapen

Av central betydelse rörande räknekonsten är dess ambivalenta förhållande till den matematiska vetenskapen. I nästa kapitel skall jag berätta om hur matematiken så att säga "blev en vetenskap" under 1600-talet, i den bemärkelsen att den kom att bli en central del i ett nytt sätt att tänka kring naturen. Som jag visat ovan hade räknekonsten sitt ursprung i en tid *innan* denna uppvärdering ägde rum. Samtidigt var räknelärorna emellertid inte opåverkade av den förändring i synens på räknandet som matematikens transformation under 1600-talet innebar. Förändringen inleddes redan under 1500-talets andra hälft, och faktum är att de svenska räknelärorna i stor utsträckning hade lånat sin disposition från Christopher Clavius *Epitome Arithmeticae* från 1583. Denna bok var allt annat än en bok om obskyra praktiska hemligheter.[5] Clavius hade tvärtom explicit vetenskapliga anspråk med sin framställning.

Räkneläran som genre, om vi med detta syftar på det tjugotalet svenska räkneläror som publicerades under 1600-, 1700- och början av 1800-talet, måste därför ses som resultatet av ett möte mellan en äldre tradition exemplifierad till exempel av *Treviso Arithmetic* från 1478, och de vetenskapliga pretentioner som resulterade i Clavius verk. Detta gör räkneläran till ett ganska svårfångat historiskt fenomen.

Genrens mångtydighet tydliggörs av den italienske historikern Mario Biagioli förklaring av att det fram till omkring slutet på 1500-talet var möjligt att dra en ganska tydlig gräns mellan två typer av professionella matematiker. Han skriver:

[1] Luce Giard, "Remapping knowledge, reshaping institutions," i *Science, culture and popular belief in Renaissance Europe*, red. Stephen Pumfrey, Maurice Slawinski, och Paolo Rossi (Manchester: Manchester Univ. Press, 1991), 26-27.
[2] William Eamon, *Science and the secrets of nature: books of secrets in medieval and early modern culture* (Princeton: Princeton Univ. Press, 1994), s. 273.
[3] Ibid., s. 234. Böckerna var en del av ett under denna tid vaknande intresse för det praktisk kunskap, ett intresse som idag framförallt förknippas med Francis Bacon.
[4] Ibid., s. 357.
[5] Även om Steven Shapin konstaterar att boken, ambitionerna till trots, huvudsakligen innehöll praktiskt användbara *tekniker*, snarare än någon typ av vetenskapligt system liknande Euklides' Peter Dear, "Jesuit mathematical science and the reconstitution of experience in the early secenteenth century," *Studies in History and Philosophy of Science* 18, no. 2 (1987): 136.

> In the first group we find the book-keepers, the land surveyors, and the engineer-masons. Their professional culture was represented by the chairs "ad arithmeticam et geometriam". Socially and professionally distinct from these practitioners we find the astrologer-physicians represented by the chairs "ad astrologiam" [...] the content and social status of the "culture of the abacus" was quite homogeneous and its social status consistently much inferior to that of the astrologer-physicians.[1]

Detta stycke skall ställas i relation till att den första svenska räkneläran från 1614, av Aegidio Aurelius, å ena sidan ägnar stort utrymme åt räknande med abacus, vilket mot bakgrund av Biagiolis karaktäristik av de olika typerna av matematiker, talar för att Aurelius knappast hade några vetenskapliga anspråk med sin bok. Samtidigt lånar han emellertid som sagt den övergripande strukturen från Clavius – en övergripande struktur som var utformad för att passa in räknekonsten som en del av en då ny matematisk vetenskap.

En rad frågor måste därför ställas rörande räknelärornas praktiska användning. En mängd sådana användningsmöjligheter framstår som möjliga. Ovan tog jag upp att de kunde utgöra sammanställningar vetande, möjligen med en pretention att presentera "hemligheter". Uppenbarligen finns i räknelärorna spår av ambitionen att framställa räknekonsten som en vetenskap. Historikern Giard, som jag citerat ovan, menade att den typ av böckern han diskuterar – vilka tycks ha likheter med räknelärorna – skulle fylla den dubbla funktionen av att ge prov på författarens lärdom, och samtidigt bibringa sina läsare lärdom (som de i sin tur kunde excellera med).[2] Dessa användningsmöjligheter måste läggas till de mer närliggande, att räknelärorna fungerade som handböcker för räkning, att de användes som utgångspunkt för människor som av någon anledning inte kunde, men ville lära sig räkna, och slutligen böckernas användning inom institutionaliserad undervisning.

Betraktad som en del av ett historiskt sammanhang framstår de svenska räknelärorna som ett ganska svårgripbart historiskt fenomen. Kontextualisering pekar om inte annat på det problematiska i att beskriva räknekonsten som en idealtyp, eftersom denna idealtyp riskerar att leda till missuppfattningen att räknekonsten utgjorde en sammanhängande social praktik, förbunden med en viss typ av litteratur. Så var det uppenbarligen inte.

2.3. Analys

Låt mig börja med att säga något om relationen mellan räknelärornas författare och deras läsare. Av det ovanstående framgår att det inte är enkelt att identifiera något särskilt motiv som låg bakom författandet av räkneläror. Inte heller går det att säga hur räknelärornas författare förhöll sig till den räknekonst de beskrev, dvs om de faktiskt deltog i det borgerliga liv de beskriver, om de satt på sin kammare och skrev med utgångspunkt från litterära förlagor, eller om de utgick från andra erfarenheter – t. ex. av undervisning – när de skrev sina böcker. Allmänt framträder emellertid de som skrev räkneläror som *individer*, vilket författade sina böcker med utgångspunkt från *personliga* överväganden. Det fanns vid denna tid inga explicit uttryckta regler för hur vad en räknelära skulle innehålla. Den svenska räkneläran tycks ha utgjort en levande genre, inom vilken författarna kopierade varandra och fyllde på med stoff hämtat från flera håll – kanske delvis från praktiska erfarenheter av såväl räknande som undervisning. Väsentligt är att författarna inte förenas av någon gemensam institutionell tillhörighet vilken kommer till uttryck i räknelärornas framställningssätt. Detta vore för den delen omöjligt, med tanke på genrens ålder. Samhället förändrades – räknelärornas form och innehåll bestod. Deras enhetlighet över tid är i detta avseende imponerande.

Vad gäller räknelärornas läsare, så som de implicit framträder i räknelärornas text, var de kort sagt kompetenta vuxna som i stor utsträckning kunde reda sig i livet redan innan de läste räkneläran i fråga. Signifikativt för den relation mellan författare och läsare som räknelärorna konstituerar är att Roloff Andersson explicit ursäktar sig för att han på en punkt valt en till synes "ologisk" ordning på stoffet han presenterar. Han tar sig tid att motivera varför han gjort som han gjort och hoppas på förståelse. Det är därmed tydligt att han riktar sig till vad som i huvudsak är en jämlike. Läsaren framstår som en person vilken uppenbarligen ännu inte behärskar räknekonsten, men som inte desto mindre skulle kunna behärska den, genom mer eller mindre träget arbete. I synnerhet Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica* konstituerar

---

[1] Mario Biagioli, "The social status of italian mathematicians, 1450-1600," *History of Science* 22 (1989): 42-43.

[2] Frans Hultman skriver träffande nog i sin "Svenska aritmetikens historia" från 1870-talet att Agrelius i sin räknelära framstår som "ett märkvärdigt underdjur i afseende på lärdom". F.W. Hultman, "Svenska aritmetikens historia," *Tidskrift för matematik och fysik* (1871): 224.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

sin läsare som en "potentiell mästare" genom att hela tiden explicit presentera såväl allt som hör räknekonsten till, som inte minst vägen till ett komplett bemästrande av denna konst.[1] Räknelärornas läsare är vad man kan kalla *hela människor*. Räknekonsten syftar inte till att på något sätt komplettera, eller på något radikalt sätt förändra dem. Detta påpekande är motiverat dels med tanke på senare ambitioner inom skolmatematiken, dels med tanke på syftemålen med den undervisning i matematik som utgör föremålet för nästa kapitel. Studier i matematik kom nämligen, från och med 1500-talet, att tillmätas en rad betydelser som sträckte sig långt utöver det praktiska räknandet, till exempel att bibringa adepten en förmåga att tänka logiskt och en förmåga att se verkligheten "som den är". Med Giard kan man istället säga att räknelärorna istället sökte ett sorts erkännande av sina läsare. Läsaren betraktades givetvis inte fullärd, men det räknelärorna försöker förmedla är, kan man säga, externt i förhållande till läsaren som subjekt. Man kan här tala om att i en oproblematisk mening "lära sig något", snarare än att – som det senare blir fråga om – låta sig transformeras genom övning.

En självklar följd av det ovanstående är att räknelärorna inte var skrivna för *barn*. Detta var dock tydligen inte självklart för de som använde räknelärorna i undervisningssammanhang. Angående ett enligt honom effektivt sätt att öva division skriver Andersson

> Att bruka detta sättet med ett ungt barn, som först börjar dividera, är ej rådligt. Det är wäl, om det kan begripa divisionen efter det sätt, som förut lärdt är. Men den som will blifwa en snäll Practik-Räknare, måste häruti öfwa sig ganska wäl [...][2]

Stycket är typiskt för den inställning till läsaren som genomsyrar Anderssons *Arithmetica Tironica*, nämligen respekt kombinerat med uppriktighet rörande vad som krävs (övning, memorering) för att man skall lära sig att bemästra räknekonsten.

Räknelärorna var skrivna så att de kunde användas på flera olika sätt. Som sagt ovan syftade de troligtvis i vissa fall delvis till att demonstrera författarens lärdom och att bibringa sina läsare samma möjlighet att så att säga excellera medan de i andra fall fyllde en mer praktisk funktion, för självstudier och som referensverk. Säkert är att i synnerhet Agrelius *Institutiones Arithmeticae* användes i undervisningssammanhang. Boken är emellertid inte alls på samma sätt som senare läroböcker skriven för att *passa* undervisningen. Och det är omöjligt att säga exakt hur de användes.[3]

Av titlarna kan man utläsa att de författades å ena sidan för att användas i undervisning, men även, som Andersson skriver i titeln till sin *Arithmetica Tironica*, till "Allmänhetens" tjänst. Johan Gräns skriver i förordet till sin *Underwisning uti Räknekonsten*:

> Öfweralt har jag sökt möjligaste tydlighet, hwarföre jag ock föreställer mig, at en hwar med någorlunda urskillning begåfwad, kan genom efterföljd af hwad i Boken föreskrifwes, inhämta det nödwändigaste af denna kunskap, utan annan Lärmästares tilhjelp.[4]

Även om denna ambition inte är alltid är explicit uttryckt är den typisk för räknelärorna. De institutioner inom vilka undervisning i matematik bedrevs – jag tänker här i första hand på läroverkens apologistklasser – hade då räknelärorna skrevs relativt liten utbredning. Detta, tillsammans med räknelärornas struktur och framställningssätt, pekar mor att räknekonst inte i första hand var ett ämne för undervisning. Andersson, liksom Gräns, uttryckte explicit att de skrev för den som ville lära sig själv. Inför de grupper av övningsexempel som finns i Anderssons bok brukar det dessutom ofta stå något i stil med :

> Härefter följa några blandade Öfnings-Exempel, som hwar och en sjelf kan öfwa sig uti, att känna hwad slags exempel det är, och till hwilken förändring hwart och ett hörer. Den som will hafwa flere, kan sjelf formera sig så många och sådana han behagar.[5]

Övande behövs, menade Andersson, men han överlät åt läsaren att avgöra hur och i vilken omfattning det skulle övas. Andersson uttrycker även på flera ställen i sin räknelära ett motstånd mot trenden att placera in fler uppgifter i räkneböckerna.[1]

---

[1] Jag förstår här relationen mellan mästare och lärling som i Dowling, *The sociology of mathematics education: mathematical myths/pedagogic texts*, 28-33.
[2] Andersson, *Arithmetica Tironica*, 86.
[3] Att det är svårt att uttala sig om undervisningspraktiker gäller generellt. Det är inte förrän mot slutet av 1900-talet som undervisningspraktiker gjorts till föremål för detaljerade studier.
[4] Gräns, *Underwisning uti Räknekonsten*, 2.
[5] Andersson, *Arithmetica Tironica*, 123.

I den mån räknelärorna användes i undervisningssammanhang förstår jag lärarens expertis som huvudsakligen förankrad i själva räknekonsten – i kontrast till en expertis knuten till själva undervisningspraktiken. Till saken hör att räknekonsten kan ses som en samling tekniker för att så att säga transformera en *fråga* till ett *svar*, där både frågan och svaret är externa i förhållande till räknekonsten. Detta innebär att elevernas "prestationer" – för att använda ett uttryck som är räknekonst och räkneläror främmande – egentligen inte relateras till räknekonsten själv, utan till det sammanhang inom vilken den tillämpas. Kort sagt är det här tämligen oväsentligt *hur* man får fram rätt svar, det viktiga är att svaret är *rätt*, att man kan vara säkert på att det är rätt, och att det kan produceras inom en rimlig tid. Man skulle kunna säga att de "kunskaper" som senare hamnade i diskussionens centrum, här utgör något tämligen *privat*, vilket givetvis hänger samman med den respekt för läsaren som jag nämnt ovan. Denna relation till kunskaper kan kontrasteras mot den senare skolmatematikens envisa förkastande av "minneskunskaper" och i det närmaste paranoida sträck för blott "mekanisk" kunskap, samt vad man med Foucault skulle kunna kalla bekännelsepraktiker genom vilka elever oupphörligen manas att omsätta sitt tänkande i tal – så att det går att säkerställa att inte bara svaret är det rätta, utan att även vägen dit är den förväntade.[2]

Räknekonstens egenskaper

Vad kan man då säga om räknekonsten för att kontrastera den mot den senare skolmatematiken? För det första var räknekonsten inte något man talade om. Den hade inte någon särskilt hög "status" och den var aldrig sammanvävd med varken metafysik eller religion. Räknelärorna reser inga anspråk på en särskild relation till varken sanning eller Gud. *Tal* om räknekonst fyllde kort sagt ingen social funktion.

Räknelärorna innehåller löpande text och exempel som beskriver hur man *gör* när man räknar. Hur man gör beskrivs i termer av algoritmer och tabeller. Den utgör en samling av tekniker, där teknikerna i och för sig alla bygger på samma uppsättning grundläggande handgrepp (de fyra räknesätten i hela tal och bråk, etc) men där de samtidigt är placerade sida vid sida. Räknekonsten konstituerar ingen sammanhängande *struktur*. Den är en beteckning på en öppen mängd tekniker förenade av den typ av sociala sammanhang inom vilka de är tillämpliga. Räknekonsten har bara mening som en del av det sammanhang inom vilket den är tillämplig. Den utgör ingen sluten helhet. Att "behärska" räknekonsten implicerar därför ett behärskande av praktiker som ligger utanför räknekonsten.

Räknekonsten består av tekniker med vars hjälp en viss typ av praktiska frågor kan besvaras, men man kan inte säga att räknekonsten (så som matematiken) "finns" i den sociala verkligheten. Räknekonsten reser inga ontologiska anspråk. Räknekonst är inte tillämpad matematik. Den är inte "härledd" ur ett övergripande teoretiskt ramverk.

Räknelärorna innehåller en detaljerad och korrekt *beskrivning* av hur räknande går till i praktiken. De är strukturerade med utgångspunkt från praktiken. Här kan nämnas att alla räkneläror på denna punkt inte passar min idealtyp. Den kritik som riktades mot räknelärorna – och i synnerhet Agrelius *Institutiones Arithmetica* – gällde bland annat bristande realism. I Anderssons bok kan man, angående "delningsräkning" läsa att:

> De exempel en del Arithmetici pläga här, under särskilt förändring införa, äro mindre rimliga och förekomma aldrig i Praxin, ty det är besynnerligt sagdt, att twå göra Compagnie, A i 6 och B. i 9 månader. Men om flere äro i Sällskapet och endera antingen dör bort eller eljest will skilja sig deirifrån, eller ock någon annan will efter en tids förlopp träda i Sällskapet, göres då alltid afräkning, och liksom ett nytt Compagnie begynnes; sammaledes efter det ock, när en eller flere i Compagniet efter någon tid will öka sina insatser med större eller mindre Summor.[3]

[1] Se även sidorna 11, 22, 26, 19, 31, m. fl.

[2] Jag menar att det finns en parallell mellan det Foucault säger om sexualiteten: "varför säger vi med sådan lidelse, sådan förbittring mot vårt närmaste förflutna, mot vår samtid och mot oss själva, att vi är förtryckta [vad gäller sexualiteten]?" och vad man under nästan exakt samma period som Foucault fokuserar, började säga om kunskaper i matematik. I takt med att skolmatematiken tar större plats i samhället, blir man allt mer övertygad om att matematikkunnandet *sjunker* – och detta samtidigt som allt fler elever får ägna allt mer tid åt matematiken. Man talar faktiskt till och med allmänt om skolmatematiken som ett förtryck mot eleverna, som de måste befrias från. Man förknippar detta förtryck med – märkligt nog – tyst räknande. En potential till frigörelse ser man bland annat i elevernas tal om sig själva och sitt räknande. Givetvis finns det ingen fullständig parallellitet. Samtidigt menar jag att de två processerna (rörande sexualiteten och matematiken) kan betraktas som två olika uttryck för samma övergripande tendens i samhället, nämligen att tolka det successiva "öppnande" av subjektet genom introspektivt tal genom vilket det fogas in i nya "disciplinerande" sociala praktiker, i termer av frigörelse. Michel Foucault, Per Magnus Johansson, och Britta Gröndahl, *Sexualitetens historia*, Ny utg. / utg. (Göteborg: Daidalos, 2002 [1976]), 38.

[3] Andersson, *Arithmetica Tironica*, 217. Detta sätt att kritiskt förhålla sig till genren utgör ytterligare ett exempel på hur Andersson relaterar till en "jämlik" läsare.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Liksom i ett av de exempel från Agrelius som jag refererat ovan ger han även i sitt avsnitt om delningsräkning en rad exempel vars syfte snarast måste ses som illustrationer av vad man *kan* göra, än som beskrivningar av vad man faktiskt i praktiken *gör*. Ytterligare ett av många exempel hos Andersson av kritik mot tidigare räknelärors (läs Agrelius) bristande realism utgörs av vad han skriver om "fördubblade bråk". Ytterst motvilligt och mycket kortfattat redovisar han hur man räknar med sådana bråk. Han anser nämligen att de "äro mindre nyttiga än konstiga".[1] Han visar i två exempel hur de "med Regula de Tri tracteras", och skriver sedan i en "nota":

> Att fylla papperet med flere sådana exempel, anser jag så mycket mindre nödigt, som de sällan förekomma, och will dessutom hänwisa den till Agrelius, som åstundar blifwa en konstig Räknemästare. Jag håller mig endast wid det nyttig, hwatill mitt uppsåt är att wisa genast wägen och lättaste sättet, det jag (oförgripligen att säga) tror mig redan till en del fullgjordt, och hwad som brister skall härefter följa.[2]

Andersson, liksom Gräns, vill hålla sig till det som är "nyttigt" och utesluta allt annat. Johan Gräns skriver i sitt förord:

> Som mit syftemål warit at afhandla hwad som egentligen til Handels- och Hushålls-Räkning hörer, så har jag utlämnat alt som jag ej funnit dermed äga nära gemenskap, emedan jag tillika ansett utan ändamål, at fylla papperet med uplösning af frågor som sällan i utöfning förekomma. Endast det nödwändiga och nyttiga har warit mit föremål.[3]

Här syns två avgränsningar. Dels av sådana delar av räknekonsten som Gräns menar inte hör till hans ämne (uppenbarligen till exempel progressioner och rotutdragning), sedan frågor vilka vad gäller den teknik som används för att besvara dem i och för sig hör till räknekonsten, men som emellertid de facto inte förekommer i praktiken.

Den idealtypiska räknekonst jag vill karaktärisera var ett system av tekniker för att hantera praktiskt räknande, så som det faktiskt utfördes. Denna närhet till praktiken bestämde räknelärornas innehåll. De är, kan man säga, strukturerade med utgångspunkt från det praktiska räknandet. Typiskt är i detta avseende att Agrelius utgår från olika typer av sorter i sin klassificering av olika tillämpningar av Regula de Tri i hela tal.[4] Närheten till praktiken bestämde även vad man behövde kunna för att behärska räknekonsten. Den höga graden av realism gällde med andra ord inte bara den kontext den räknande befann sig i, utan också den räknande själv. Man behövde känna till räknekonstens regler, identifiera de många "händelser" som reglerna innefattade och ha en mängd tabeller "wäl fästad[e] i minnet och lärd[a] utantill".[5] Vad gäller böckernas framställning dög det därför inte att presentera endast några generella principer. Andersson skriver till exempel om intresseräkning att all sådan räkning i och för sig kan utföras efter en generell regel, men att

> uti swårare exempel och då frågan är om ett Capital af större och mindre sorter, och om tid af år, månader och weckor, etc. detta sättet är hwarken det säkraste eller lättaste, alldenstund det medförer mycken oreda och allt för stor widlyftighet; ty är bättre att sammandra bägge desse Reglor under en enda, och tractera frågan alldeles som uti Regula Dupla Directa är wisadt, §. §. 88, 89.[6]

Den kompetens i räknekonsten som räknelärorna (åtminstone Anderssons och Gräns) försökte förmedla angränsade till det borgerliga livet i allmänhet och till specifika yrkespraktiker i synnerhet.

Steven Toulmin beskriver i sin bok *Kosmopolis* en övergång mellan två olika sätt tänka som han menar skedde i europa ungefär på 1630-talet.[7] Jag nämnde denna övergång i mitt inledande kapitel – den brukar förknippas med modernitetens fördelse. En av de många förlopp som accelererade från denna tid var den uppvärdering av matematiken – i egenskap av abstrakt deduktiv teori – vilken som nämnt hade inletts redan några decennier tidigare. Toulmin beskriver den nya tidens karaktäristiska drag i termer av en övergång från "det enskilda till det universella", "från det lokala till det allmänna" och "från det tidsbundna till

1 Ibid., 153-54.
2 Ibid., 155.
3 Gräns, *Underwisning uti Räknekonsten*, Auctorns företal.
4 Han har rubriker som "Om Alnar och dess Mått", "Om Öl och Win-Mått" och "Om Tunne-Gods", Agrelius, *Institutiones arithmeticae*, 150-94.
5 Andersson, *Arithmetica Tironica*, 85.
6 Ibid., 169-70.
7 Toulmin, Larsson, och Holmqvist, 24.

det tidlösa".[1] På alla dessa punkter kan räknelärorna föras till tiden före denna förändring av sättet att tänka. Räknelärorna beskriver enskilda sätt att räkna, i specifika lokala kontexter. De beskriver uträkningar som kräver ett hänsynstagande till praktiska omständigheter, och som måste utföras vid rätt tidpunkt och slutföras inom rimlig tid. Det universella, allmäna och tidlösa hade ingen plats i räknelärorna och det utgjorde ingen del av räknekonsten. Mot bakgrund av denna karaktäristik skall jag i nästa kapitel beskriva den matematik som blev ett av resultaten av just det nya sätt att tänka kring vetenskap och natur som Toulmin beskriver tog form på 1630-talet. Eftersom jag exemplifierat räkneläran som genre med en bok publicerad 1779 står det redan från början klart att räknekonsten så att säga "överlevde" det nya "vetenskapliga" sättet att tänka kring matematiken. Vad som i praktiken hände var emellertid att den nya matematiken, till synes relativt plötsligt, kom till Sverige i början av 1700-talet. Detta resulterade i ett möte mellan räknekonst och matematik, vilket utgör temat för nästa kapitel.

[1] Ibid., 56-62.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

3. Matematiken

Det här avsnittet handlar om matematiken. I jämförelse med när det gäller räknekonsten är det betydligt svårare att säga vad matematiken *är*. Skillnaden ligger i att räknekonsten i ganska liten utsträckning var något man talade om. Detta gör frågan om vad räknekonst var, relativt öppen. Den är, kan man säga, ett "tyst" objekt, som jag beskrivit med utgångspunkt från hur det framträder i räknelärorna. För matematiken gäller motsatsen: det är ett objekt fyllt med mening, som inte kan knytas till någon särskild framträdelse. Den är, kan man säga, ett objekt som framträder på två sätt – dels i form av "framställningar" liknande räknelärornas, men samtidigt också i en samtida diskurs. Inget av de två enkla alternativ som därmed erbjuder sig tycks särskilt fruktbara, dvs. att antingen begränsa sig till innehåller i böckerna, eller till den diskurs i vilken matematik omtalades. Här blir det därför nödvändigt att på ett tydligare sätt än i kapitlets första del knyta an till mitt teoretiska ramverk, i vilket jag tar fasta på den *identifikation av mening* som så att säga "ger upphov" till matematiken.

Betraktad på detta sätt var matematiken något som (i modern tid) tog form i Europa under 15- och 1600-talen, och som tog plats i Sverige framför allt under 1700-talet. Då hände två saker: det började, som Foucault skulle säga, produceras ett nytt tal om matematik, samtidigt som det började skrivas en ny sorts "matematiska" böcker, av vilka jag skall fokusera på de som användes i den grundläggande undervisningen.

Kapitlet har fyra delar. Först kommer en kortfattad redogörelse för hur matematiken, i bemärkelsen föreställningar om matematikens värde och egenskaper, från 1500-talet till början av 1700-talet, utgjorde en del av den samhällsövergripande förändring av sättet att tänka som bland andra Toulmin beskriver i sin *Kosmopolis*.[1] Tonvikten ligger här på att visa hur matematiken under denna tid kom att vävas samman med naturfilosofins frågor rörande verklighetens natur lika mycket som religiösa frågor rörande relationen mellan Gud och människa. Detta avsnitt bygger på den typ av nyare vetenskapshistorisk forskning som jag nämnde i avhandlingens första kapitel. Dess huvudsyfte är att fungera som bakgrund till den följande beskrivningen av hur man under första halvan av 1700-talet började tala om matematiken i Sverige.

I kapitlets andra avsnitt visar jag att matematiken även i Sverige, i linje med utvecklingen i övriga europa, tillskrevs en rad egenskaper som sträckte sig långt utöver det praktiska räknandet. Matematiken beskrevs som nyttig inom de "praktiska vetenskaperna", som ett verktyg för att forma tänkandet, och sist men inte minst om ett verktyg för att göra människor sedliga och moraliska inom en delvis ny social ordning.

Den nya synen på matematik åtföljdes av publikationen av en rad nya böcker, av vilka Anders Celsius *Arithmetica eller Räkne-Konst* från 1727 och Mårten Strömers översättning av Euklides *Elementa* från 1744 utgjorde de första. I kapitlets tredje avsnitt beskriver jag först dessa nya böcker, men sedan också vad man kan kalla ett möte, mellan räknekonsten och "matematiken". Detta möte ägde rum kring mitten av 1700-talet, och som resulterade i en ny sorts "pseudo-räkneläror" vilka innehöll en kombination av element från både räknekonsten och matematiken.

Avslutningsvis knyter jag i kapitlet fjärde avsnitt an till mitt teoretiska ramverk och lyfter fram några av matematikens särskiljande drag.

3.1. Föreställningar om matematik från 1500-talet till 1700-talet

Mellan slutet av 1500-talet och slutet av 1600-talet tog matematiken plats som en central del av tankesystem förknippade med såväl naturen, samhället, Gud och människan. Från att kring mitten av 1500-talet i första hand ha betraktats som en samling praktiskt användbara tekniker,[2] kom matematiken under 1600-talets lopp att allt mer allmänt betraktas som en vetenskap med stort värde.

[1] Ibid.
[2] Vars olika grenar hade olika status, se Biagioli, "The social status of italian mathematicians, 1450-1600."

I det första skedet av denna process spelade Jesuitorden en viktig roll. För dem kom matematiken att fungera som ett av flera redskap i argumentationen för katolicismen. Förloppet är komplext, och man måste skilja mellan Jesuitordens allmänna befrämjande av vetenskapliga studier, och den mer specifika strävan som just matematikerna hade att höja matematikens status i förhållande till andra ämnen som studerades i jesuitskolorna – i synnerhet i förhållande till den icke-matematiska naturfilosofin.[1]

Under början av 1500-talet betraktades som sagt matematiken i första hand som en samling tekniker. Man kan inte säga att dessa sågs som något helt annat än vetenskap. Snarare var deras status som vetenskap problematisk.[2] Vetenskapen dominerades nämligen av den aristoteliska naturfilosofin. Enligt Aristoteles skall vetenskapen förklara naturen genom att klarlägga var saker *är* och vad som är deras essentiella "orsaker".[3] Verktygen för att nå sådan kunskap är, menade Aristoteles, vår upplevelse av världen och vårt språk. Geometrin och den uppsättning beräkningstekniker som betraktades som matematik på 1500-talet ansågs inte kunna säga något om vad verkligheten är (dess *essens*) och även om den sågs som en vetenskap, värderades den därför inte lika högt som filosofin.[4]

Den aristoteliska naturfilosofin brottades emellertid med problem under 1500-talet. Den syftade till att nå fram till *säker* kunskap, och många hade, delvis på grund av det tumult som orsakades av reformationen, börjat tvivla på att det var möjligt att nå sådan kunskap.[5] Matematiken kom i detta sammanhang att framstå i mer positiv dager än tidigare.

För det första argumenterade tidens matematiker för att matematiken kunde erbjuda just den typ av säkra sanningar som filosoferna inte kunde nå fram till. Det gick inte, menade man, att tvivla på att vinkelsumman i en triangel motsvarade två räta vinklar. Detta faktum ansåg man hade avgörande betydelse i förhållande till tidens brännande frågor angående religion och Guds existens. I princip tycks man ha menat att matematikens sanningar så att säga tvingade förnuftet till tro – när man väl förstod ett matematiskt bevis var det omöjligt att tvivla. Denna matematiska "tro", vilken band förnuftet genom en sorts "uppenbarelse" då man plötsligt *förstår*, låg nära hur man såg på religiös tro, och man menade därför att arbete med matematik, genom vilken man så att säga fick *vana att tro*, skulle göra det lättare att komma även till religiös tro.[6]

För det andra menade man att matematiken möjliggjorde en sorts medelväg, mellan den totala skepticismens handlingsförlamning, och de höga anspråk filosofin uppenbarligen inte klarade av att leva upp till. Matematiken utgjorde nämligen, menade man, ett redskap för att på ett systematiskt sätt beskriva världen och därmed också behärska den. Man började tala om "fysiko-matematik", och resan mot de matematiserade naturvetenskaperna hade inletts.[7]

Viktigt för mina syften är att matematiken under denna process var föremål för vad man kan kalla en strid om betydelser. Inte minst drev som sagt matematiker inom Jesuitorden en sorts kampanj vars explicita syfte var att stärka matematikens ställning.[8] Jag skall här ge två textexempel hämtade från denna kampanj. Så här skrev Joan Lluís Vives 1534:

> For geometry are developed optics or perspective, and architecture, and the art of measurement, all of which have great usefulness in ordinary life for protecting our bodies; for from geometry we proceed to all measurement, proportion, movement and position of heavy weights, whether regarded as moveable or fixed at the moment, or as immoveable. Then follows the study how to measure fields, mountains, towers and buildings.

---

1 Den följande redogörelsen är baserad på Dear, *Mersenne and the learning of the schools*. och Dear, *Discipline & experience*.

2 Dear, *Discipline & experience*, 36.

3 Stephen Gaukroger, *Explanatory structures: a study of concepts of explanation in early physics and philosophy*, *Harvester studies in philosophy*, (Atlantic Highlands, N.J.: Humanities, 1978), 83.

4 Relationen mellan matematik och filsofi var tämligen komplex, och framställningen här är en förenkling. För en grundlig redogörelse se Peter Dear, "From Truth do Disinterestedness in the Seventeenth Century," *Social Studies of Science* 22, no. 4 (1992); Dear, "Jesuit mathematical science and the reconstitution of experience in the early secenteenth century."; Dear, *Mersenne and the learning of the schools*; Dear, *Discipline & experience*; Gaukroger, *Explanatory structures*.

5 Richard Henry Popkin, *The history of scepticism: from Savonarola to Bayle* (Oxford: Oxford Univ. Press, 2003), 3.

6 Kanske överbetonar jag den betydelse som tillskrevs vanan. Till exempel betonas ju vanan i Pascals klassiska avsnitt om att "Vanan ställer in automaten, och den drar med sig tanken, utan att tanken vet om det", Blaise Pascal, *Tankar*, *Forum pocket*, (Stockholm: Forum, 1971), 63. men här var väl Pascal å andra sidan knappast mainstream. Mitt resonemang är en tolkning av Joan L. Richards, "God, truth, and mathematics in nineteenth century England," i *The Invention of Physical Science: Intersections of Mathematics, Theology and Natural Philosophy since the Seventeenth Century*, red. M. J. Nye, J. Richards, och R Stuewer (Kluwer Academic Publishers, 1992).

7 Dear, *Discipline & experience*, 168. Intressant är att de två argumentationslinjerna flöt samman i det att man menade att säker kunskap faktiskt var möjlig rörande den matematiserade beskrivningen av verkligheten, eftersom den var en *mänsklig konstruktion*.

8 Dear, *Mersenne and the learning of the schools*, XX.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

> How great comfort does architecture bring us in our dwellings! How greatly perspective assists in the observation of pictures![1]

Vives framställer här geometrin som användbar inom en rad områden. Han skriver att man utgår från geometrin, och därifrån rör sig till mätning och rörelse. Man ser här hur kampen om matematiken framträder som en kamp om hur man skall tolka sociala praktiker som mätning (av "fält, berg, torn och byggnader"), betraktande av tavlor samt arkitektur. Framför allt gör Vives anspråk på att säga sanningen om vad som utgör orsaken till det som är bra i dessa praktiker, nämligen, menar han, geometrin. Ungefär 50 år efter Vives, skrev Christopher Clavius:

> Mathematics teaches poets about the rising and setting of the stars; teaches historians the situation and distances of various places; teaches logicians [and?] analytici examples of solid demonstrations; teaches politicians truly admirable methods for conducting affairs at home and during war; teaches physicists the manners and diversity of celestial movements; of light, of colors, of diaphanous bodies, of sounds; teaches metaphysicians the number of the spheres and intelligences; teaches theologians the principal parts of the divine creation; teaches jurists and canonists calendrical computation, not to speak of the services rendered by the work of mathematicians to the state, to medicine, to navigation, and to agriculture. An effort must therefore be made so that mathematics will flourish in our colleges as well as the other disciplines.[2]

Clavius ställer i sin text fram matematiken som en universell lärare. När han undervisar i matematik är det med andra ord inte han själv som gör anspråk på att rikta i stort sett alla vetenskapliga kunskapsområden – denna riktande kraft utgår istället, menar han, från matematiken. Clavius gör matematiken till en sorts representant; han presenterar sig själv genom matematiken, och, kan man säga, döljer sina anspråk på auktoritet genom att säga att det är matematiken som rätteligen måste tillmätas auktoritet, inte han själv. Samtidigt argumenterar han för att matematikens betydelse måste bli mer mer allmänt erkänd. I andra sammanhang skrev han att studenter "needed to be persuaded 'of the utility and necessity of these mathematical disciplines' and should be shown that 'philosophy and the mathematical sciences are joined, as indeed they are'; the [philosophers], meanwhile, must be prevented from criticizing mathematics as of being of no value".[3] Det råder med andra ord ingen tvekan om att argumentationen för matematik var en del av ett politiskt maktspel. Om studenterna inte av sig själva insåg matematikens nödvändighet borde de, menade Clavius, övertalas. Och filosoferna borde "hindras" – oklart hur – från att smutskasta matematiken, något de tydligen inte drogs sig för.

Det bör poängteras att de matematiker det här är fråga om åtminstone inledningsvis inte försökte förena sin matematiska vetenskap med naturfilosofin. Deras mål var att stärka matematikens ställning. Naturfilosofin drogs med sina problem, och det var bara en fördel för matematikerna att framställa sig som något annat än den.[4] Citaten ovan utgör exempel på detta sätt att framställa matematiken som nyttig – utan ontologiska anspråk.

"Den vetenskaplig revolutionen"

Det är för mina syften viktigt att problematisera föreställningen om att en vetenskaplig "revolution" någonsin ägt rum.[5] Den vetenskapliga revolutionen brukar förläggas till 1600-talet, och vad gäller matematikens roll i detta skede pekar redan det föregående avsnittet om Jesuiternas verksamhet på en kontinuitet med 1500-talet. Lika viktigt är att det som hände under 1600-talet, på samma sätt som retoriken kring matematik under 1500-talet, snarare måste förstås som ett litet antal individers mer eller mindre disparata anspråk på att förklara naturen på ett nytt sätt, än som en globalt omvälvande rörelse.[6] Den nya synen på vetenskap, och mer specifikt naturvetenskapernas matematisering, hänger samman med övergripande sociala transformationer, men i synnerhet vad gäller Sverige inträder inte dessa förändringar förrän under

[1] Ibid., s. 43-44.
[2] Ibid., s. 43 (hur citera?).
[3] Ibid., s. 45.
[4] Dear, "Jesuit mathematical science and the reconstitution of experience in the early secenteenth century," 165-66.
[5] Föreställningen om "den vetenskapliga revolutionen" är faktiskt inte så gammal som man lätt skulle kunna tro med utgångspunkt från dess populära användning. Steven Shapin berättar att uttrycket sattes i omlopp av amerikanen Preserved Smith och fransmannen Alexandre Koyré på 1930-talet. En viktig person i detta sammanhang är Herbert Butterfield, som framställde den vetenskapliga revolutionen som både "både den moderna världens och den moderna mentalitetens verkliga ursprung" Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, 9-10.
[6] Detta gäller i stor utsträckning även för 1700-talet, se Gascoigne, "From Bentley to the Victorians," 224.

17- och 1800-talet. Som vetenskapshistorikern Steven Shapin skriver, revolutionerades "folks" uppfattning om världen (och religionen) under denna tid i högst begränsad utsträckning.[1]

Ett kortfattat sätt att beskriva den världsbild som tog form under 1500-talet och som föregick naturvetenskapernas matematisering är att säga att den innebar att naturen uppfattades som en *maskin* eller mer specifikt som ett *urverk*. Historiker talar om en "mekanisk" världsuppfattning. Även om det mekaniska utgjorde ett gemensamt tema fanns en stor spännvidd vad gäller olika sätt att tolka den mekaniska metaforen. Föreställningen om naturen som maskin skulle, kan man säga, lösa en mängd olika sociala och filosofiska problem som var aktuell under början av 1600-talet. Hit hörde framför allt att motverka tendenser till skepticism och religiöst tvivel. Amos Funkenstein förklarar att den mekanistiska metaforiken fick omvälvande konsekvenser för hur man tänkte kring Guds egenskaper. Snarare än sekularisering innebar det mekaniska synsättet att gränsen mellan de heliga och det profana suddades ut, och naturfilosofi och teologi flöt samman. Funkenstein skriver att "Never before or after were science, philosophy and theology seen as almost one and the same occupation".[2] Detta är viktigt för mig, eftersom ett av den nya naturvetenskapens kännetecken var matematik. Väsentligt är alltså att den höjning av matematikens status som Jesuiterna arbetade för, ledde vidare till en sorts filosofiska system där föreställningar om naturen och om Gud flöt samman i en mekanistisk världsuppfattning.

Åsikterna om vilken roll matematiken borde spela som delar av den mekanistiska världsbilden gick isär under 1600-talet. Jag skall här förenklat dra en gräns för detta avsnitt om den vetenskapliga revolutionen vid publikationen av Newtons *Principia* 1687.[3] Innan dess kan man översiktligt skilja mellan två riktningar inom naturfilosofin vilka kan representeras av Descartes i Frankrike och Boyle i England. Descartes satte stor tilltro till matematiken som redskap för att förklara vad som händer i naturen.[4] Han matematiska förklaringar var emellertid kvalitativa och uttryckta i text läsbar även utan djupare kunskaper inom matematik. Boyle representerade istället en ambition mer i linje med Francis Bacons, att undvika spekulationer kring "varför", och istället utvidga kunskapen om naturen genom insamling och dokumentation av "fakta".[5] Newtons *Principia* kan å ena sidan sägas fullborda det förlopp som ägde rum under 1600-talet. Å andra sidan markerade detta verk inledningen på en ny era, som i vissa bemärkelser – jag tänker här framför allt på det intima bandet mellan matematik och religion, allra mest påtagligt i England, men tydligt även i Sverige – skulle sträcka sig ända fram till slutet av 1800-talet.

Descartes' matematik

Descartes menade att naturen uteslutande bestod "korpuskler" – små (icke observerbara) partiklar vars egenskaper bestämdes deras "storlek, form, uppbyggnad och rörelse".[6] Dessa små partiklar, vars inbördes relationer han ansåg var helt mekaniska, använde Descartes för att *förklara* naturens observerbara egenskaper. Väsentligt här är att Descartes alltså inte ägnade sig åt att konstruera matematiska modeller för att, till exempel, göra prediktioner eller beskriva verkligheten. Det viktiga för honom var att *förstå*, och man kan säga att han i detta syfte använde sina korpuskler som ett retoriskt redskap.

I Descartes korpuskulära förklaringar spelade matematiken en viktig roll. Dock inte så som vi idag kanske skulle förvänta oss. Ett tydligt exempel på hur Descartes använde matematiken i sina förklaringar är följande citat. Efter att i helt kvalitativa termer ha beskrivit hur blod transporteras från venerna till artärerna, hur det värms och kyls, etc. skriver han:

> Now those who are ignorant of the force of mathematical demonstrations and unaccustomed to distinguishing true reasons from probable may be tempted to reject this explanation without examining it. To prevent this, I would advise them that the movement I have just explained follows from the mere arrangement of the parts

[1] Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, 14.
[2] Amos Funkenstein, *Theology and the scientific imagination from the Middle Ages to the seventeenth century* (Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1986), 3. Även Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, 51.
[3] Denna indelning ligger i linje med Kuhns distinktion mellan "klassiska" och "Baconianska" vetenskapliga traditioner i Thomas S. Kuhn, "Mathematical vesus Experimental Traditions in the Development of Physical Science," i *The Essential Tension*, red. Thomas S. Kuhn (Chicago och London: 1977), 58. Här skiljer han just mellan bland andra Descartes och Boyle. Kuhn menar att de nationella skillnaderna blev påtagliga först efter 1650.
[4] Se Dear, *Discipline & experience*, s. 212. Angående Descartes vetenskapliga metod se John A. Schuster, "Cartesian Method as Mythic Speech: A Diachronic and Structural Analysis," i *The politis and rhetoric of scientific method*, red. John A. Schuster och Richard R. Yeo (Dodrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986).
[5] Om Boyles relation till matematiken se Steven Shapin, "Robert Boyle and Mathematics: Reality, Representation, and Experimental Practice," *Science in Context* (1988); Steven Shapin, *A social history of truth: civility and science in seventeenth-century England, Science and its conceptual foundations*, (Chicago: Univ. of Chicago Press, 1994), [XX-XX].
[6] Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, 58.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

of the heart (which can be seen with the eye), from the heat in the heart (which can be felt with the fingers), and from the nature of the blood (which can be known through experience). This movement follows just as necessarily as the movement of a clock follows from the force, position, and shape of its counterweights and wheels.[1]

Matematiken används här som en retorisk resurs i ett sammanhang som vi idag knappast skulle förknippa med matematik. Väsentligt är att Descartes talar om *kraften* i matematiska bevis. Det är denna kraft han så att säga åberopar i argumentationen för sin teori om blodomloppet. De som känner till matematikens kraft, och därför kan skilja, som han skriver, sanna orsaker från blott troliga, kommer, menar han, inte att ha några svårigheter att se att hans teori är riktig.

Descartes insisterande på att naturen måste förklaras med hjälp av korpuskler och matematik låter sig lätt tolkas i termer av mitt teoretiska ramverk. Den mekanistiska naturfilosofin tog plats som en ersättning av en naturfilosofi huvudsakligen inspirerad av Aristoteles. Aristoteles menade att naturen väsentligen *är* så som den framträder för oss; så som den är "för det mesta", så som den ter sig för en människa med sunt förnuft under gynnsamma förutsättningar (inte mörkt, inte dimma, etc).[2] Mot detta ställde Descartes en natur som bara kan förstås av den som behärskar matematiken och som förstår han korpuskulära teori. Vad han gör kan med den engelske sociologen Paul Dowling beskrivas som en "rekontextulisering" av naturen i termer av den korpuskulära teorin. Istället för att säga att opium får oss att somna för att den har en sömngivande förmåga, säger han att opium har en korpuskulär mikrostruktur som påverkar vår fysiologiska struktur på ett sådant sätt att vi somnar. Han introducerar ett nytt sätt att tala, och menar att detta beskriver hur verkligheten *är*.[3] Han introducerar en ny bild av verkligheten, knuten till den framväxande vetenskapen i egenskap av social institution.

Men om Decartes inte tillför något *nytt* i sina förklaringar är givetvis en väsentlig fråga vad som gjorde hans förklaringar så övertygande. Ett grundligt svar på denna fråga presenterar vetenskapshistorikern John A. Schuster i artikeln "Cartesian Method as Mythic Speech: A Diachronic and Structural Analysis".[4] Schuster argumenterar för att anledningen till att Descartes syn på vetenskap – i synnerhet hans *metod* – fick så stor genomslag var att de erbjöd ett sätt inte minst för naturfilosoferna själva att tala om och förstå sin egen verksamhet på ett sätt som fick den att framstå som *rationell*.

Boyles matematik

En avgörande sida hos den förändring av synen på vetenskap som ägde rum under 1600-talet handlade om var som betraktades som en legitim grund för kunskap. Ian Hacking, och senare bland andra Peter Dear, har pekat på att *kunskap* – vetenskapens objekt – under 1500-talet ansågs som väsensskild från allt det som kunde observeras i den fysiska verkligheten. Dessa observationer utgjorde föremål för diskussion, tyckande och åsikter.[5] Hur "säkra" dessa observationer än tycktes vara, kunde de dock inte ta steget till att utgöra "vetenskaplig kunskap". Enligt den aristoteliska synen på vetenskap, var nämligen vetenskaplig kunskap något man nådde fram till genom att deduktion och genom att beskriva verkligheten med hjälp av rätt begrepp.[6] Åsikter å andra sidan, kunde vara mer eller mindre troliga. Hacking skriver:

[1] Den ursprungliga text som citeras finns i Descartes *Œvres* (1964-1976), vol. 6, p. 50. Den översattes till engelskan av Robert Stoothoff i Descartes, *The Philosophical Writings*, vol 1 (1985), s. 136. Denna översättning säger sig Peter Dear i viss modifierat i Dear, *Discipline & experience*, s. 212. varifrån jag hämtat citatet. Angående Descartes vetenskapliga metod se Schuster, "Cartesian Method as Mythic Speech: A Diachronic and Structural Analysis."

[2] Gaukroger, *Explanatory structures*, kapitel 4.

[3] För en definition av rekontextualisering, se Dowling, *The sociology of mathematics education: mathematical myths/pedagogic texts*, [rekontextualisering]. Liknande idéer, om hur vetenskapen i stor utsträckning kan ses som övertygande sätt att tala om naturen, finns i Paul K. Feyerabend, "Classical empiricism," i *The Methodological Heritage of NEWTON*, red. Robert E. Butts och John W. Davis (Oxford: Basil Blackwell, 1970). och Schuster, "Cartesian Method as Mythic Speech: A Diachronic and Structural Analysis." Exemplet med opium har jag hämtat från Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, 65. Descartes är säkert en av de Thomas Kuhn syftar på när han säger att naturfilosofins utveckling under första halvan av 1600-talet snarare bestod i ett man såg på naturen på ett nytt sätt (snarare än att man lärde sig "mer" om den) Kuhn, "Mathematical vesus Experimental Traditions in the Development of Physical Science," 46.

[4] Schuster, "Cartesian Method as Mythic Speech: A Diachronic and Structural Analysis."

[5] Ian Hacking, *The emergence of probability: a philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference* (London: Cambridge U.P., 1975), 18-31. Dear, *Mersenne and the learning of the schools*, [sida om kunskap vs. opinion].

[6] Hacking hänvisar här (på sidan 20) till Thomas Aquinas.

> The limit of increasing probability of opinion might be certain belief, but it is not knowledge: not because it lacks some missing ingredient, but because in general the objects of opinion are not the kinds of propositions that can be objects of knowledge.[1]

Den för oss kontraintuitiva konsekvensen av denna distinktion var att *praktisk erfarenhet* – en konkret upplevelse av att naturen uppfört sig på ett visst sätt vid en given tidpunkt – vid denna tidpunkt inte ansågs kunna bidra till vetenskaplig kunskap. Du kan ha sett något, hört något – och med detta som utgångspunkt tro det ena eller andra; men andra människor hade kanske sett andra motsägande saker. Personliga erfarenheter av naturen ansågs därför höra till det blott troligast domän. Vetenskapen handlade delvis om naturen, men den erfarenhetsmässiga grunden för denna vetenskap var, i linje med Aristoteles, hur naturen uppförde sig "för det mesta" – inte hur den betedde sig, eller än värre genom trixande kunde fås att bete sig, vid ett eller annat enstaka tillfälle. Man räknade tvärtom med att naturen ibland betedde sig märkligt. Detta kunde förklaras med hänvisning till någon typ av gudomligt ingripande – det ansågs inte sprida något ljus över hur naturen *är*.[2]

Peter Dear har i en rad böcker och artiklar beskrivit hur detta sätt att tänka om världen successivt förändrades under 1600-talet.[3] Framför allt i England tog en ny naturfilosofi form i vilken tvärtom erfarenheter av naturen och mer specifikt *experiment* gjordes till den vetenskapliga kunskapens grundval.[4] Detta fick avgörande konsekvenser för synen på matematikens plats i förhållande till vetenskaplig kunskap om naturen.

Steven Shapin har skrivit om Robert Boyles ställningstaganden i förhållande till matematiken, och visat att han tyckte att man om möjligt borde undvika matematik, och åtminstone inte skulle se matematisering som ett mål i sig, eftersom matematiken var svårbegriplig, och därmed stängde ute en mängd människor från att ta del av naturvetenskapens resultat.[5] Detta problem togs på allvar inte minst eftersom många menade att den tidigare "naturfilosofins ofta diagnostiserade sjukdom härrörde från dess överdrivet privata eller individualistiska karaktär".[6] Boyles ideal för naturvetenskapen var att den skulle sikta in sig på observationer och experiment som *alla* skulle kunna ta del av och förstå. Ju fler desto bättre. Vetenskapen skulle enligt Boyles ideal vara ett civiliserat *samtal om naturen* fokuserat på observationer och experiment. Till att börja med försökte man få så många som möjligt att i praktiken faktiskt bevittna genomförda experiment, för att i möjligaste mån undvika att kunskap baserades på den auktoritetstro som man inom den nya filosofin ville undvika. Detta visade sig dock i praktiken vara föga genomförbart. Man gick därför över till något som Shapin, tillsammans med sin medförfattare, vetenskapshistorikern Simon Shaffer, i deras bok *Leviathan and the air-pump* kallar "virtuellt bevittnande".[7] Detta innebär att experimenten beskrivs så noggrant att den som läser texten dels själv åtminstone i teorin skulle ha möjlighet att upprepa experimentet i fråga, men framför allt också skulle få en så levande bild av experimentet att han av detta skäl skulle hindras från att tvivla (men ändå inte tro på någon "auktoritet"). Till denna strategi för grundläggning av vetenskaplig kunskap hörde en slags personlig anspråkslöshet, en gentlemannamässighet, som innebar att naturen så att säga, genom de detaljerade beskrivningarna, fick *tala för sig själv*.

Detta förhållningssätt måste emellertid, menar Shapin, förstås som en retorisk strategi. Den kunskap som producerades av Boyle och hans anhängare, var i stor utsträckning baserade på *vilka det var som talade*, karaktäriserat dels av den personliga karaktären och det litterära framställningssättet, men kanske än mer väsentligt i termer av (förenklat) "birth and material circumstances".[8] Boyles filosofi var en filosofi för social ordning, denna skulle understödjas av osjälviskhet och civiliserad hövlighet.

Boyles variant av naturfilosofi var inspirerad av Bacon och som sådan intimt sammanvävd religiösa övertygelser. Ambitionen var, kan man säga, att med hjälp av naturvetenskapen understödja ett socialt projekt med syfte att behärska naturen. I förhållande till den svenska matematiska diskursen är det viktigt att detta projekt bestod i att:

---

1 Hacking, *The emergence of probability*, 22.
2 Dear, "Jesuit mathematical science and the reconstitution of experience in the early secenteenth century," 145.
3 Ibid; Dear, *Mersenne and the learning of the schools*; Dear, *Discipline & experience*.
4 Se Shapin, "Robert Boyle and Mathematics."; Shapin, *A social history of truth*; Shapin, Schaffer, och Hobbes, *Leviathan and the air-pump: Hobbes, Boyle, and the experimental life: including a translation of Thomas Hobbes, Dialogus physicus de natura aeris by Simon Schaffer*.
5 Shapin, *A social history of truth*, 335-37. Shapin, "Robert Boyle and Mathematics."
6 Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, 114.
7 Shapin, Schaffer, och Hobbes, *Leviathan and the air-pump: Hobbes, Boyle, and the experimental life: including a translation of Thomas Hobbes, Dialogus physicus de natura aeris by Simon Schaffer*, 60-65.
8 Shapin, *A social history of truth*, xxvii.

> samla ihop den tidigare icke kodifierade kunskap som fanns inom olika yrken och hantverk, och med filosofisk noggrannhet undersöka denna kunskap och sedan försöka återföra en förbättrad, mer användbar version till de praktiska verksamhetsområdena.[1]

Med vetenskapens hjälp skulle alltså hantverken förbättras och ny teknik produceras.

Boyles ideal och den praktik genom vilken han och hans anhängare försökte realisera dem kontrasterar skarpt mot Newtons sätt att förstå naturfilosofins metod. Viktigt i detta sammanhang är att Boyle såg som sin huvudsakliga uppgift att bekämpa *dogmatism*. Av denna anledning betonade han alltid vikten av att försiktighet, att undvika spekulation och överdrivna anspråk. Boyle menade att matematik i och för sig kunde vara ett användbart redskap i vissa sammanhang, men att man måste akta sig för att förväxla matematikens idealiseringar med hur verkligheten faktiskt *är*. Newton hade inget till övers för denna anspråkslöshet. Han menade tvärtom att verkligheten *är* en maskin som låter sig beskrivas med hjälp av matematik. Hur denna maskin fungerade beskrev han 1687 i sin *The Principia : mathematical principles of natural philosophy*.

Newtons matematik

Newton uttryckte förnöjsamhet över naturens outgrundlighet.[2] Flera av hans samtida anklagade honom också för att återinföra "ockulta principer" i naturfilosofin.[3] *Principia* hade ingen större spridning – i sin helhet lästes den förmodligen av färre än hundra personer, och av dessa var det bara en handfull som hade förutsättningar att förstå innehållet.[4] Inte desto mindre kom denna bok, tillsammans med sin författare Newton, att bli föremål för vad som närmast kan beskrivas som en kult.[5] Hur är detta möjligt?

I diskussionen rörande Newtons matematik vävdes frågor rörande epistemologi, ontologi och religion samman, och för att man skall kunna förstå varför Newtons matematiska naturfilosofi kunde bli så kraftfull måste man dessutom anlägga ett sociologiskt perspektiv på diskussionen.

Vad gäller den epistemologiska dimensionen kan lägga märke till att Newtons matematiska naturfilosofi förde med sig en förskjutning av vad det innebar att "förklara" ett naturfenomen. Descartes och hans anhängare ville att naturen skulle gå att förklara i sin helhet med hänvisning till mekanistiska principer. Detta synsätt innebar till exempel att Newtons gravitation inte utan vidare kunde accepteras. Även om man kunde konstatera att Newtons *beskrivning* till exempel av planeternas rörelser var riktig, innebar inte detta att den därför också måste betraktas som ett stycke bra naturfilosofi. Enligt deras kriterier hade han nämligen inte *förklarat* varför de rör sig på detta sätt. Johann Bernoulli skrev:

> Some may be surprised that I am bold enough to introduce celestial whirlpools at a time when many philosophers, particularly the English, consider them pure chimeras and only mention them with contempt. The learned *Company*, to which I submit my thoughts, will judge whither it is right to condemn a system built upon clear and intelligible principles and replace it by one that rests upon principles of which we can form no idea. It seems to me that in physics this is a sufficient reason to reject such a system, even if it were so well devised that it accounted for all the phenomena.[6]

Här framgår väldigt tydligt skillnaden mellan Descartes "klara och tydliga" idéer, vilka skulle ligga till grund för vetenskapen, och Newtons ideal i vilket outgrundlighet hade en given plats. Frågan gäller uppenbarligen vad som skall räknas som meningsfull vetenskaplig kunskap. För Newton räckte en matematisk modell. Descartes ville att matematiken också skulle vara *begriplig*. Hans ideal var Euklides *Elementa*. Där kunde man följa den exakta kunskapens stegvisa deduktiva uppbyggnad. Den nya matematiken framstod för Cartesianerna som en *teknik*, för att lösa matematiska problem och för att beskriva naturen,

---

[1] Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen,* 147.
[2] Ibid., 165.
[3] Ibid., 71.
[4] Ibid., 130.
[5] Gascoigne, "From Bentley to the Victorians," 221.
[6] Johann Bernoulli, "Nouvelle pensées sur le système de M. Descartes," i *Opera Omnia* (Geneva 1742) citerad i William R. Shea, "The Unfinished Revolution: Johann Bernoulli (1667-1748) and the Debate Between the Cartesians and the Newtonians," i *Revolutions in science: their meaning and relevance*, red. William R. Shea, et al. (Canton, MA: Science History Publications/U.S.A, 1988), 75.

men den ledde inte, menade de, till bättre *förståelse*. Matematikens utveckling framstod för dem som en teknikens triumf på förståelsens bekostnad.[1]

Den epistemologiska frågan hänger intimt samman med frågan om vad det är som skall förklaras, vad verkligheten *är*. Många som riktade kritik mot matematiken menade att det helt enkelt var meningslöst att, som Newton och andra, försöka uppnå matematisk precision i beskrivningar av verkligheten.[2] Gringas citerar Castel som försöker upprätthålla skillnaden mellan geometri och fysik:

> Geometry is geometry only through the abstract simplicity of its object. Only that makes it certain and demonstrative. The object of physics is much vaster. That is what makes it difficult, uncertain and obscure. But this is essential to it: one is not a better physicist because one is the best of geometers.[3]

Robert Boyle tillhörde dem som inte såg naturen som i sig matematisk. Han menade att matematiken var ett språk med vars hjälp man i och för sig kunde beskriva en idealiserad värld, men att någon sådan värld *inte existerade*. Av denna anledning borde inte matematiken utgör ett privilegierat språk för att tala om naturen. Enligt Boyle utgör inte det faktum att en beskrivning är matematisk ett stöd för att den också är "sann", snarare *kan* en matematisk beskrivning inte vara sann, eftersom den handlar om något annat än verkligheten.[4]

Diskussionen hade också en tydligt religiös dimension. Newton var nämligen helt klar över att hans matematiska beskrivning av verkligheten inte var, så att säga, sig själv nog. Enligt de matematiska principerna skulle världen inte kunna existera så som den faktiskt gör. Den mekaniska, matematiserade, beskrivningen av världen utgjorde emellertid bara en sida av Newtons system. Den andra sidan var religiös. Och det var just *bristen* i den matematiska beskrivningen som lämnade en öppning för religionen. "One of the most distinctive features of British intellectual life in the eighteenth century, and in much of the nineteenth", skriver historikern John Gasgoigne, "was the extent to which science was seen to be allied to the cause of religion".[5] Newtons *Principia* utgjorde till stor del utgångspunkten för denna förening. Newton skrev nämligen:

> This most elegant system of the sun, planets, and comets could not have arisen without the design and dominion of an intelligent and powerful being. [...] He rules all things, not as the world soul but as the lord of all.[6]

På detta sätt gav hans naturfilosofi stöd åt vad man kallar en "voluntaristisk" uppfattning om Gud, det vill säga att Gud kontinuerligt griper in i världens förlopp. I samma utsträckning som man blev övertygad om att Newtons matematiska beskrivningar var riktiga, var man därmed mer eller mindre tvungen att också acceptera Guds ständiga ingripande som ett "vetenskapligt" faktum. Detta passade givetvis kyrkans män ypperligt, och det togs i England för givet att naturfilosofins uppgift var att stödja kristendomen. I och med detta kom naturfilosofens roll att i stor utsträckning överlappade med prästens. Prästerna hade monopol på legitim tolkning av Skriften, det vill säga den aspekt av Newtons system som matematiken inte gjorde reda för. Naturfilosoferna fick ett motsvarande monopol på att tolka (den matematiska) naturen.[7]

Denna arbetsdelning fick betydande konsekvenser för hur man i England på 1800-talet talade om värdet av matematiska studier. Att förstå naturen – det vill säga att förstå dess matematiska essens – kom nämligen att betraktas som ett sätt att lära känna Gud. Joan L. Richards förklarar att idéerna som länkar samman kunskap om naturen med kunskap om Gud fick ett inflytelserikt uttryck i John Lockes *Essay concerning human understanding* från 1690. Locke menade att även om Guds existens är "the most obvious truth that reason discovers", så måste vi ändå försöka härleda – deducera – denna existens från någon del av vår intuitiva kunskap, på samma sätt som vi måste härleda matematiska sanningar, även om vi vet att de är sanna. Det Lock beskriver är, kan man säga, skillnaden mellan att *utgå* från att matematikens

---

[1] Michael S. Mahoney, "Changing Canons of Mathematical and Physical Intelligibility in the Later 17th Century," *Historia Mathematica* 11 (1984): 421. Se även John Pappas, "L'Esprit de finesse contre l'esprit de géometrie: en débat entre Diderot et Alembert," *Studies on Voltaire and the eighteenth century* LXXXIX (1972). och Yves Gringas, "What did mathematics do to physics?" *History of Science* 39 (2001): 385.
[2] Gringas, "What did mathematics do to physics?" 389.
[3] Père Louis Castel, *Vrai système de physique générale de M. Isaac Newton. A la portée du commun des physiciens* (Paris, 1743): 304, citerad i Ibid.: 401.
[4] Shapin, "Robert Boyle and Mathematics."
[5] Gascoigne, "From Bentley to the Victorians," 219.
[6] Isaac Newton, I. Bernard Cohen, och Anne Miller Whitman, *The Principia: mathematical principles of natural philosophy* (Berkeley, Calif.: University of California Press, [1687]1999), 940.
[7] Shapin, *Den vetenskapliga revolutionen*, 160.

sanningar faktiskt är sanna (något icke-matematiker är mer eller mindre tvungna att göra), och den upplevelse av denna sanning som följer av att faktiskt *förstå* ett matematiskt bevis. Skillnaden ligger i själva *upplevelsen*, och det var genom denna upplevelse som matematik och Gud kopplades samman av Locke. Han menade att upplevelsen av en matematisk sanning var *av samma slag* som upplevelsen av Guds existens.[1] Väsentligt är att detta var en upplevelse av *begränsning*, av, kan man säga, bävan, inför Guds allmakt.

Låt mig nu slutligen komma till den sociala dimensionen av den matematiska syn på världen som kom att förknippas med Newtons *Principia*. Newtons matematik kom att förknippas med outgrundlighet. Hon honom hade denna outgrundlighet en social dimension – hos många samtida och senare matematiker, i synnerhet i Frankrike, hade den inte det. Det väsentliga är för mina syften att matematiken framstod som outgrundlig *för de allra flesta*. I förhållande till samhället som helhet kom matematiken därmed, från början av 1700-talet, att konstituera en *gräns*. Gringas skriver att: "during the eighteenth century a boundary was slowly being established between those who were technically competent to discuss physical problems and those who were accustomed to explaining the 'causes' of phenomena in verbal terms".[2] Det var, skriver Gringas, själva rätten att uttrycka en åsikt som matematiseringen av naturfilosofin kom att begränsa:

> The outsiders, having to content themselves with a superficial understanding of what was really going on, could no longer be considered legitimate active participants and contributors to a now esoteric (as opposed to exoteric) field of knowledge.[3]

I och med detta kom matematiken, från början av 1700-talet, att utgöra vad man med Bourdieu kan kalla en form av *symboliskt kapital*. Att den vetenskapliga matematiken var (och är) relativt svår att bemästra, garanterade att kapitalformen fick en begränsad spridning. Matematikens konnotationer, religiösa i vissa sammanhang, sekulära i andra, gav de matematiska kunskaperna ett socialt erkänt värde.

Väsentligt är här att det var just på grund av att matematiken framstod som så obegriplig för de allra flesta, som den kunde framstå som så kraftfull. Gringas citerar en Ernst Brücke, som beskriver matematiken som "those wonder-working symbols whose brief rhetoric speaks more convincingly to the mind than the tongue of Cicero or Demosthenes".[4] Det ligger nära till hands att med hänvisning till ett psykoanalytiskt ramverk förstå den matematiska symbolismen som ett tomrum, en öppning för identifikationer. Den som inte förstår matematiken tillskriver den mening med utgångspunkt från det diskursiva sammanhang matematiken tillhör, ett sammanhang som inte minst konstituerades genom skolornas matematikundervisning. Det första målet med denna matematikundervisningen var därmed – om man betraktar det hela utifrån ett sociologiskt funktionalistiskt perspektiv – inte att eleverna lärde sig bemästra matematiken. Detta var knappast ens önskvärt. Det viktiga målet var att få eleverna att förstå vad matematik "är", och inte minst förstå dess stora betydelse. Stöd för denna tolkning ges av att två av skolmatematikens främsta kännetecken sedan 1700-talet varit, dels ett betonande av att det väsentliga inte är att eleverna lär sig behärska så stor del av den vetenskapliga matematiken som möjligt, utan istället "ett grundligare studium af den del som läres", som det står i 1820 års skolordning;[5] dels ett intensivt manande om att eleverna skall bli intresserade av matematiken och förstå dess stora betydelse och värde.[6]

Den kan vara värt att nämna att det fortfarande finns ett levande motstånd mot föreställningen att matematiken utgör en outgrundlig sanning om naturens väsen. Dess främste representant idag är troligtvis vetenskapsteoretikern Nancy Cartwright. I sin *How the laws of physics lie* presenterar hon argument inte helt olika de som anfördes mot Newton.[7] Cartwright menar att vår moderna syn på vetenskap karaktäriseras av ett bortseende från att naturlagarna faktiskt inte utgör, och inte kan utgöra, exakta beskrivningar av verkligheten.[8] I en senare bok argumenterar hon, helt i linje med många av Newtons kritiker, för att natu-

---

[1] Richards, 51-52.
[2] Gringas, "What did mathematics do to physics?" 388.
[3] Ibid.: 393.
[4] Ibid.: 397.
[5] *Anvisningar och råd till lärare, om sättet att verkställa hvad Kongl.: Maj:t i nåder uti skol-ordningen af den 16 Dec. 1820 stadgat och anbefallt. Bihang till uppfostrings-comiteens underdåniga förslag till skol-lag.Sthlm 1821*, (<S.l.>), 31.
[6] Med Bourdieu kan man säga att skolmatematiken syftade till att konstituera ett konsumptionsfält för matematisk kompetens som symboliskt kapital. En relevant diskussion av fenomenet, dock inte specifikt knuten till matematik, finns i Magali Sarfatti Larson, "In the matter of experts and professionals, or How impossible it is to leave nothing unsaid," i *The formation of professions: Knowledge, state and strategy*, red. Rolf Torstendahl och Michael Burrage (London: 1990).
[7] Nancy Cartwright, *How the laws of physics lie* (Oxford: Clarendon Press, 1983).
[8] Ibid., 54-59.

ren *till sin essens* inte låter sig beskrivas med hjälp av matematik.[1] Matematiken bör, menar Cartwright, betraktas som ett verktyg, det vill säga som en teknik. Det hon vänder sig mot är att de enklaste matematiska "naturlagarna", vilka de facto stämmer *sämst* med hur verkligheten faktiskt är, framställs som fundamentala *sanningar* om verkligheten, enligt principen: ju enklare matematisk formulering, desto mer "sann".

Wolffs matematik

Stort inflytande på de svenska läroboksförfattare jag strax skall komma till hade den tyska filosofen Christan Wolff. I sin metafysik gjorde han den matematiska metoden till grunden för all mänsklig kunskap. Han framställde den som ett slags universalrecept; den gemensamma nämnaren för alla vetenskaper.[2] Han menade att världen var *i sig matematisk*, och att den matematiska metoden därför var det bästa sättet att få kunskap om denna värld.

Liksom Newton ville Wolff visa hur naturfilosofin gav stöd åt den kristna tron. Hans metafysik utgjorde en rationell teologi.[3] Denna kunde delas in i ontoteologi, kosmoteologi och fysikoteologi. Alla dessa grenar av den rationella teologin gick ut på att bevisa Guds existens. Ontoteologin syftade till att argumentera för Guds existens som "the absolutely supreme being" genom endast rationell logisk analys.[4] Kosmoteologin gick istället ut på att argumentera för Guds existens med utgångspunkt från vårt kosmos så som det är ("the contingency of the world"). Inom Fysikoteologin, slutligen, byggde argumentationen för Guds existens på någon viss given del av kosmos (till exempel en snigel eller en sten). Den utgjorde därmed en länk mellan metafysik och fysik.[5] Utgångspunkten för fysikoteologin var att Gud är en sorts hantverkare, och att man med utgångspunkt från verklighetens fulländning kan dra slutsatser om denne hantverkares egenskaper. Wolff startade med sitt verk *Vernüfftige Gedancken von den Absichten der natürichen Dinge* (1724) en våg av just fysikoteologi i Tyskland. Det skrevs böcker som argumenterade för Gud med utgångspunkt från: tulpanen, rosen, gräset, elden, vattnet, snön, stenen, insekten, snigeln, gräshoppan, fisken, plantan, biet, fågeln.[6]

Euler, tidens mest framstående matematiker, ägnade stor energi åt att plocka sönder Wolffs metafysik, något Wolff tycke var både sorgligt och onödigt. Matematiker borde, menade han, ägna sig åt matematik, inte metafysik. Detta innebär inte att Euler, eller någon annan vid denna tid eller senare, skulle ha varit i någon mening "fria" från metafysiska antaganden.[7]

Den av Wolffs böcker som tycks ha haft störst inflytande i Sverige är hans *Auszug aus den Anfangs-Gründen aller Mathematischen Wissenschafften*.[8] Denna boks struktur säger något viktigt om den roll matematiken och den matematiska metoden spelade för Wolff. Här följs nämligen aritmetik av trigonometri och geometri, och sedan: mekanik, hydrostatik, verometrik, hydraulik, optik, catoptrik, dioptrik, perspektiv, astronomi, geografi, kronologi, knomonik, artilleri, fortifikation, byggkonst och slutligen algebra. Uppräkningen syftade till att täcka in hela tidens naturvetenskap. Verometrik är till exempel läran om luftpumpar, den typ av maskiner som Robert Boyle är mest känd för, och avsnittet innehåller en beskrivning av hur man bygger en luftpump. Beskrivningen är, liksom alla andra beskrivningar i denna bok, framställd i termer av satser och bevis. Till formen följer den Euklides Elementa. *Det var på detta sätt som den* matema*tiska metoden utgjorde sammanbindande länk mellan det vetenskapliga vetandets alla områden.* Wolff menade att världen till sin natur var matematisk, och att den matematiska metoden därför utgjorde vägen framför andra till vetande om denna värld. I detta perspektiv framstod därför en omformulering av vetande i matematiska termer som ett sätt att göra vetande vetenskapligt. Shapin talar i sin ana-

---

[1] Nancy Cartwright, *The dappled world: a study of the boundaries of science* (Cambridge: Cambridge University Press, 1999).
[2] Tore Frängsmyr, John L. Heilbron, och Robin E. Rider, *The quantifying spirit in the 18th century, Uppsala studies in history of science, 7* (Berkeley; Los Angeles; Oxford: Univ. of California Press, 1990), s. 34.
[3] William Clark, "The Death of Metaphysics in Enlightened Prussia," i *The Sciences in Enlightened Europe*, red. William; Golinski Clark, Jan; Schaffer, Simon (Chicago & London: The University of Chicago Press, 1999), s. 432-35.
[4] Ibid., s. 433.
[5] Ibid.
[6] Ibid., s. 434.
[7] Ibid., s. 443. Euler var snarast Cartesian, i opposition mot både å ena sidan Wolff och å andra sidan Newton. Se Shea, "The Unfinished Revolution: Johann Bernoulli (1667-1748) and the Debate Between the Cartesians and the Newtonians." för en spännande redogörelse för argumentationen mellan Cartesianer och Newtonianer angående planeternas rörelser. Samma typ av meningsskiljaktigheter står även i fokus i Gringas, "What did mathematics do to physics?"
[8] Christian von Wolff, *Auszug aus den Anfangs-Gründen aller Mathematischen Wissenschafften: zu bequemerem gebrauche der Anfänger auf Begehren verfertiget*, Neue Aufl. verb. und mit einem Register verm. utg. (Franckfurt und Leipzig. MDCCXLIII: [1713] 1743).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

lys av Boyles relation till matematiken mycket om *språk*, och att vilket språk man anser lämpligt för att beskriva något bestäms av föreställningar om vad detta något *är*. Boyle såg inte verkligheten som "till sin natur" matematisk, utan matematiken som ett i vissa sammanhang användbart verktyg. Matematiken utgjorde för honom och många andra en mänsklig konstruktion som med nödvändighet aldrig kunde så att säga nå fram till verkligheten själv.[1] Utifrån detta perspektiv innebar matematisering därför en uppenbar risk att missa det som är mest väsentligt. Wolff identifierade tvärtom verklighetens essens med matematiken, vilket betydde att i den mån den matematiserade beskrivningen utgjorde en idealisering, så låg denna idealisering närmare sanningen om verkligheten än verkligheten själv, så som den framträder för oss. För Wolff utgjorde den matematiska metoden, det matematiska språket, det bästa sättet att beskriva verkligheten, eftersom hans föreställning om det objekt som skulle beskrivas formats med utgångspunkt från matematiken.

3.2. Den svenska diskursen rörande matematik och utbildning kring mitten av 1700-talet

Den svenska matematiska diskursen var under första halvan av 1700-talet kraftigt influerad av den tyske filosofen Christian Wolff och i hans metafysiska system var matematiken intimt sammanvävd med vad han menade var verklighetens gudomliga essens.[2] Till detta kom ett mer allmänt inflytande från England, där Newtons *Principia* hyllades som en vetenskaplig garant för den kristna religionens anspråk på sanning. Vid sidan om denna sammanvävning av matematik med religion, hyllades emellertid matematiken även som praktiskt nyttig i flera avseenden, och det är dessa anspråk som tog störst plats i den svenska diskussionen.

Jag skall här begränsa mig till texter författade av Anders Celsius (1701-1744), Mårten Strömer (1707-1770) och Fredric Palmqvist (1720-1771). De var alla verksamma i Uppsala, och var alla vad Tore Frängsmyr kallar "Wolffianer", det vill säga influerade av Christian Wolff.[3] Denna avgränsning innebär att min redogörelse för vad jag kallar "den matematiska diskursen" givetvis inte är representativ för Sverige som helhet. Å andra sidan tycks det i stor utsträckning ha varit genom Uppsala och wolffianismen som matematiken, i den bemärkelse som beskrivits ovan, importerades till Sverige. Mårten Strömer skrev den första (och särklassigt mest inflytelserika) översättningen av Euklides *Elementa*. Celsius författade den första "matematiserade" räkneläran. Fredric Palmqvist skrev den första bok på svenska som uteslutande handlade om algebra. Det finns därför skäl att ägna särskild uppmärksamhet åt de argument som just dessa män anförde till matematikens fördel, och mer allmänt den wolffianska diskurs som fördes i Uppsala vid denna tid.

Typisk för den matematiska diskursen, då som nu, är att den innehåller en tät väv av påståenden om matematiken vilka tillsammans konstituerar matematiken som ett objekt med en mängd sammanhängande egenskaper. Översiktligt kan man emellertid i diskursen så som den framträder i Wolffianisternas texter under första halvan av 1700-talet särskilja tre olika sätt att argumentera för värdet av matematiska studier.

För det första med hänvisning till matematikens nytta för vetenskaperna och det praktiska livet. Fredric Palmqvist höll 1754 ett *Tal Om Mathematiska Vetenskapernas nytta i allmänna lefvernet.*[4] I talet går han igenom det "praktiska lefvernets" olika sidor. På ett sätt typiskt för den matematiska diskursen beskriver han det praktiska livet som till sitt väsen matematiskt, och menar att det därför kan *förbättras* med hjälp av matematik. Han skriver:

> Ty, om vi icke ägde en säker kunskap uti den delen, som kallas *Vulgaris-Arithmetik*, huru skulle en Regering eller dess ombud veta, när en undersåtare ärlagt den skatt, som honom vederbör? Huru skulle Köpare och Säljare kunna med godt samvete skiljas ifrån hvarandra? Huru skulle en Handlande veta tillståndet och nyttan af sin handel, så väl i anseende til honom sjelf, som i anseende til dess fädernesland. Huru skulle en, som

---

[1] Till exempel skrev den franska matematikern och fysikern Jean-Baptiste Biot så sent som 1816 att "Many of [the English scientists], who are very skilled and very exact, believe that the precision that we [french] think we approach [using calculations] is purely ideal, since it goes infinitely beyond the limits to which these experiments are inevitably subjected" Gringas, "What did mathematics do to physics?" 395-96.

[2] Tore Frängsmyr, *Wolffianismens genombrott i Uppsala: frihetstida universitetsfilosofi till 1700-talets mitt, Skrifter utgivna till Uppsala universitets 500-årsjubileum. 2, Studier, 3* (Uppsala: 1972).

[3] Ibid.

[4] Fredrik Palmqvist, *Tal, om mathematiska vetenskapernas nytta i allmänna lefvernet* (Stockholm: 1754).

> styrer och uppehåller många arbetare, kunna döma, hvad fördel hans myror draga til honom och til hans fädernesland?[1]

Det som gör det möjligt för en regering att veta om undersåtarna erlagt rätt skatt, för köpare och säljare att med gott samvete att skiljas från varandra och så vidare är, enligt Palmqvist, matematiken. Samma tankegångar kommer till uttryck i förordet till Mårten Strömers översättning av Euklides *Elementa*. Det inleds med följande mening:

> En stor del af Krigsvetenskapen i våra tider, Seglations- Bergs – och Landtmätare-vetenskaperna, med flere, grunda sig på Mathematiska principer; och således måste de, som med ämbetens bestridande härvid hafva at beställa, vara uti Mathematiken förfarne, om de skola grundligen förstå det, som til deras göromål hörer.[2]

Strömer skriver att vetenskaperna "grunda sig på Mathematiska principer", och av denna anledning utgör förståelse av matematiken en förutsättning för att förstå vetenskaperna.

För det andra menade man att matematikstudier gjorde att man lärde sig "tänka redigt". Inom den matematiska diskursen intog förståelse en särskild plats. Att förstå matematik inte enbart att så att säga behärska ett visst matematiskt stoff. Förståelse flöt samman med en mer allmän förmåga att tänka. Tanken som ofta kom till uttryck var att *övande* på matematik skulle leda till två sammanhängande men olika mål: å ena sidan till ett behärskande av matematiken, å andra sidan till ett formande av själva förmågan att tänka. Ingen lär väl neka, skrev någon av Wolffianerna i Uppsala, "at de härlige mathematiske wettenskaper äro kiällan och uhrsprunget til alla ädla kunskaper och öfningar', och att man med matematikens hjälp kan man uppöva tankeskärpan 'ungefär som man stärker sin kropp med 'exercitier'".[3]

Hur man såg på denna sida av matematiken framgår tydligt i texten *Samtal emellan en Herre och en Fru om geometriens nytta för unga studerande* från 1743.[4] Intressant är att denna text är utformad som ett bemötande av en skepsis inför matematiken, vilket utgör en påminnelse om att matematik vid denna tid var en nyhet, och inte som idag hade en given plats som vetenskapens kärna. Texten är ett samtal mellan en Fru och en Herre. Dessa talar om fruns man och deras son. Sonen har tydligen blivit tvungen att läsa matematik i skolan. Mannen motsätter sig detta, medan frun är försiktigt positiv till matematiken. Herren fungerar som matematikens talesman.

Texten inleds med en redogörelse för mannens skepsis. Frun rapporterar att han talat om det "fåfänga" i att "plåga [sonen] med trianglar och cirklar, samt annat grillerväsende", att mannen fruktar att matematiken skall sonen "förvirrad" snarare än klokare.[5] Till detta lägger Frun erfarenheten av ett möte men "en viss Mathematicus", vilken tydligen var "något underlig".[6] Mannen menade givetvis att detta borde ses som ett tecken på matematikstudiernas negativa effekter. Frun menade istället att detta nog inte borde läggas matematiken till last, utan kanske berodde på att han "suttit för mycket inne i enslighet och speculerat på sina figurr; hvarutaf han blifvit ovan at umgås med annat folk".[7] Intressant nog ser man här ett uttryck för en stereotyp bild av matematiker som lever vidare än idag. Fruns fråga är emellertid: Varför är geometri "nödig för unga studerande"?[8]

En viktig komponent i argumentationen för matematikstudier utgörs av en kritik mot de klassiska språken. Det borde räcka, säger Herren, att man lärde sig läsa "en latinsk bok", och för detta behöver man inte "upoffra hela sin bästa ungdomstid, som nu gemenligen skier, utan i det stället kunde man lära monga nödiga och nyttiga vetenskaper".[9] Samtalet leder sedan in på en jämförelse mellan matematik och logik. Argumentet går här ut på att logiken i och för sig innehåller bra regler, men att dessa regler endast utgör så att säga *objekt* för tänkandet, och att man därför "vid monga tilfällen aldrig komma ihog dessa reglor; utan giöra som oftast falska slutsatser: taga saken på galen fot, och invekla det ena med det andra i största

---

[1] Ibid.
[2] Mårten Strömer, *De Sex Första Jämte Ellofte och Tolfte Böckerna Af Euclidis Elementa, eller grundeliga inledning til geometrien, til Svenska ungdomens tjänst utgifne af Mårten Strömer, För detta Astronomie professor i Uppsala, och Ledamot af Kongl. Vetensk. Acad. i Stockholm och Societ. R. Lit. et Scient. i Uppsala.* (Stockholm: 1800 [1744]), 2. Bortsett från en viss modernisering av stavningen är förordet i upplagan tryckt 1800 som jag använder identiskt med det i första upplagan från 1744.
[3] Frängsmyr, *Wolffianismens genombrott i Uppsala: frihetstida universitetsfilosofi till 1700-talets mitt*, s. 65.
[4] *Samtal emellan en Herre och en Fru om geometriens nytta för unga studerande*, (Stockholm: Lars Salvius, 1743), (författare saknas).
[5] Ibid., 3-4.
[6] Ibid., 4.
[7] Ibid.
[8] Ibid.
[9] Ibid., 6.

confusion".[1] Det som behövs är istället en *övning i att tänka,* och det är exakt det som matematiken erbjuder. Genom att studera Euklides *Elementa* skaffar man sig, menar Herren, "en habitude, at sluta förnuftigt om all ting".[2]

Samma jämförelse mellan matematik och logik kommer till uttryck i förordet till Anders Celsius *Arithmetik eller Räkne-Konst*. Celsius skriver först att de som "med tiden tänker tiena sitt Fädernesland" bör se till att han "förwärfvar sig en färdighet i förståndet" genom att ta del av en "grundelig wetenskap". Vad man då först tänker på är, tror Celsius, en "Logica eller Förnufts Lära". Men även om en sådan i och för sig föreskriver kloka "reglor och maximes" så är detta, menar Celsius, likväl till föga nytta. För det som krävs är "en habitus eller färdighet, at skilja det wissa från det owissa", och detta kan man bara får genom "stadig öfning och practicerande af de reglor, som Förnufts Läran gifwer wid handen", det vill säga av flitigt studerande av matematiken. På så sätt *vänjer man sig* "wid klara och tydeliga begrep eller definitioner".[3]

För det tredje argumenterade man för matematikstudier med hänvisning till dess moraliska effekter. Även om en förmåga att "tänka redigt" som matematiken skulle bibringa sina adepter i första hand ansågs konstituera ett sorts epistemologiskt försprång i förhållande till de som inte kände till vetenskapernas och praktikernas underliggande principer, hängde den även samman med frågor rörande moral och etik. Celsius talar om att "ställa sina tankar efter en förnuftig ordning" och att "finna en smak och nöje i demonstrationer".[4] På så sätt hoppades han att de skulle bli "sedigare och dygdigare". Celsius talar även om matematiken i termer av sanning. Matematiken, eller mer exakt matematikerna, har nu, menar han, "lika såsom borttagit det medfödda täckelset för våra förstånds ögon", så att vi nu med våra "uptäkta ögon se sanningen klarare uti de saker, som ännu äro af ovissheten förmörkade". Detta hoppas han skall leda till att "de andra vetenskaperna" skall bringas till större visshet, och inte minst

> at intet så monga stridigheter i bland de Lärda skulle upkomma: intet så monga ogrundade inkast giöras emot sanningen: intet höras så monga beropa sig allenast på auctoritet, utan att tänka sielfva efter, om det är sant eller osant, hvad en annan sagt eller skrifvit [...][5]

Här finns med andra ord ett explicit budskap rörande social ordning. Man skall, skriver Celsius, "tänka själv".[6] Väsentligt är emellertid att detta självständiga tänkande skall vara ett resultat av övande på matematik. Matematiken konstituerar enligt Celsius själva förmågan till självständighet. Denna självständighet kan därmed uppenbarligen inte ta matematiken som objekt för sitt tänkande. Den självständighet som Celsius hoppas skall leda till att "intet så monga ogrundade inkast giöras emot sanningen" skall ta matematiken som utgångspunkt.[7]

Genom dessa tre typer av argument konstituerades matematiken i början av 1700-talet som ett objekt med en rik uppsättning egenskaper. Väsentligen importerades detta objekt till Sverige från övriga Europa, det formades inte i Sverige. Annorlunda var det med räknekonsten, som vid 1700-talet kom till uttryck i en i viss mån autonom svensk litterär genre. Av denna anledning kan man i Sverige säga att ett *möte* mellan matematiken och räknekonsten ägde rum under första halvan av 1700-talet. Jag skall nu gå vidare med en beskrivning av de uttryck detta möte tog sig.

3.3. Mötet mellan räknekonsten och matematiken

Vad fick den syn på matematik som hörs hos Celsius, Strömer och Palmqvist för konsekvenser för den undervisning i matematik som bedrevs vid svenska läroverk och i andra sammanhang? Man kan här se en viss parallellitet i förhållande till den betydelse Clavius hade under 1600-talet. Förebilderna är nu istället Christian Wolffs *Auszug Aus den Anfangs-Grunden Aller Mathematischen Wissenschafften, zu Bequeme-*

[1] Ibid., 12.
[2] Ibid., 13.
[3] Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-Konst,* förord.
[4] Ibid., 2-3.
[5] Ibid., 3.
[6] Ibid.
[7] Denna syn på sanning kan kontrasteras mot den som beskrivs i Shapin, *A social history of truth*. Shapin beskriver hur frågan om huruvida något var *sant* under 1600-talets england var sammanvävd med *vem* det var som påstod att det var på ett visst sätt. Sannolikt var det en "sanningsdiskurs" liknande den Shapin beskriver som Celsius vände sig mot. Till saken hör att matematik inte värderades särskilt högt i de sociala kretsar Shapin fokuserar.

rem Gebrauche Der Anfänger från 1713,[1] tillsammans med olika utgåvor och översättningar av Euklides Elementa.

Ända fram till 1960-talet har man inom svensk grundläggande undervisningen i matematik skiljt mellan å ena sidan geometri, och å andra sidan räkning. Denna åtskillnad speglar ganska exakt matematikens två ursprung: det ena i antikens Grekland, det andra i räknekonsten. Vad gäller den svenska skolmatematiken kom det antika ursprunget att representeras av Euklides *Elementa*. Denna bok utgjorde under 1700-talet ett matematiskt ideal. Den "matematisering" av räknelärorna som jag strax skall komma till kan ses som ett försök att passa in räknelärornas stoff i den mall för framställningssätt som Euklides *Elementa* utgör. Jag skall därför börja med en beskrivning av Strömers översättning av Euklides *Elementa* (även om den första "matematiserade räkneläran" publicerades innan denna översättning).

Strömers Euklides

Det finns inte många likheter mellan Strömers översättning av Euklides *Elementa* och de svenska räknelärorna. Eftersom man brukar se dem som två "grenar" av matematiken, finns det anledning att poängtera detta. Euklides *Elementa* består av "satser" och "bevis", det vill säga en mängd påståenden, vilka på olika sätt "bevisas", vilket är något helt annat än räknelärornas recept för praktiskt räknande.

Det ursprungliga syftet mer böckerna i *Elementa* var att visa hur man kunde konstruera en sorts tredimensionella kroppar. Då böckerna författades ingick dessa kroppar i ett metafysiskt system. Med tanke på den betydelse boken kom att få inom skolmatematiken är det motiverat påminna om att den författades i detta tämligen specifika syfte. Samtidigt utgjorde *Elementa* en sammanfattning av en stor del av antikens matematiska vetande. Bortser man från den mening bokens konstruktioner hade under antiken kan man mer allmänt säga att dess syfte är att konstituera matematiken (eller mer specifikt geometrin) som ett logiskt sammanhängande deduktivt system. I satserna presenteras påståenden om hur något är. Efter varje påstående följer ett bevis av att påståendet är sant. Bevisen är konstruerade med hjälp av tidigare bevisade påståenden. På så sätt konstituerar Euklides *Elementa* matematiken som ett slags "tankebyggnad".

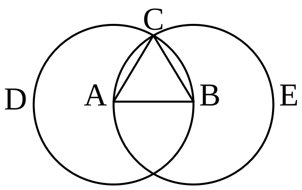
Strömers översättning av Euklides *Elementa* börjar med 35 definitioner av ett antal termer. Därefter följer 3 "postulater", vilka i princip säger vad man kan göra inom det system som beskrivs – till exempel "At utdraga en gifven rät linea ända rätt fram, så långt man behagar".[2] Bokens inledning avslutas med 12 "axiomer" vilka är påståenden som måste tas för sanna utan bevis – tex. "6. De som äro dubbelt så stora som et och samma, eller lika stora, äro sins emellan lika stora".[3] Därefter följer det första av Euklides "problem", vilket lyder: "At på en gifven rät determinerad linea rita up en liksidig triangel".[4]

Hur man tänker om detta problem, och om Euklides *Elementa* i allmänhet, har avgörande betydelse för mitt övergripande argument. Frågan är vad det innebär att Euklides *Elementa* handlar om matematik? Jag skall strax ge en ganska utförlig beskrivning av detta första problem, tillsammans med hur det är tänkt att lösas. På så sätt vill jag ge ett exempel på vad, i en praktisk bemärkelse, som åsyftas med den term – "matematik" – som stog i fokus för den historiska redogörelsen ovan. För att återknyta till mitt teoretiska ramverk, menar jag att föreställningar om att "verkligheten är matematik", måste förstås i termer av en *identifikation* av verkligheten som sådan. Ända till fram till 1900-talet utgjorde Euklides *Elementa* en viktig utgångspunkt för denna typ av identifikationer. Med utgångspunkt från mitt resonemang kring sublima objekt, menar jag emellertid att relationen mellan det konkreta innehållet i *Elementa* och dessa identifikationer, är långt ifrån enkel att förstå. En allt för stor förtrogenhet med *Elementa* riskerar nämligen snarare att utgöra ett hinder för en identifikation av verkligheten som matematiskt, än att fungera som ett stöd för en sådan identifikation. På detta sätt kan man också tolka resultatet av den vetenskapliga matematikens allt mer noggranna utforskande av geometrins grundvalar under slutet av 1800-talet. Konsekvensen blev nämligen att Euklides "sublima" status gick förlorad. För matematikens del innebar detta emellertid ingen större katastrof, eftersom ny matematik (tillsammans med andra formella vetenskaper) omedelbart kunde ta Euklides plats som den vetenskapliga matematikens outgrundliga föremål.

---

[1] Christian von Wolff, *Auszug aus den Anfangs-Gründen aller Mathematischen Wissenschafften: zu bequemerem gebrauche der Anfänger auf Begehren verfertiget*, Neue Aufl. verb. und mit einem Register verm. utg. (Franckfurt und Leipzig. MDCCXLIII: 1743).
[2] Strömer, *Elementa*, 6.
[3] Ibid.
[4] Ibid., 8.

Här följer nu en detaljerad genomgång av Euklides första problem, vilken jag sedan tar till utgångspunkt för en diskussion av vad det innebär att se detta problem som matematik. Först Strömers konstruktion och bevis. Han skriver:



> Lät [sic] AB vara en gifven rät linea som är determinerad: Det begäras at en liksidig triangel måtte upritas på AB.
>
> Tag A för medelpunkt och rita en Cirkel DCB, hvars peripherie går genom B, a tag sedan B för medelpunkt och rita en Cirkel ACE genom A, a och drag så ifrån den punkten C, hvarest bägge Cirklarna råkar hvarandra, til A och B tvänne räta lineer CA, CB; b Så är ABC den begärte triangelen.
>
> a. 3. postul
> b. 1. postul.
> e. 15 defin.
> d 1. axiom.
>
> Ty, efter A är medelpunkten til Cirkelen DCB, så är AC lika stor med AB, c och efter B är medelpunkten til Cirkelen ACE, så är CB lika stor med AB: c altså äro bägge lineerna AC och CB lika stor med en och samma linea AB; derföre måste de ock vara sins emellan lika stora d Och således äro alla tre sidorna uti triangelen ACB lika stora.[1]

Vad som händer här är inte särskilt komplicerat. Först upprepas själva problemet, nämligen att rita upp en liksidig triangel på en given rät "determinerad" linje. En determinerad linje är en linje som har en begränsad längd. För att göra detta börjar man med att rita en cirkel med medelpunkt i A, med en radie lika stor som den linje man hade från början. Att man "kan" göra detta beror på att postulat nummer 3 lyder: "At taga hvad punkt man vil til medelpunkt, och rita en Cirkel, hvars peripherie går genom hvad punkt man vil".[2] Att det är detta postulat som använts i detta första steg i konstruktionen markerar Strömer med ett litet "a" som hänvisar till den lilla tabellen till vänster. Sedan gör man samma sak med den andra slutpunkten av linjen, dvs. B. Slutligen drar man "tvänne räta lineer" från den punkt där cirklarna skär varandra (dvs. i C) till slutpunkterna av den linje man hade från början. Detta är möjligt på grund av postulat 1, som lyder "At, ifrån hvad punkt man vil, draga en rät linea til hvad punkt man vil".[3] Att detta postulat använts markerar Strömer med ett litet "b".

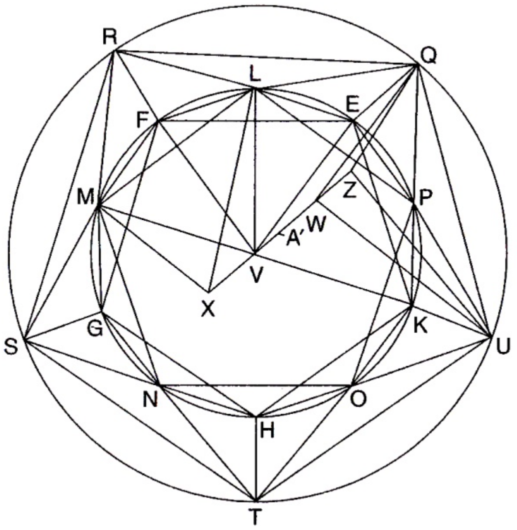
När nu denna konstruktion är gjort återstår att bevisa att den triangel man fått verkligen är liksidig. Vad är då en liksidig triangel? Definition 24 lyder: "Utaf tresidiga figurr, kallas den en liksidig triangel, hvars alla tre sidor äro lika stora".[4] Det som måste bevisas är därför att de tre linjerna som nu dragits verkligen är lika långa – då passar denna triangel definitionen för en "liksidig triangel". Strömer inleder beviset med att konstatera att eftersom A är i mitten av den vänstra cirkeln (cirkeln DCB) så är linjen från A till C (linjen AC) lika stor som linjen från B till C (linjen BC). Detta kan vi vara säkra på eftersom den 15:e definitionen lyder: "Cirkel är en platt figur, som inneslutes af en linea, hvilken kallas pheripherie eller omkrets, och är sådan, at alla räta lineer, som ifrån en viss punkt in uti figurn falla på henna, äro lika stora".[5] Den punkt de skall falla på för att detta skall gälla är, står det i den följande definition 16 (vilken Strömer inte anser sig behöva hänvisa till), cirkelns "medelpunkt", och cirkeln i fråga var ju skapad med A som medelpunkt. Samma resonemang (dvs. definition 15 och 16) tillämpat på den högra cirkeln visar att BA måste vara lika stor som BC. Nästa steg bygger på konstaterandet att AB å ena sidan, på grund av resonemanget kring den vänstra cirkeln, måste vara lika stor som AC, men att AB å andra sidan, på grund av resonemanget kring den högre cirkeln, måste vara lika stor som BC. Med andra ord är både AC och BC lika stora om AB. Men då måste de också vara "sins emellan lika stora", eftersom axiom 1 lyder: "De som äro lika stora med et och samma, äro sins emellan lika stora".[6] Detta markerar Strömer med ett litet "d". Därmed har problemet löst. Vi har konstruerat triangeln som efterfrågades, och bevisat att denna triangel verkligen är just den som efterfrågades.

Att se denna följd av operationer – på griffel och tavla, med papper och penna, eller i huvudet – som matematik innebär att se dem som handlandes om något. Att se dem som matematik är att se dem som ett *syftande tecken*. Detta tecken är något annat än de språkliga tecken som leder oss att utföra och följa Euklides konstruktion och bevis. Att se detta problem som matematik, innebär att se den helhet som problem och bevis utgör som något *mer* än figurr, symboler och text. Om man som ett tankeexperiment subtrahe-

[1] Strömer, *De Sex Första Böckerna Af Euklidis Elementa, eller grundeliga inledning til geometrien,* 8.
[2] Strömer, *Elementa*, 6.
[3] Ibid., 5.
[4] Ibid., 4.
[5] Ibid., 3. "Denna punkten kallas", står det i den följande 16:e definitionen, "Centrum, eller medelpunkt".
[6] Ibid., 6.

rar detta "mer", vad återstår då? Skillnaden tycks likna den mellan *profant* och *heligt*. Många skulle säkert mena att det hela enkelt inte är *rätt* att likställa Euklides framställning med en beskrivning av, säg, hur man sätter upp ett tält, eller viker ett pappersflygplan. Och tveklöst finns det något hos Euklides som går utöver hans beskrivningar av hur man praktiskt utför de många konstruktionerna och säkerställer att de är riktiga. Min poäng är att det inte är alls lika klart *på vilket sätt* de är något mer än just praktiska beskrivningar.

Väsentligt för mina syften är det faktum att den Euklidiska geometrin för de som skulle studera matematik väsentligen framstod som något man *gör*. Undervisningen baserad på Euklides *Elementa* gick i stora drag ut på att eleverna skulle lära sig att lösa problem av samma slag som det ovanstående, men mer komplicerade. Detta "görande" tillmättes sedan, genom matematiken, en mängd betydelser.



Figur 3. En icosahedron.[1] Det är inte självklart hur uppövande av förmåga att konstruera figurr av detta slag hänger samman med de positiva effekter som tillskrevs studier av Euklides *Elementa*. Min tes är att bandet mellan den Euklidiska geometrin som praktik, och de helt andra praktiker den ansågs utgöra en god förberedelse för, upprättas genom föreställningar om matematikens egenskaper. Matematiken är i detta sammanhang ett objekt som binder samman olika delar av verkligheten, bland annat olika sociala praktiker.

Jag skall nu gå vidare med en redogörelse för hur matematiken, och de värden den förknippades med, resulterade i försök att "förbättra" räknelärorna, vilka i ljust av den nya matematiken framstod som gravt ovetenskapliga.

Celsius räknelära

Anders Celsius *Arithemetica eller Räkne-Konst* från 1727 har lånat drag både från räknelärorna och från den euklidiska geometrin. Vad gäller disposition följer den räknelärorna, medan innehållet delvis avviker och framför allt är framställt på ett annat sätt. Boken är, liksom Euklides *Elementa*, framställd i form av paragrafer. Med utgångspunkt från räknelärorna kan man säga att de översiktligt har följande innehåll:

Table 1. En jämförelse mellan innehållet i Celsius *Arithmetica eller Räkne-Konst* och de svenska räknelärornas typiska innehåll. Den skuggade rutan i den högra kolumnen, "Logaritmer", finns i Celsius bok, men inte i räknelärorna.

Paragraf hos Celsius	**Räknelärornas motsvarande innehåll**
§1-§115	"Numeratio"
§116-§153	De fyra räknesätten i hela tal.
§154-§160	Bråk
§161-§177	Sorter
§178-§183	Decimalbråk
§184-§197	Regula de Tri

[1] Hämtad ur M. F. Burnyeat, "Plato on Why Mathematics is Good for the Soul," i *Mathematics and necessity: essays in the history of philosophy*, red. Timothy Smiley och British Academy (Oxford: Oxford University Press, 2000), 2.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

§198-§220	Potenser och rötter
§221-§237	Logaritmer

Med andra ord är det i stor utsträckning räknelärornas stoff som Celsius behandlar. Celsius tar i och för sig upp decimalbråk, vilka inte hade någon given plats i räknelärorna, men ägnar dem bara fyra paragrafer. Däremot ger han potenser, rötter och logaritmer betydligt större utrymme än räknelärorna. Den största skillnaden ligger emellertid i att Celsius boken igenom använder algebra, och att han även ägnar utrymme åt specifikt "algebraiska" sanningar, utan uppenbar tillämpning inom räknekonsten.

Vad gäller strukturen är Celsius bok betydligt mindre överskådlig än till exempel Roloff Anderssons räknelära. Detta på grund av att han liksom Euklides *Elementa* inte har någon innehållsförteckning,[1] och inte heller delat in sin framställning i olika större avsnitt. Hela boken är en löpande följd av paragrafer. Liksom Euklides börjar Celsius med en definition, nämligen

> Hwart och ett ting kallas en *Enhet* (*unitas*) så wida det betracktas allenast som ett (*unum*).[2]

Därpå följer ett "*Scholion*", där Celsius förklarar att en definition är "Ett begrep om en sak, som är så tydligt, at man der med kan skilja den ifrån alla andra ting", och att ett "Scholion" är en anmärkning "som tiena til att widare förklara något närmare". De följande 237 paragraferna har rubriker som "definition", "scholion", "hypothesis", "Theorema", "Corrolarium", "Problema" och "Resolution". Här ser man ett uppenbart inflytande från Wolff och hans ambition att systematisera räknekonsten med hjälp av vad han såg som "den matematiska metoden". Intressant nog innehåller inte desto mindre Celsius första 115 paragrafer en mängd satser som nästan ordagrant skulle kunna ha ingått i till exempel Agrelius eller Anderssons räknelärор. Hit hör till exempel följande "problema":

> §113. At unämna ett tal, som är med ziffror upskrifwit.
>
> Resolution. 1. Man begynner från höger til wænster at skilja zifrorna i classer med ett *comma*, tilægnande hwar och en *class* 3 ziffror, som stå i sina tre *columner*.
>
> 2. öfwer tredie *classens* första zifra til höger sættes med Romerska zifror *ett*, öfwer femte *classens* första zifra sættes *twå*, öfwer sjunde *classens* första zifra, *tre*, och så widare öfwer hwar annan *class*.
>
> 3. De zifror, som hafwa allenast ett *comma* om sig på högre handen, næmnas ut genom tusende; men har susende zifran et strek öfwer sig, så kallas den en *million*, har hon twænne strekar, heter hon en *billion*, 3 strekar en *trillion* etc. Sedan næmnes altid i hwar *class* zifran til höger med enklatal, den andra med tijor, och den tredie med hundrade tal. *Så ær det giort, som begærtes*.
>
> *Demonstratration* ær klar af §.§.5.8.[3]

Och precis som i räknelärorna kompletterar Celsius dessa praktiska regler med exempel. Även vad gäller storleken på det tal han använder för att exemplifiera skrivandet och utnämnandet av siffror är Celsius genren trogen – med sitt 34-siffriga tal överträffar han faktiskt räknelärorna vad gäller detta obligatoriska utnämnande-exempels storlek. Skillnaden i förhållande till räknelärorna ligger här huvudsakligen i Celsius rubricering ("problema", "resolution", "demonstration"), inte i innehållet. Liksom räknelärorna beskriver Celsius här hur man *gör* när man skriver och läser tal.

Andra satser hos Celsius utgör emellertid algebraiska formuleringar av axiom och satser hämtade från Euklides *Elementa*. Till exempel lyder Celsius 49:e paragraf, vilken Celsius rubricerar som ett axiom: "De tal, a, b, som äro jämlika med ett och samma tal, c eller med jämlika $c = d$ äro jämlika sins emellan, $a = b$".[4] Detta kan jämföras Euklides första axiom som i Strömers översättning lyder "De som äro lika stora med et och samma, äro sins emellan lika stora".[5]

Allmänt kan man säga att Celsius i sin *Arithmetica* blandar räknelärornas stoff med innehåll hämtat från Euklides och säkert även från andra håll. Ibland är det fråga om regelrätta lån. Detta gäller till exem-

[1] Och för den delen inte, som i Bergmarck, *Svensk räkne-bok*., något alfabetiskt register.
[2] Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-Konst*, 1.
[3] Ibid., 42. Celsius hänvisning till §§5-8 syftar på förklaringen av själva talsystemet.
[4] Ibid., 15.
[5] Strömer, *Elementa*, 6.

pel många beskrivningar av praktiskt räknande som utan vidare kunde ingått i en "vanlig" räknelära. Det gäller också Celsius redogörelser för många algebraiska sanningar. I andra fall är det svårare att urskilja något enskilt ursprung till det Celsius skriver. Detta gäller till exempel Celsius beskrivning av räknande med sorter.[1]

I den 184:e paragrafen kommer Celsius till Regula de Tri. Här syns en avgörande skillnad mellan hans *Arithmetica* och räknelärorna. Celsius ägnar nämligen blott 10 sidor åt Regula de Tri. Han inleder med att i algebraiska termer beskriva Regula-de-Trins principer. Detta kräver ungefär en sida. Sedan följer två exempel. Dessa syftar emellertid inte till att visa hur Regula de Tri kan användas i praktiken, utan till att *illustrera Regula de Trins principer*. I det första exemplet visar Celsius hur man kan ta reda på "huru monga ören gå på $\frac{3}{8}$ daler, i det andra hur man omvandlar samma $\frac{3}{8}$ daler till decimalbråk. Dessa sammantaget tre paragrader motsvarar räknelärornas ofta grundliga introduktion av Regula de Tri.[2]

Sedan följer Celsius motsvarighet till räknelärornas långa uppräkning av "räknesätt" baserade på Regula de Tri. Intressant är att Celsius här diskuterar exakt det problem som räknelärornas detaljerade uppdelning i de många räknesätten och de många fallen syftade till att lösa, nämligen att *identifiera vilket räknesätt som skall användas*. Celsius tycker att man skall börja med att skriva ut tecknen: ":", "::" och ":", vilka Celsius använder för att åtskilja vad som inom räknekonsten kallas de olika talens "rum". De följande resonemang utgör en sorst heuristik baserad på vad talen har för sorter och vad man utifrån "sakens omständigheter" kan sluta sig till. En centrala fråga är om det tal man söker bör bli större eller mindre än det tal i frågan som har samma sort som det tal man söker. Celsius visar i ett exempel hur det hela skall gå till:

> Til ex. efter waror äro proportionela emot deras wärde i penningar. Så Wille man weta när 9 alnar ut af nogon wara kosta 15 daler, huru mycket kosta då 11 alnar? hwarföre sedan man satt up teknen : :: :, så sätter man i tredie rummet det talet som är af samma slag med det som sökes, hwilket man kan finna af frågan, *huru mycket?* neml. penningar ; Hwarföre 15 daler kommer at stå i tredie rummet (: :: 15 :); men de bägge talen som betyda alnar, ställas i första och andra rumet, utaf hwilka det större talet 11 bör stå i andra rummet, efter 11 alnar kosta mera än 9 alnar, och således bör det fierde talet hafwa flera daler än det tredie, så at de gifna talen stella således: 9 : 11 :: 15:, eller 3:11::5:, när man dividerat den första 9 och den tredie 15 med det allmenna största mottet 3 (§.140), hwilka ginwägar, och flera dylika man kallar *praxis italica*, efter Italienarehafwa mestadelen dem upfunnit och först brukat. När man således upstelt de 3 gifna talen, så söker man igen det fierde (§.184), som blifwer $18\frac{1}{3}$ daler, eller 18 daler 10 öre och 16 penningar (§. 186).[3]

Flera saker kan sägas om denna redogörelse. För det första är det tydligt att detta inte är ett exempel så att säga hämtat ur praktiken. Celsius talar om "nogon wara" och motiverar inte varför man å ena sidan vet hur mycket 9 alnar kostar men å andra sidan vill veta hur mycket just 11 alnar kostar.[4] För det andra är det intressant att Celsius här presenterar ett, åtminstone som han själv ser det, *praktiskt* sätt att så att säga "lista ut" hur talen skall placeras i uppställningen. Här är det inte fråga om någon demonstration av matematiska principer. För det tredje nämner Celsius Praxis Italica. I Anderssons räknelära utgör beskrivningen av denna räkneprincip ett huvudnummer. Andersson motiverar räknesättets fördelar, de svårigheter det är förknippat med, och presenterar även en rad tabeller (samt övningar och förmaningar) med syfte att bibringa läsaren en förmåga att faktiskt *använda* Praxis Italica. Celsius nöjer sig med att berätta att Praxis Italica är en beteckning på ett antal "ginwägar".

I den följande paragrafen fortsätter Celsius med ytterligare ett exempel, vilket karaktäristiskt nog beskriver hur man kan räkna ut hur många dagar det tar att läsa en viss "historisk bok", givet att man läser ett visst antal timmar varje dag – uppenbarligen ytterligare ett "orealistiskt" exempel väsensskilt från de som fyller räknelärorna. Här är frågan ställd på ett sådant sätt att det antal dagar som söks blir färre än det antal dagar som frågan innehåller. Att antalet dagar i svaret blir färre skall man se "af sakens omständighet" – detta bestämmer i vilka "rum" talen skall placeras. Det Celsius vill komma till är att det är "onödigt att distinguera emellan *Regula de Tri directa* och *indirecta* eller *inversa*".[5] Väsentligt är här att Celsius motiv för att anse detta vara onödigt är att han menar att man av frågan kan "se" hur talen skall placeras. Celsius presenterar generella principer istället för räknelärornas många fall. Principerna utgör en alterna-

[1] Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-Konst*, 85.
[2] Ibid., 104-05.
[3] Ibid., 107-08.
[4] Ibid.
[5] Ibid., 109.

tiv strategi för att besvara räknekonstens frågor. Räknelärorna beskriver hur man avgör vilket räknesätt det är fråga om. Celsius beskriver istället hur man ser hur den generella principen skall tillämpas.

I de följande fyra paragraferna går Celsius likväl igenom exempel som tydligt motsvarar räknelärornas regula dupla, intresseräkning, regula societatis och beskickningsräkning. Han nämner även de räknesätt det är fråga om, men hela tiden poängterar han de principer som förenar de många räknesätten. Paragraf 197, som avslutar avsnittet om Regula de Tri, lyder

> Förutan dessa ofwan nämnde applicationer af *Regula de Tri*, så gifwas ännu oendeligen monga, som hafwa sin stora nytta så i wetenskaperna, som i allment bruk, derest hon fådt åtskilliga namn, alt efter sakerna, hwar til hon blifwit applicerad. Men hwad *Regula Alligationes*, *Falsi*, och flera dylika frågor, angåer, så kunna de mycket lettare genom *Algebra* uplösas.[1]

Celsius säger att de många räknesätten förvisso har sin nytta – till och med inom vetenskaperna – men presenterar *algebran* som en slags ersättning för dem. Algebran gör det möjligt, skriver Celsius, att lösa alla de frågor som de många räknesätten behandlar. Väsentligt är dock att *Celsius inte visar hur detta går till*. I sin redogörelse för algebra förekommer inga frågor som inom räknekonsten skulle lösas med hjälp av Regula de Tri, och i paragraferna som behandlar Regula de Tri använder han inte algebra.[2]

Av det ovanstående framgår att Celsius *Arithmetica* innebär ett steg bort från det praktiska räknandet. Mer exakt kan man säga att Celsius bok karaktäriseras av en ambivalens i förhållande till praktiken. Han utgår från räknelärorna. I stor utsträckning bestämmer dessa vilka problem han diskuterar, och i många fall följer han helt räknelärornas mönster. På en rad punkter går han dock så att säga bara halva vägen. Han tar upp sorter, men han ger inga realistiska exempel på räkning med sorter. Han har inte med några tabeller över sorternas relationer. Han *nämner* Praxis Italica, men ger knappast läsaren någon möjlighet att med hjälp av hans bok lära sig *använda* Praxis Italica.

Palmqvists algebra

Många av de tendenser man kan se i Celsius *Arithmetik* från 1727 kommer än tydligare till uttryck i Fredric Palmqvists *Inledning til Algebra* publicerad drygt 20 år senare. Hos Celsius är algebra och räknekonst sammanvävda. Palmqvists bok handlar uteslutande om algebra, och är inte alls på samma sätt som Celsius bok strukturerad med utgångspunkt från räknelärorna.

Palmqvists algebra har tre delar. Den första behandlar själva bokstavsräkningen, "hyfsning" av ekvationer och algebrans tillämpning inom räknekonsten. Den andra handlar om algebrans tillämpning inom geometrin, medan den tredjes syfte är att "förklara de allmänna egenskaperne af alla equationer" och "visa methoderne, genom hvilka man, så vida möjeligt är, skall kunna få veta *huru många, hurudana* och *hvilka* rötterna äro uti hvar och en gifven equation".[3]

Den svenska skolmatematiken kom huvudsakligen att begränsas till innehållet i den första delen av Palmqvists algebra, så jag kommer här att begränsa mig till en redogörelse för denna. Denna första del är indelad i fyra avdelningar:

I:a Afdelningen. Om Tecknen.	§§1-13
II:a Afdelningen. Om Bokstafs Räkningen.	§§14-43
III:e Afdelningen. Om æquationer och deras hyfsande.	§§44-72
IV:e Afdelningen. Om æquationers bruk och nytta vid problemers uplösande och i synnerhet arithmetiske.	§§72-104

I den första av dessa avdelningar går Palmqvist som rubriken anger igenom algebrans tecken. Hit hör plus, minus och likhetstecknen, men även rottecknet (med olika exponenter) samt hur man skriver potenser. Palmqvist beskriver även mer allmänt hur man sätter samman uttryck av bokstäver och de respektive tecknen.

[1] Ibid., 116.
[2] De återstående paragraferna, som handlar om potenser, rötter och logaritmer, får jag anledning att återkomma till längre fram.
[3] Fredrik Palmqvist, *Inledning til algebra (III)* (Stockholm: Lorentz Ludwig Grefing, 1749), 3.

Innehållet i det följande avsnittet, det om bokstavsräkningen, kom senare att spela en central roll inom skolmatematiken. Här beskrivs hur man "räknar" med bokstavsuttryck. Intressant nog är detta avsnitt till sin struktur mycket likt räknelärornas behandling av sorter. Palmqvist säger inledningsvis att "De quantiteter, som äro på et sätt beteknade och hvilka följakteligen föras (refereras) til samma slags enheter eller sorter, sägas vara af *ett slag*".[1] Det han syftar på kan med modern terminologi sägas vara termer med samma kombination av obekanta kvantiteter. Dessa motsvarar i detta avsnitt räknelärans sorter. "Således är", skriver Palmqvist, "$2x$ af et slag med $5x$; $4ab$ med $7ab$; $\frac{2}{3}a$ med $\frac{1}{4}a$ [men] $2x$ af olika slag med $2y$ [...]".[2]

Stort utrymme ägnar Palmqvist åt minustecknets hantering, vilket för många tydligen var en nymodighet vid denna tid. Palmqvist beskrivning av addition av "sammansatte quantiteter" är mycket lik räknelärornas beskrivning av hur man adderar tal uttryckta i flera olika sorter. Han skriver att man skall sätta "de quantiteter öfver hvarandra, som äro af *et slag* (§. 14.); sedan adderas de columnevis tilsammans efter de nys anförde reglor, ifrån hvilkendera sidan man hälst behagar". Helt i linje med räknelärornas framställningssätt skriver han sedan: "Til uplysning tjena följande exempel", varefter följer fyra exempel (vilka dock, i motsats till hur det brukar vara i räknelärorna, inte är kommenterade).[3]

Sedan följer en redogörelse för subtraktion, multiplikation och division av bokstavsuttryck. Tre saker kan påpekas.

För det första att Palmqvist genomgående relaterar räknandet med bokstavsuttryck till räknande med siffror, vilket han kallar "allmän räkning". Angående såväl multiplikation som division skriver han att man förfar "nästan som i allmän räkning".[4] Detta visar på det fortfarande nära bandet mellan algebran och räknekonsten. Palmqvist beskriver liksom räknelärorna hur man gör när man räknar. Skillnaden ligger i att Palmqvist behandlar bokstäver istället för siffror, med följd att de obekanta spelar en liknande roll som sorterna gör i räknelärorna.

För det andra det utrymme Palmqvist ägnar åt bestämmandet av huruvida termerna skall vara "jakade" eller "nekade". Upprepade gånger presenterar han här *regler*, enligt räknelärornas mönster, Till exempel angående division:

> At här samma regel gäller för teknen, som i multiplication, härörer deraf, at genom division uplöses det, som genom multiplikation blifvit sammansatt. Ty när en jakad quantitet som nu komer at anses för en product, divideras med en quantitet, då anses den senare för en factor; är då den jakad moste den andra factoren eller den nu sökta quotienten ock vara jakad: men är han nekad, moste quotienten bli nekad; emedan producten i annor händelse ej kan vara jakad. Deremot när en nekad product divideras med en nekad quantitet, moste quotienten bli jakad; men divideras han med en jakad moste quotienten bli nekad; emedan i annor händelse producten af divisoren och quotienten, som så til värde, som tekn bör vara jämlik med den gifna dividendo, ej kan bli nekad.[5]

Min poäng är att hanteringen av tecknen här utgör ett betydande problem, det vill säga långt ifrån en trivialitet, och att Palmqvist löser detta problem genom att presentera regler.

För det tredje kan sägas att framför allt *division* av bokstavsuttryck lätt blir ganska trassligt i en praktisk teknisk mening. Palmqvist ägnar emellertid knappt något utrymme åt att förmedla någon "konst att dividera". Tvärtom ger han bara två exempel (varav det ena mycket enkelt) för att illustrera hur division av bokstavsuttryck går till. Exemplen är inte kommenterade, och det tycks svårt, för att inte säga omöjligt, att faktiskt *lära sig* utföra de operationer Palmqvist beskriver endast med utgångspunkt från hans bok. Den är med andra ord snarast skriven för att användas i en form av undervisning där ansvaret för att visa hur man räknar med bokstavsuttryck i stor utsträckning vilar på läraren.

Palmqvist går sedan vidare, och behandlar hantering av bråk, rotuttryck och potensuttryck. Han beskriver även hur man drar roten respektive kubikroten ur uttryck. Sammantaget kan Palmqvists avsnitt om bokstavsräkning sägas konstituera en sorts "algebraisk räknekonst". Denna räknekonst kom senare att inom skolmatematiken helt enkelt kallas *algebra*. Att kunna algebra innebar därmed att kunna utföra en viss uppsättning manipulationer av bokstavsuttryck, så som multiplikation, division och rotutdragning. Att kunna detta innebar i sin tur att behärska ett system av regler. På ett liknande sätt som inom den euklidiska geometrin bestod "konsten" i att, med utgångspunkt från ett givet "problem" konstruera ett "re-

[1] Fredrik Palmqvist, *Inledning til algebra (I-II)* (Stockholm: Lars Salvius, 1748), 16.
[2] Ibid., 16-17.
[3] Ibid., 18.
[4] Ibid., 23 resp. 26.
[5] Ibid., 26-27.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

cept", bestående av en följd av tillämpningar av i enkla regler, vilket ledde från problemet till dess lösning. Väsentligt vad gäller Palmqvists bok är att han *beskriver* denna algebra, men inte i sin bok gör något försök att förmedla "den algebraiska räknekonsten" – detta överlåts åt läraren.

Tredje avdelningen av den första delen av Palmqvists algebra handlar om ekvationer och deras "hyfsande".[1] Redan här han sägas att det huvudsakliga innehållet i detta avsnitt senare, inom skolmatematiken, kom att kallas "ekvationslära". Inom skolmatematiken kom man alltså att, liksom Palmqvist, skilja mellan å ena sidan algebra, vilket utgjorde konsten att manipulera bokstavsuttryck, och å andra sidan ekvationslära, vilken man därmed kunde betrakta som en sorts tillämpad algebra.

Palmqvist beskriver i sitt avsnitt om hyfsning av ekvationer en mängd regler, baserade på den föregående algebran, för hur ekvationer (bestående av mer eller mindre komplicerade kombinationer av potens- och rotuttryck) kan transformeras så att, enkelt uttryckt, den variabel vars värde man söker hamnar ensam på en sida av likhetstecknet. Paragraf 56 är typisk för dessa regler:

> Om någondera termen uti en æquation består af en irrationäl quantitet, och uti den samma innebegripes æquationens rot, då böra alla de öfriga termerne af den æquationens del kastas öfver åt andra sidan, så at den irrationäla quantiteten kommer at stå ensam på en sida. (§. 51.); Sedan uphögas bägge delarne til en dignitet, hvars exponent är jämlik med den i rotemärket stående quantiteten; då en ny æquation framkomer.[2]

Utan att fördjupa mig i detaljer: Palmqvist beskriver vad man skall göra då man möter en viss typ av ekvation. Resultatet av de manipulationer som beskrivs är en ny ekvation. Denna kan sedan (förhoppningsvis) behandlas med hjälp av andra regler, tills dess att ekvationen har fått en lämplig form. Reglerna beskriver även hantering av kvadratiska och kubiska ekvationer, samt hantering av system av ekvationer med flera obekanta.

Liksom avdelningen om bokstavsräkningen, konstituerar avdelningen om ekvationers hyfsande en sorts konst baserad på ett system av regler. För att knyta an till räknelärorna kan påpekas att denna konst även innefattar tabeller: Palmqvist skriver att "När quantiteten, som skal borttagas, är uphögd til någon hög dignitet, fodras ibland en lång och vidlyftig räkning, hvilket til at hielpa, vil man här nedan föresätta formulairer, hvarefter en quantitet kan extermineras", varefter följer fyra vad man nu skulle kalla "typekvationer" – rubricerade som "Regler".[3]

Palmqvists avdelningar om algebra respektive ekvationer leder fram till den fjärde och avslutande avdelningen i den första delen av hans Algebra. Denna handlar om "æquationers bruk och nytta vid problemers uplösande och i synnerhet arithmetiske".[4] Palmqvist skriver att den "begynnare" som lärt sig ekvationers "hyfsande" nu skall få "njuta frukten av en slik färdighet".[5] Vad man nu endast måste lära sig är att "bringa föresatta frågor eller problemer til æquationer", för när så väl är gjort, så "koma de här åfvan anförde reglor til motta".[6]

Detta skulle emellertid visa sig lättare sagt än gjort. I själva verket utgör detta avsnitt hos Palmqvist den tydligaste illustration jag hittat av den relation mellan algebra och aritmetik som sedan kom att bli typisk för skolmatematiken. Kort sagt visar Palmqvist inte alls hur algebra kan användas för att, som räknekonsten, besvara frågor som uppkommer i det praktiska borgerliga livet. Istället visar han hur en sorts pseudorealistiska frågor, involverandes fragment hämtade från detta praktiska liv, kan användas för att konstruera problem som illustrerar algebrans användbarhet.[7] Skillnaden mellan de exempel Palmqvist ger och räknelärornas är slående. Några av de problem Palmqvist visar hur man kan lösa med ekvationer är:

> En köpman börjar til at handla med et vist capital på det sättet, at han vi hvart års början aflägger 100 D:r til förtäring, men det öfriga ökar han årligen med en half-part; Efter 2:ne års förlopp finnes han dubbelt rikare än då han började handla. Nu frågas huru stort hans första capital var.

[1] Ibid., 44.
[2] Ibid., 50.
[3] Ibid., 64.
[4] Ibid., 67 (sidan felaktigt numrerad som 33).
[5] Ibid.
[6] Ibid.
[7] Här är kanske viktigt att påpeka att därmed intet är sagt om algebrans plats i andra sammanhang, till exempel som en del av ingenjörskonsten, den vetenskapliga matematiken och naturvetenskapen. Vad jag talar om här algebrans relation till räknekonsten.

> Uti en armee finnas 3:ne folkskola, Ängländare, Holländare och Tyskar. De bägge första slagen utgöra 9000 man, de bägge yttersta 10000, och de bägge sista 13000. Nu frågar huru många man äro af hvardera slaget, och huru stor hela armeen är?
>
> 400 D:r skola delas ut emellan 4. personer, af hvilka den 2:a skal ha 50 mer än den 1:a; den 3:die 60 mer än den 2:a; och den 4:de 70 mer än den 3:die. Nu frågas huru mycket hvardera får?
>
> 4 Personer hafva upgräfvit 41000 famnar jord; nu frågas huru mycket hvardera gräfvit, när den 2:a gräfvit 4 dubbelt emot den 1:a; den 3:die 3 gånger så mycket som den 2:a; och den 4:de dubbelt emot den 3:die.
>
> 3:ne karlar A, B, och C skola upgräfva 900 cub:famnar jord. a gräfver 1 famn på 3 timar, B 3 f:nr på 8 t:mr; och C 5 f:nr på 12 t:mr. Nu frågas huru lång tid dessa karlar behöfva at conjunctim upgräfva åfvannämde 900 f:nr.
>
> Ifrån en dam gå 2:ne vattuledningar, som föra vattnet af, den ena bortförer 200 tunnor i 3 timar; den andra 700 tunnor i 5 t:mr: men uti samma dam faller genom en annan vattuledning 300 tunnor i 2 t:mr. Nu frågar huru snart dammen blir aldeles uttappad, när han sättes kunna hålla 10000 tunnor vatten?[1]

Själva det svåra i dessa problem, liksom den förmåga som krävs för att lösa dem, är uppenbarligen en helt annan än den som står i räknelärornas fokus. Palmqvists tal är genomgående jämna, och framför allt är de aldrig uttryckta i kombinationer av olika sorter. Här behövs ingen Praxis Italica. Och själva frågorna är sådana som uppenbarligen aldrig uppkommer i det praktiska livet. De är konstruerade för att leda till just den typ av ekvationer som Palmqvists föregående algebra och ekvationslära kan användas för att lösa.

Till Palmqvists försvar kan sägas att han flera gånger poängterar att det i många av de problem han behandlar kan tyckas onödigt att använda algebra. Han argumenterar dock för algebran med hänvisning till dess generalitet; att man, då man väl bemödat sig med att algebraiskt finna lösningen till ett problem, då på köpet får en "regel" med vars hjälp andra liknande problem enkelt kan lösas. Palmqvist presenterar en rad tillämpningar "i princip", han visar att algebran kan användas för att manipulera "verkliga" kvantiteter, men han behandlar inga "verkliga" problem. Han upprättar, på ett liknande sätt som Celsius, vad som skall framstå som en länk mellan matematiken och den praktik räknekonsten kretsar kring, men – vilket givetvis är en huvudpoäng i mitt teoretiska ramverk – länken når inte fram: länken befinner sig på bildens nivå och det är som bild den får sina sociala effekter.

Palmqvists räknelära

Det tycks inte ha dröjt särskilt länge från det att Celsius aritmetik kommit ut och börjat användas i undervisningen vid läroverken, tills dess att man upptäckte att den hade tydliga begränsningar i egenskap av hjälpmedel för att lära eleverna att räkna. Detta framgår av förordet till Fredric Palmqvists *Underwisning i räkne-konsten* från 1763. Palmqvist skriver att Celsius *Arithmetica* "oförnekligen [är] ett mästarstycke och ganska tjenlig för dem, som antingen tänka at öfva sig i Mathematiken, eller som åtminstone icke förfäras, då de finna storheter och deras egenskaper utmärkta med bokstäfver",[2] men att de som tagit sig igenom Celsius bok "sedermera varit underkastade ett nytt arbete", nämligen "att lära sig huru de få och allmänna reglorne skola nyttjas och lämpas til de otaliga händelser, hvilka dageligen förefalla uti det allmänna lefwernet".[3] Agrelius *Institutiones Arithemtica* har inte detta problem. Palmqvist torde emellertid inte vara den enda som anse, skriver han, att reglerna i denna bok,

> fordra 1:o någon uttydning, innan de kunna begripas. 2:o Någon enklare och ordenteligare indelning, innan de kunna fattas och behållas och 3:o flera och starkare bewis, innan de kunna hållas för säkra af dem, som fått den owanan, at ej tro någon sats utan skäl och bewis, i den afsigt, at icke öfwerlasta minnet med en hop owissa satser, hwilka, ehuru sanna de äro, likwäl kunna lättare förloras, än återfinnas.[4]

De tidigare böckerna är, skriver Palmqvist, antingen "alt för kårta, eller alt för widlyftiga". Här framträder explicit ganska exakt den skillnad mellan räknekonst och matematik som jag vill påvisa. Palmqvist talar

---

[1] Palmqvist, *Inledning til algebra (I-II)*, 72,76,78,79,87.
[2] Anders Palmqvist, *Underwisning i Räkne-Konsten gifwen af Fredric Palmqvist, Ledamot af Kong.Wetenskaps-Adaemien* (Stockholm: Tryckt på Direct. Lars Salvii kostnad, 1763 [1750]), företal.
[3] Ibid.
[4] Ibid.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

om "otaliga händelser" – vilka "förefalla uti det allmänna lefwernet". I räknelärornas framställningar är dessa åtskilda och beskrivs med var sina "recept". Matematiken, å andra sidan, innehåller "allmänna reglor", vars karaktäristiska drag är algebran, och det krävs "arbete" för att så att säga översätta dessa reglor till det allmänna livets händelser. Även Palmqvists tredje punkt i citatet ovan visar på skillnaden mellan räknekonst och matematik. I räknekonsten presenteras reglerna utan "bevis". Av två anledningar ser Palmqvist detta som en brist. För det första i förhållande till, som det verkar, en slags förväntan på att böcker med matematiska anspråk skull ha samma struktur som Euklides *Elementa*, med satser och bevis. För det andra på grund av att regler presenterade utan bevis skulle ta minnet i anspråk mer än regler som "bevisas". Argumentet är här att regler som bevisas kan "återfinnas".[1]

Palmqvist skriver att han på grund av dessa skäl valt en "medelväg". I fråga om bevis har han följt "Prof. Celsii method", men när det gäller att "wisa begynnare, huru de skola finna sig och bruka de allmänna reglorne wid enskilta händelser, då har jag nyttjat Agrelii arbete".[2] Det framgår av Palmqvists förord att ha nu (vid drygt 40 års ålder) fått en del erfarenhet av undervisning. Med denna som utgångspunkt vädjar han till de som skall använda boken att inte *tvivla* på de olika händelser som de allmänna reglerna här delats in i. "Denna påminnelsen", skriver han, "har jag funnit mig föranlåten at göra, efter jag af min lilla ärfarenhet funnit de fläste begynnare hindras af denna onödiga twifwelaktigheten".

Palmqvist presenterar sin bok som en räknelära, och att den är en räknelära framgår även av att den är tryckt i frakturstil (Celsius *Arithmetik* och Palmqvists *Algebra* är tryckta i antikva). På en punkt går han emellertid utöver de traditionella räknelärornas innehåll, nämligen då det gäller logaritmer. Sist i förordet skriver han att han inte kan

> annat än hålla denna Räkningen i högt wärde, emedan man med dess tillhjelp, kan likasom med lek swara på sådana Arithmetiska frågor, för whilkas skul man eljest woere mycket hufwudbry underkastad.[3]

Det Palmqvist skriver om logaritmräkning är intressant av flera anledningar. För det första på grund av att logaritmer hör till de moment vilka, som vi skall se, kom att uteslutas från skolmatematikens matematiska stoff. Särskilt påtagligt är detta i förhållande till problemet att dra roten och kubikroten ur siffertal. Att göra detta med hjälp av logaritmer är mycket enkelt, medan den med andra, äldre metoder, är tämligen omständligt. För det andra på grund av den typ av uppgifter som elever kom att få lösa med hjälp av logaritmer när de väl tog plats inom skolmatematikens ramar mot slutet av 1800-talet. Det handlade då inte alls om att använda logaritmerna som ett redskap för att enkelt lösa annars svåra problem, utan om att, som en del av algebran, manipulera uttryck i vilka logaritm- och exponentuttryck ingick. Min poäng är att det förhållande till matematiken som *verktyg* som Palmqvist ger uttryck för i sitt företal, i stor utsträckning kom att gå förlorat under det att matematiken underordnades skolmatematiken.

Palmqvists *Underwisning i Räkne-Konsten* har i stor utsträckning samma struktur som Agrelius *Institutiones Arithmeticæ*. Palmqvists bok är indelad i 23 stycken. Det första handlar om "Tal i Gemen", och motsvarar alltså numeratio. Sedan följer de fyra räknesätten i hela tal, "Bråk i gemen", de fyra räknesätten i bråk samt ett stycke "Om decimalbråksräkningen". Så långt är Palmqvist Agrelius trogen vad gäller strukturen (bortsett från avsnittet om decimalbråk). Samtidigt är inflytandet från Celsius tydligt vad gäller innehållet. Palmqvist använder tecknen för plus, minus och gånger, han skriver, om än kortfattat, om hur tal "mäter" varandra och diskuterar liksom Celsius till exempel det romerska talsystemet. Språket är emellertid enkelt och den löpande texten tar merparten av utrymmet. Det är tydligt att Palmqvist, som han skriver i sitt förord, efter bästa förmåga försöker förmedla det han har att säga utan att begränsa sig av krav på att vara stringent och kortfattad. Han har frångått Celsius klassificering av texten i tex. propositioner och demonstrationer.

Palmqvist redogörelse för bråk är dock huvudsakligen baserat på Celsius framställning. Han beskriver bråk i termer av "proportioner" och definierar i linje med femte boken av Euklides *Elementa* likhet mellan två proportioner som en *analogi*. Detta avsnitt är ett av få ställen där Palmqvist gör omfattande bruk av algebra i denna bok, och den anspråkslösa rubriken till trots kan det sägas innehålla en introduktion till Regula de Tri baserad på vad man inom skolmatematiken senare skulle kalla "proportionslära".[4]

[1] Denna distinktion, mellan att minnas en regel, och att, som det ofta framställs "förstå" ett bevis, och på så sätt kunna härleda regeln, skall jag återkomma till längre fram – den kom att spela en framträdande roll i den skolmatematiska diskursen under andra halvan av 1800-talet.
[2] Palmqvist, *Underwisning i Räkne-Konsten*, företal.
[3] Ibid.
[4] Se nedan s. [senare kapitel, om 1800-talets andra hälft, då det publicerades en mängd böcker om just proportionslära.]

Från och med Palmqvists redogörelse för "Regula de Tri i gemen" är skillnaderna mellan Palmqvists och Agrelius framställningar större. Det sätt på vilket den avviker från Agrelius bok – vad Palmqvist valt att utesluta liksom vad han valt att lyfta fram – säger mycket om vad han så att säga gjort med räknekonsten. Förändringar utgör ett betydelsefullt steg i riktning mot skolmatematiken. Jag skall i det följande använda nedanstående tabell över innehållet i Agrelius *Institutiones Arithmeticæ* respektive Palmqvists *Underwisning i Räkne-Konsten* som utgångspunkt.

Table 2. Innehållet *i* Agrelius *Institutiones Arithmeticæ* respektive Palmqvists *Underwisning i Räkne-Konsten* från och med deras introduktion till Regula de Tri. Tre saker kan noteras: 1) Palmqvist har uteslutit en rad stycken som fokuserar olika aspekter av det praktiska räknandet. 2) Palmqvist introducerar "Regula de Tri Composita", senare kallad "sammansatt" Regula de Tri. 3) Palmqvist har ersatt Agrelius genomgång av "Italienska bokhålleriet" samt hans (i och för sig mycket korta) tabell över sorter, med en redogörelse för räkning med logaritmer.

Agrelius	sidor	**Palmqvist**	sidor
Om Regula de Tri i hela Tal	44	Om Regula de Tri i gemen	6
Om Regula de Tri i Bråk	20	Om Regula de Tri simplex	23
Om Praxi Italica	55		
Om progressionibus	13		
Om Regula de Tri Conversa	8		
Om Regula Dupla	6	Om Regula de Tri Composita	19
Om Interesse	15	Om Interesse Räkning	31
Om Rebatto	7	Om Rabatt Räkning	5
Om Thara	7	Om Thara Räkning	5
Om Fusti	4		
Om Wäxel och Cassa-Räkning	7		
Om Stick och Byte-Räkning	12	Om Baratt	8
Om Factorie-Räkning	8		
Om Winst och Förlis	19		
Om Regula Societatis	22	Om Regula Societatis	21
Om Skepps-Parter	6		
Om Arf och Delnings-Räkning	21		
Om Regula Alligationis	15	Om Regula Alligationis	13
Om Regula Falsi	24	Om Regula Falsi	12
Om Regula Cesis eller Virginum	7	Om Regula Cæsi	10
Några lustige frågor	9		
Om Resolveringen [dvs. tabell över sorter]	2		
Kårt Underrättelse om Italienska Bokhålleriet	34		
Några Wäxel-Räkningar	12		
Memorial och Journal öfwer Proper-Handel	15		
		Om Logaritmer	33
totalt:	368 sidor	totalt:	176 sidor

Palmqvists inledande redogörelse "Om Regula de Tri i gemen" innehåller inga exempel och har ingen egentlig motsvarighet hos Agrelius. I avsnittet "Om Regula de Tri Simplex" skriver Palmqvist däremot om varför Regula de Tri är användbart, och presenterar regler för hur man löser det svåraste problemet då det gäller att använda Regula de Tri, nämligen "at rätt kunna upställa talen".[1] Palmqvist diskuterar inte möjligheten att antagandet om proportionalitet skulle kunna vara felaktigt. Denna fråga är påtagligt frånvarande i räknelärorna som i den skolmatematiken diskursen.[2] Liksom Celsius låter han en diskussion av "inverterad" Regula de Tri, vilken hos Agrelius har en egen rubrik, flyta in i redogörelsen för Regula de Tri "directa". Han använder här ordagrant samma exempel som Celsius – det om bokläsande.[3]

[1] Palmqvist, *Underwisning i Räkne-Konsten*, 141. För övrigt kan påpekas att Palmqvists exempel på hur man i praktiken "ställer upp" talen är typografiskt mer utförliga än såväl Agrelius som Roloff Anderssons. Framställningen liknar i detta avseende den i Bergmarck, *Svensk räkne-bok*. en bok som vid sedan av Agrelius och Celsius kan ha haft betydelse för Palmqvist då han författade sin *Underwisning i Räknekonsten*.
[2] Frågan tas däremot upp i tex. C. L. Lithander, *Aritmetik och Euklides' Elementer uti Geometrien* (Stockholm: Tryckt hos Carl Delén, 1814), 92-93.
[3] Se ovan s. 58.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

En första betydelsefull skillnad mellan Palmqvists och Agrelius framställningar rör Praxis Italica. Detta sätt att praktiskt hantera sorter ägnar Agrelius 55 sidor, och det intar en central position även hos Roloff Andersson. Palmqvist presenterar det snarast som en genväg som kräver att man direkt "ser" hur stor del ett visst antal av en mindre sort är av en större. Min hypotes är denna förändring i framställningen av räknekonsten är signifikativ för övergången från räknelärorna som beskrivning av praktiskt räknande och därmed potentiellt en utgångspunkt för att kunna behärska denna konst – till vad man kanske här ganska träffande kan kalla en "skrivbordsprodukt", en beskrivning baserad på litterära förlagor opåverkade av författarens praktiska erfarenhet av besvarande av de praktiska frågor som räknekonsten syftade till att besvara. Detta är i flera avseenden explicit hos Palmqvist: han skriver med utgångspunkt från Celsius och Agrelius, och framställningen är formad med utgångspunkt från hans erfarenhet av *undervisning*, inte från praktiskt deltagande i "det borgerliga livet".

En andra betydelsefull skillnad ligger i Palmqvists principiella särskiljande av vad som senare kom att kallas "enkel" respektive "sammansatt" Regula de Tri. Det är väsentligt att denna åtskillnad är just *principiell* – den konstituerar en sorts generell strukturering av tillämpningarna av Regula de Tri baserad på matematiken. Karaktäristiskt för räknelärorna är deras parataktiska ordnande av en mängd "räknesätt" särskiljda med utgångspunkt från praktiken. Av dessa utgjorde "Regula dupla" så att säga "en i mängden", karaktäriserad med utgångspunkt från en viss typ av frågor vilka involverade fler än fyra tal. Palmqvists särskiljande av enkel och sammansatt Regula de Tri utgår istället från matematiken.

Det är därför symptomatiskt att Palmqvists första exempel på "Regula de tri Composita" lyder: "Det kunde wara frågadt, när 2 rännor på 3 timar afföra 54 oxhufwuden watten, huru många oxhuf. kunna 5 rännor afföra på 7 timar, när hastigheten af watnet blifwer oförändrad?", det vill säga ett typiskt "orealistiskt" och för räknekonsten främmande problem, som hämtat hur Palmqvists algebra.[1] Samma sak kan sägas om de flesta exempel Palmqvist ger i detta avsnitt. De framstår som *illustrationer av räknekonsten* snarare än exempel på praktiskt räknande. Än mer uppenbart blir detta då Palmqvist går vidare till vad som i räknelärornas terminologi väl skulle kallas "Regula tripla". Vi rör oss i och med detta mot skolmatematiken. Palmqvist skriver: "När 5 arbetare göra 15 famnar på 8 dagar, då de arbeta 9 timar om dagen, huru många famnar kunna 12 arbetare göra på 6 dagar, när de arbeta 11 timar hwar dag?"[2] Exemplet talar för sig själv. Avslutningsvis ger han några exempel som möjligen kunde förekomma i praktiken. Min hypotes är emellertid att Palmqvists framställning inte heller i dessa fall syftade till (eller ens mot) ett behärskande av de praktiker inom vilka detta räknande ingick. Detta på grund av att Palmqvists framställning innehåller så lite information om räknandets omständigheter, typiskt rörande de sorter som räkningarna behandlar. En bok som tycks ha syftat mot ett sådant behärskande är Johan Bergmarcks *Svensk Räknebok*.[3] Denna bok är emellertid snarast strukturerad som ett uppslagsverk, med syfte att fungera som referens i det borgerliga livet. Det är inte minst i jämförelse med denna mycket informationstäta bok som det blir uppenbart att Palmqvists exempel så att säga hör till skolans värld.

Ett sätt att beskriva skillnaden mellan Agrelius och Palmqvists framställningar av Regula de Tri är genom konstaterandet att Palmqvists framställning är mer schematisk. Palmqvist har med utgångspunkt från matematikens principer begränsat antalet räknesätt, vilket gör hans struktur logisk och överskådlig. I själva framställningen har han rensat bort en stor del av det "icke-matematiska" material som fyller Agrelius bok, samtidigt som själva exemplen blivit vad man skulle kunna kalla "typtal" – de utgör illustrationer av de idéer som utgör kärnan i de respektive räknesätten. Ofta på bekostnad av själva frågornas rimlighet, till exempel i följande exempel

> Ex. 3. Tre personer lägga penningar tillsammans til at dermed handla och winna 600 Daler. Efter sluten handel taget hwar och en både capital och winst ut, nämligen A 850, B 150 och C 1000. Nu frågas huru mycket hwar och en hafwer insatt i Capital och huru mycket han dermed wunnit?[4]

Två saker är typiska här. För det första att såväl frågan som svaret endast involverar *en* sort, och att alla komplikationer som har med sorter att göra därmed kan lämpas obeaktade av Palmqvist. För det andra att frågan är av gåt-typ – i praktiken *vet* man naturligtvis hur mycket man satt in. Palmqvist väljer att bortse från detta för att, skulle man kunna säga, belysa själva principen på ett mer varierat sätt än som annars varit möjligt.

---

[1] Palmqvist, *Underwisning i Räkne-Konsten*, 165.
[2] Ibid., 172.
[3] Bergmarck, *Svensk räkne-bok*.
[4] Palmqvist, *Underwisning i Räkne-Konsten*, 234.

3.4. Analys

Den process av *matematisering* – inom flera områden, men framför allt av naturfilosofin – som man kan följa under 16- och 1700-talet var en del av en omstrukturering av vetenskapens sociala organisation. Man kan se det som en sorts professionalisering. Matematiken upprättade en gräns mellan professionella och lekmän. Även om man inte kan säga att matematiken användes *för att* upprätta en sådan gräns, kan man inte heller se matematiseringens sociala funktioner som en bieffekt i förhållande till någon sorts vetenskapens interna logik. De som använde matematik och inte minst de som verkade för att matematiken skulle placeras i vetenskapernas centrum drog nytta av den gräns matematiken upprättade. De som skrev om matematiken tillskrev den egenskaper vilka ingick som en del i ett politiskt spel. Med Bourdieu kan man tala om matematiseringen som en social strategi. I mitt teoretiska ramverk kan man säga att de som lyfte fram matematiken lät den bli ett objekt genom vilket de kunde framställa sig själva. Matematiken kom under denna tid kort sagt att fungera som en representant för sociala relationer. Vetenskapliga institutioner tog form, vilka konstituerade matematiken, och mer generellt vetenskapen, som ett till synes neutralt objekt med viss egenskaper. När sedan verkligheten relaterades till detta objekt blev resultatet en till synes naturlig hierarki, där vissa fungerade som *producenter* av värdefull kunskap, medan andra – vanligt folk, hantverkare, praktiker, allt utanför de vetenskapliga institutionerna – tillskrevs ett *behov* av det som dessa producenter producerar.

Allt detta skall kontrasteras mot relationen mellan räknekonsten och räknelärornas författare. Även dessa gjorde förvisso reklam både för räknekonsten och sina böcker. Deras tal om räknekonstens betydelse framstår dock snarast som individers reklam för sin egen specialitet. I förra kapitlet beskrev jag räknekonstens särdrag genom att knyta an till Toulmins beskrivning av skillnaden mellan 1500-talets renässans och den "motrenässans" han menar ägde rum under 1600-talet. Räknekonsten kunde tydligt ses tillhöra den första av dessa två rörelser. Lika tydligt är att matematiken tillhörde den andra. För att knyta an till Toulmins distinktioner kan matematiken sägas ha ansetts vara både universell, allmän och tidlös. Den passade den nya tidens krav på allmän och evig visshet som hand i handske. Samtidigt – vilket är väsentligt – betraktades matematiken inte på praktiskt användbar på alls samma sätt som räknekonsten. Matematiken förknippades med praktisk nytta, men på ett indirekt sätt – den svävade så att säga ovanför den partikulära, lokala, och tidsbundna praktiska verkligheten, och var nyttig genom att *representera* den på ett allmänt, generellt och tidlöst sätt. Matematiken var en vägledning för tänkande, inte för handling.

Väsentligt i sammanhanget är att den kompetens som Celsius, Strömer och Palmqvist hade och behövde för att kunna använda och skriva om matematik såväl förvärvats som uttrycks så att säga inom en akademisk värld. Deras böcker var bokstavligt talat skrivbordsprodukter. Sannolikt gällde detta även många räkneläror, men i fråga om räknekonsten föreställer jag mig åtminstone att dess behärskande också krävde praktiskt erfarenhet – utanför de lärdas sällskap. Matematiken upprättar tvärtom en tydlig relation mellan å ena sidan producenter, och å andra sidan konsumenter av matematisk kunskap. Och att producera matematisk kunskap kräver ingen erfarenhet av praktiker utanför skola och akademi. Enligt de egenskaper man tillskrev matematiken var den så att säga nytta i sig själv, till sin natur. Även om böckerna handlade om matematikens praktiska "användning" är det tydligt att själva matematiken existerade på ett avstånd från praktiken. Och detta faktum – vilket som jag visat framträder tydligt i Celsius och Palmqvists böcker – motsvarades av ett socialt avstånd: Celsius och Palmqvist deltog inte i den typ av praktiker som räknelärorna beskriver.

Vad gäller böckernas läsare identifieras de explicit av Strömer som blivande ämbetsmän. Matematiken skulle ge dessa ämbetsmän en förståelse av de sammanhang de skulle administrera. Det var alltså inte fråga om något praktiskt deltagande – att räkna – utan om att förstå de principer som utgjorde grunden för andras praktiskt handling.

Den förståelse det var fråga om kan inte likställas med behärskande av ett visst matematiskt stoff, det vill säga en förmåga att svara på en viss uppsättning matematiska frågor. Snarare skulle de som lärde sig matematik, genom övande ta till sig de principer genom vilka svaren producerades – mer exakt den euklidiska geometrins bevismetod. Matematiken representerade en modell för rationalitet, och genom att underkasta sig matematikens principer, skulle själen göras till matematikens avbild. Matematiken skulle rena läsarens blick och göra det möjligt för honom att se verkligheten som den är, fri från fördunklande förutfattade meningar.

I förhållande till matematiken framstår den som inte kan matematik som *bristfällig* i en betydligt större utsträckning än då det gäller räkneläran. Här handlar det inte längre om att "inte kunna" något, utan om att sakna förmågan att tänka riktigt. Matematiken betraktades (mer eller mindre) som verklighetens es-

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

sens, och den som inte behärskade matematiken saknade därmed i en väsentligt mening förmågan att se verkligheten så som man menade att den "egentligen" var.

På ett tydligare sätt än räknelärorna var böckerna jag redogjort för i detta kapitel skrivna för att användas inom institutionaliserad undervisning. Detta hänger samman med att matematiken redan från början kom att betraktas som en vetenskap genom att vävas samman med vetenskapliga institutioner. Författarna som skrev om matematik framstod inte som individer drivna av en disparat uppsättning personliga övertygelser, utan som representanter för vetenskapen som institution – även om det ännu skulle dröja länge innan denna institution fick den tydliga organisatoriska struktur den har idag.

Till skillnad från då det gäller undervisning baserad på räknelärorna var det här inte fråga om att i en oproblematisk mening lära eleverna att göra något. Snarare kan lärarens roll beskrivas som en administration av matematikens inflytande på elevernas intellekt (och i en vidare bemärkelse även deras moral). *Övning* kom därmed att få en annan roll än tidigare. Även räknekonsten fordrade övning, vissa delar mer än andra. Men i räknelärorna togs för givet att olika människor behövde olika mycket övning, och det stod var och en fritt att öva på det sätt man ansåg lämpligt. Ju mer man övade desto bättre blev man. I förhållande till matematiken var tvärtom vad man övade på av central betydelse, liksom att man övade på rätt sätt. Målet var att forma en matematisk "habitude" – vilken inte kunde reduceras till en förmåga att besvara en viss typ av frågor.

Denna förändring av undervisningens syfte hänger samman med en förändring i de kriterier i förhållande till vilka elevernas svar bedömdes. Räknelärornas svar är alltid korta och de utgör delar av sammanhang externa i förhållande till räknekonsten. Det var utifrån dessa sammanhang som svaren värderades. Prestationer i matematik värderades istället i förhållande till matematiken. Svaret *form* fick i och med detta en helt annan betydelse än tidigare. Man kan säga att matematiseringen förde med sig en förskjutning av fokus från själva svaret till vägen genom vilket svaret producerades. Matematiken sågs som en modell för tänkandet och ett språk för att beskriva en till sin essens matematisk verklighet. I undervisningen blev det därför viktigt att säkerställa att eleverna verkligen tänkte och uttryckte sig matematiskt.

Räknekonst var inte förbunden med någon institutionaliserad praktik värderad med utgångspunkt från några egna räknekonstens kriterier. Räknekonst var något som behövdes i en mängd sammanhang, men räknandet strukturerades och värderas med utgångspunkt från de sammanhang inom vilka det ingick. Typiskt för matematiken är tvärtom att den bara kan värderas utifrån sig själv, och att den dessutom, som jag nämnt ovan, kom att fungera som en utgångspunkt för tolkning och värdering av en mängd praktiker som genom matematiken kom att betraktas som baserade på matematiska principer.

Den nya typ av "orealistiska" exempel och övningsuppgifter som under denna tid tog plats i böckerna utgjorde en aspekt av detta fenomen. Dessa uppgifter syftade inte till att visa hur man räknar, utan till att illustrera matematikens principer. Räknelärornas exempel illustrerar hur man med räknande kan besvara olika frågor som man möter i det "borgerliga livet"; de är strukturerade med utgångspunkt från det sammanhang inom vilka frågorna uppkommer, och de handlar därmed i stor utsträckning om något annat än räknande. Den nya typen av exempel handlar tvärtom väsentligen om matematik. De innehåller samma termer som räknelärorna, men dessa termer är här strukturerade med utgångspunkt från matematiken. Man kan säga att dessa exempel illustrerar matematikens tolkningsföreträde inom de områden från vilka exemplens terminologi hämtas. Exemplen uttrycker matematikens bild av verkligheten.

Viktigt att komma ihåg är emellertid att denna bild vad gäller svenskt 1700-talet hade en högst begränsad räckvidd. Det var ännu få individer som "såg" den fysiska och sociala verkligheten som förankrad i matematiska principer. Matematiska kunskaper utgjorde ingen allmänt gångbar form av symboliskt kapital. Ett viktigt steg mot en förändring av detta togs kring sekelskiftet 1800. Då, närmare bestämt 1792, bildades kungliga krigsakademin på Karlberg utanför Stockholm.[1] Inom denna institution spelade undervisning i matematik en central roll. Man kan säga att matematiken i och med detta fick en institutionaliserad social *funktion*, nämligen som instrument för att å ena sidan sortera blivande officerare med utgångspunkt från deras prestationer i matematik, och å andra sidan för att – med hänvisning till den uppsättning positiva egenskaper som jag redogjort för ovan – få denna sortering att framstå som ett ändamålsenlig sätt att fördela officerskadetterna mellan olika karriärvägar. Kort sagt kom matematiken att bidra till att upprätta ett lokalt meritokratiskt system inom den militära sfären av det svenska samhället.[2] Denna matematikens nya roll fick en rad konsekvenser för de böcker i vilka matematiken presenterades – vilka nu allt

[1] Om detta kan man läsa i Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*.

[2] Esbjörn Larsson, vars avhandling utgör grunden för min framställning, menar att verksamheten på Karlberg inte alls bör beskrivas som meritokratiskt. Jag diskuterar skillnaden mellan våra respektive synsätt i nästa kapitel, sid. [XXX].

mer kom att bli mer renodlade läroböcker anpassade för en viss typ av undervisning – och därmed även för bilden av matematiken, det vill säga föreställningar om vad matematik är. Om detta handlar nästa kapitel.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

4. Meritokrati

I det förra kapitlet berättade jag om hur en ny matematisk diskurs tog plats i Sverige under första halvan av 1700-talet. Dess karaktäristiska drag var en argumentation för vetenskapens och matematikens mångfaldiga nytta. Denna diskurs var en del av en samhällsomvandling där delvis nya sociala kategorier, genom matematiken och naturvetenskaperna, reste anspråk på rätten att säga sanningen om samhället och naturen. Argumenten för matematik hade en kritisk udd riktad mot de då dominerande universitetsämnena klassiska språk och logik. Mer nytta, menade matematikens talesmän, skulle svenska ungdomar ha av att studera matematik.

Diskursen kan ses som ett försök att förknippa en specifik matematisk praktik (studier av Euklides *Elementa*, aritmetik och algebra) med vad som i tidens svenska samhälle ansågs värdefullt (praktisk nytta, krigskonst, rationellt tänkande, sedlighet). Med Bourdieu kan man säga att diskursen utgjorde ett försök att etablera "kunskaper i matematik" som en form av symboliskt kapital.

Retoriken till trots måste man vara medveten om att denna form av symboliskt kapital under 1700-talet hade tämligen begränsad räckvidd. Som jag påpekat angående den vetenskapliga revolutionen omfattade förändringarna i synen på vetenskapen under 1600-talet – och i stor utsträckning även under 1700-talet – ganska få individer. *Folket* – termen använd i en vid bemärkelse – berördes knappast. Inte heller resulterade den nya diskursen i någon genomgripande förändring av universitetsvärldens struktur.

Emellertid hade en process påbörjats genom vilken inte bara naturvetenskaperna helt skulle matematiseras – under 1800- och 1900-talen kom kunskaper i matematik allt mer att betraktas som en förutsättning för deltagande i samhällslivet över huvud. Kunskaper i matematik övergick successivt från att utgöra en *specifik* form av symboliskt kapital, knutet till enskilda samhällssfärer, till att utgöra en allmän form av symboliskt kapital knuten till staten och dess offentliga institutioner.

Det här kapitlet handlar om ett viktigt skede i denna process, nämligen om hur studier i matematik kring sekelskiftet 1800 kopplades loss från både vetenskapen och det praktiska ("borgerliga") räknandet, för att istället inlemmas som en del av vad jag här kallar ett *meritokratiska system*. Mer specifikt skall jag fokusera på hur studier i matematik ingick som en del av verksamheten vid kungliga krigsakademin på Karlberg utanför Stockholm. Denna verksamhet syftade, kan man säga, till att konstituera den svenska officerskåren som en autonom profession. I detta projekt fick matematiken fylla en rad funktioner. En beskrivning av dessa funktioner utgör en viktig del av detta kapitel. Många av skolmatematikens karaktäristiska drag kan nämligen förklaras med utgångspunkt från dessa. Under den tidsperiod som här står i fokus i det här kapitlet omfattade det meritokratiska systemet endast en speficik social kategori – officerskåren. Genom en utdragen process, vilken accelererade under första halvan av 1900-talet, kom detta systems räckvidd att utsträckas till hela samhället.

Jag skall här börja med att beskriva några böcker som användes vid den grundläggande matematiska undervisningen vid krigsakademin. Liksom i de föregående kapitlen pekar jag på likheter och skillnader jämfört med deras tidigare svenska motsvarigheter.

Sedan sätter jag in dessa böcker i ett socialt sammanhang. Min redogörelse för detta sammanhang bygger på uppsalahistorikern Esbjörn Larssons avhandling *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning. Kung.Krigsakademin mellan åren 1792 och 1866*.[1] I detta kapitlets andra avsnitt knyter jag även an till två likartade verksamheter på andra håll i Europa: För det första knyter jag an till "Tripos" i Cambridge i England. Historikern John Gascoigne beskriver hur detta system för grundlig examination av matematiska kunskaper tog form i Cambridge under andra halvan av 1700-talet och sedan fick stor betydelse för utformandet av det Engelska utbildningssystemet under 1800-talet. För det andra knyter jag an till matematiseringen av artilleristutbildningen i Frankrike. Om detta berättar den amerikanska historikern Ken Alder i sin bok *Engineering the revolution : arms and enlightenment in France 1763-1815*.[2] Med utgångspunkt från dessa tre institutionella sammanhang (Karlberg, Tripos, franska artillerister) gör jag

[1] Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning.*
[2] Alder, *Engineering the revolution.*

sedan en analys av de funktioner – gemensamma inom de tre institutionerna – som matematiken och de matematiska studierna kom att fylla som stöd för göra dem till, eller mer specifikt *få dem att framstå som*, meritokratier.

Avslutningsvis knyter jag dessa funktioner till beskrivningen av läroböckernas disposition och innehåll, och visar hur böckerna på olika sätt speglar den sociala funktion de matematiska studierna fyllde som delar av undervisningen vid kungliga krigsakademin på Karlberg.

4.1. Läroböcker i aritmetik och algebra

Kungliga krigsakademin på Karlberg var en kadettskola där det utbildades officerare för hela den svenska krigsmakten.[1] Verksamheten startade 1792 och bedrevs sedan på liknande sätt fram till 1860-talet, då formerna för svensk militär utbildning genomgick en andra stor transformation.[2] Till krigsakademin antogs ungdomar i de yngre tonåren. På Karlberg fick dessa ägna sig åt både teoretiska studier och praktiska övningar.

Jag skall här fokusera på fyra läroböcker som användes vid undervisningen på Karlberg kring sekelskiftet 1800: två i aritmetik och två i algebra. De två tidigaste författades av prosten Nils Petter Beckmarck och gavs ut 1794 (*Utkast til föreläsningar öfver Algebra*) respektive 1795 (*Arithmetik*). De två senare författades av Olof H. Forssell och utgör, som Forssell uttrycker det, "tillökade och förbättrade" utgåvor av de två tidigare böckerna.[3] Den första av Forssells böcker som han gav ut i eget namn är *Algebra för Begynnare* från 1801.[4] Hans *Arithmetik för begynnare* kom ut 1818.[5]

En av de saker jag vill visa med min jämförelse av dessa böcker är att undervisningen på Karlberg innebar ett viktigt steg mot att aritmetik och algebra – från att ha varit räknekonst och en elementär del av vetenskapen – på ett tydligare sätt än tidigare blev *skolämnen*. Som skolämnen blev de i flera avseenden mer lika varandra än tidigare. Detta beroende på att ett av alla skolämnens karaktäristiska drag är att de är anpassade för undervisningen och den roll denna undervisning spelar i ett övergripande institutionellt sammanhang. Man kan tala om en homogeniseringsprocess, där undervisningens sociala villkor på en rad olika sätt formar matematiken. Undervisningen bedrivs på ungefär samma sätt inom alla grenar av matematiken och på olika abstraktionsnivåer, och detta genererar en likhet till exempel i läroböckernas disposition och framställningssätt.

Intressant är att aritmetiken och algebran blir likartade skolämnen så att säga från två diametralt motsatta håll. Aritmetiken hade som vi vet sitt ursprung i räknelärornas räknekonst. Ett av räknelärornas karaktäristiska drag är deras rikedom på praktiska detaljer och en mängd "obligatoriska" moment vilka gjorde dem till ganska omfångsrika böcker både var gäller innehåll och antal sidor. I motsats till räknelärans tydliga regler för disposition och framställningssätt, hörde algebran inte till någon etablerad litterär genre. Som vi såg i kapitel 4 var den första svenska läroboken om algebra Celsius *Arithmetik eller Räkne-Konst* – vilken i stor utsträckning följde räknelärornas disposition, fast med ett huvudsakligen algebraiskt innehåll.[6] Palmqvists *Algebra* var den första boken om algebra som också hade ordet algebra i titeln.[7] I båda dessa böcker syns tydligt hur räknelärornas disposition förts över på ett algebraiskt innehåll. I vissa avseenden blev detta mindre lyckat, och redan hos Palmqvist kan man se en ambition att hitta en form som bättre speglade innehållet. Inte desto mindre blev skolämnet algebra i stor utsträckning en räknekonst med bokstäver, något som har sin förklaring i det ursprungliga inflytandet från räkneläran som genre.

När aritmetiken blev ett skolämne skedde detta genom att olika delar av räknelärornas innehåll skars bort, samtidigt som böckernas disposition förenklades. Algebran blev tvärtom ett skolämne genom att innehållet så att säga vecklades ut och tog form av allt mer självklara "moment". När läroböckerna i aritmetik blev allt kortare, blev läroböckerna i algebra längre. Ganska förbluffande är att dessa två trender under 1830-talet så att säga korsade varandra: då publicerades läroböcker i aritmetik som var knappast

[1] Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, 17.
[2] Ibid., 237.
[3] Olof H. Forssell, *Arithmetik för Begynnare. Författad och utgifven af Olof H. Forssell, Professor och Kyrkoherde.* (Stockholm: Tryckt hos A. Gadelius, 1818), förord.
[4] Olof H. Forssell, *Algebra för Begynnare. Författad och utgifven af Olof H. Forssell, Lector i Mathem. vid Kongl. Krigs-Academien* (Stockholm: Tryckt hos Carl F. Marquard, 1801).
[5] Forssell, *Aritmetik för Begynnare*.
[6] Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-Konst.*
[7] Palmqvist, *Inledning til algebra (I-II).*

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

mer än skelett, samtidigt som algebran hade växt ut till ett ämne fyllt av detaljer. Detta skall jag berätta om i nästa kapitel. Här skall jag nu redogöra för de fyra böckernas disposition och innehåll. Även om de utgör moment av den process jag beskrivit ovan, kan de inte reduceras till enbart detta. Tvärtom har böckerna alla sina särdrag, vilka sprider ljus över de specifika villkor inom vilka de författades och användes.

Nils Petter Beckmarks *Arithmetik* (1795)

Jämför man Beckmarcks *Arithmetik* med dess föregångar (dvs de svenska räknelärorna) ser man genast att han förskjutit fokus mot matematikens praktiska tillämpningar. Vad gäller räknelärorna kan man över huvud taget inte tala om någon "tillämpning" av matematiken, eftersom de som jag visat ovan inte innehåller någon uppdelning mellan matematik som abstrakt teori, och det praktiska räknandet. Den matematiska vetenskapens talesmän bröt med denna tradition genom att betona matematikens abstrakta sidor. I Beckmarcks *Arithmetik* kan man se en rörelse tillbaka mot praktiken, men nu till skillnad från i räknelärorna *med utgångspunkt från* matematiken.

Beckmark gör emellertid inte särskilt omfattande bruk av matematisk formalism – han använder tecknen för de fyra räknesätten, samt x för att beteckna en okänd storhet, men knappast mer. Den tydligaste förskjutningen i förhållande till räknelärorna ligger istället i en rörelse från det borgerliga livets huvudsakligen ekonomiska frågeställningar till teknikens, ingenjörskonstens och naturvetenskapens frågor, rörande lantmäteri och mekanik. Beckmarck beskriver hur dessa nya tillämpningsområden kan hanteras bland annat med hjälp av decimaler och logaritmer – verktyg som spelar en mer underordnad roll i räknelärorna.

Förskjutningens omfattning skall dock inte överdrivas. Beckmarcks *Arithmetik* är i stora drag fortfarande en räknelära. Särskilt gäller detta bokens struktur. Boken inleds traditionsenligt med en förklaring av siffrorna och talsystemet. Sedan följer de fyra räknesätten i hela tal, sorttabeller, räknesätten i sorter (här följer Beckmarck Roloff Andersson, snarare än Agrelius), bråk i allmänhet och de fyra räknesätten i bråk.

Beckmarcks avsnitt om sorter inleds på sidan 28 och sträcker sig över 30 sidor. Här syns att Beckmarcks framställning inte bara skiljer sig från räknelärornas genom att han i större utsträckning behandlar frågor rörande teknik och naturvetenskap. Genom det material han tar upp syns att han även i större utsträckning än räknelärorna knyten an till ett internationellt sammanhang. Han inkluderar en mängd tabeller över utländska myntsorter och mått. Över huvud taget innehåller Beckmarks *Aritmetik* tämligen omfattande tabeller. Detta visar ett karaktäristiskt drag hos Beckmarcks bok som jag skall återkomma till, nämligen att han utsträcker matematikens räckvidd – dess tillämpbarhet – till domäner som ligger bortom räknelärornas.

Beckmark inleder sitt avsnitt om sorter med konstaterandet att man, innan man går längre i räknekonsten än till de fyra räknesätten bör "känna, hvad slags storheter där kunna förekomma, huru de mätas, namnen på deras mått och ändtligen dessa måttens fördelningar".[1] Typiskt är att han därefter börjar med en beskrivning av sorter som "förekomma *i Naturen*" – något som vore räknelärornas författare främmande (de handlade som vi vet om det "borgerliga livet"). Han räknar sedan upp:

> *Längder, ytors vidd* eller Areer, *Rymder* eller kroppars solida innehåll; *Tyngder* eller vigter, hvarigenom Materiens myckenhet utrönes; *Penningar; Tid; vinklar* eller Lineers lutningar emot hvarandra; *Hastigheter; Tryknings* och *Rörelsekrafter*, och så vidare.[2]

Sedan följer en rad listor med diverse sorter: "Längders mått", "Areal Mått", "Rymders Mått", mått för "torra varor" och "våra varor", "Vigter", "Victualie Vigt, "Stapelstads vigt", "Upstads vigten", "Bergs vigten", "Tackjärns vigten", "Medicinal vigten", "Vigten vid Konl. Myntet och för oarbetadt Guld och Silfver", "Prober vigten", "Penningeräkning", "Stycketalsräkning", "Pappers räkning", "Tidsräkning", "Romerska ziffror" (!). Därefter presenterar Beckmarck åtta tabeller som visar hur svenska mått förhåller sig till diverse utländska mått. För att ge en bild av tabellernas omfattning återges den fjärde av dessa nedan:

---

[1] Nils Petter Beckmark, *Arithmetik, af Nils Petter Beckmark. Stockholm, tryckt hos Anders Zetterberg, 1795* (Stockholm: 1795), 28.

[2] Ibid., 29.

Table 3. Beckmarcks "Tab IV. Som föreställer förhållandet emellan de Svenska och utländska Våtvarors Mått, uträknade i Svenska kannor".[1]

	sv. k:r		sv. k:r
Altona 1 tunna	$44\frac{1}{4}$	Hamburg 1 Åm, om	
Amst. 1 Åm Renskt		4 ankar	$55\frac{10}{33}$
och Mosel vin	$58\frac{2}{11}$	1 Far Bränvin	$82\frac{21}{22}$
1 Oxh. Franskt vin	$81\frac{2}{11}$	Lisabon 1 Pipa	$169\frac{13}{33}$
1 Pipa Spanskt och		Livorno 1 Barile Vin	$16\frac{1}{22}$
Portugis vin	$154\frac{6}{11}$	1 Barile Olja	$12\frac{5}{33}$
1 F:t Franskt Bränvin	$83\frac{1}{11}$	London 1 Tun Vin.	$364\frac{2}{3}$
	$325\frac{10}{11}$		
1 Far Bomolja		1 Hobshead brunt Öl	
1 Åm Lin-Hamp och		om 54 Gallons	$95\frac{13}{33}$
Ros-olja	$54\frac{6}{11}$	1 Gallon öl eller	
1 Fat Tran	$87\frac{7}{11}$	dricka	$1\frac{1}{3}$
Bourdeaux 1 Barrique		Marseille 1 Millerole	$22\frac{3}{4}$
eller Oxhufv.	$90\frac{10}{11}$	Montpellier 1 Muid	
Cadix 1 Pipa Olja	$129\frac{22}{33}$	vin	$232\frac{5}{22}$
– 1 Botta vin	$180\frac{5}{11}$	1 Pipa Bränvin	192
Canarie Öarne 1 Pipa		Ryssland 1 Fat	$182\frac{2}{11}$
vin	$167\frac{5}{6}$	Spanien 1 Botta	$180\frac{5}{11}$
Cetter är lika med		1 Pipa	162
Montpellier	-	Rouen 1 Barrique	$74\frac{2}{3}$
Champagne 1 Queüe	$137\frac{1}{2}$	Rostock se Hamburg	-
Dannem 1 Åm om		Toulon 1 Millerole	$24\frac{13}{33}$
4 Ankar	$57\frac{2}{11}$	Stralsund 1 Stübgen	$1\frac{1}{2}$
1 tunna i allmänhet	$50\frac{2}{11}$	Strasburg 1 Åm	$17\frac{20}{33}$
Danzig 1 Åm, om 4			
ankar	$72\frac{1}{12}$		

Tabellen visar på omfattningen av det material Beckmark behandlar i sin bok. I detta avseende, det vill säga i sin rikedom på praktiskt användbara detaljer, liknar den de tidigare räknelärorna. Den tar sikte på att förmedla aritmetiken som ett praktiskt användbart redskap, snarare än som ett första steg mot bemästrande av den vetenskapliga matematiken. Tabellen ger också en bild av den internationella kontext som (enligt Beckmark) var relevant för de blivande svenska officerarna att känna till kring sekelskiftet 1800. Slutligen illustrerar tabellen ett faktum rörande sorträkning som jag nämnde i förbigående i kapitel 2 i anknytning till räknelärorna, nämligen att den ofta kunde leda till praktiskt svårhanterliga uträkningar. I den mån räknekonsten skulle bemästras var det alltså ett oeftergivligt krav att kunna hantera allmänna bråk, lika mycket kring sekelskiftet 1800 som tidigare.

Regula de Tri

En skillnad i förhållande till räknelärorna, karaktäristisk för övergången från räknekonst till tillämpad matematik är att Beckmarck, innan han introducerar Regula de Tri, har ett avsnitt med rubriken "Om Förhållande och Proportioner". Detta stycke motsvarar ungefärligen Palmqvists redogörelse för bråk, men nu med en rubrik som bättre speglar innehållet. Här förenas hos Beckmarck moment från flera håll. Liksom i räknelärorna ligger genomgången nära praktiken så till vida att Beckmarck ofta låter talen representera en sort (oftast Riksdaler). I motsats till räknelärorna nöjer han sig emellertid genomgående med att använda *en* sort åt gången i sina exempel. Detta gör att matematiken hamnar i fokus, snarare än komplikationer relaterade till sorterna. Avsnittets innehåll har i övrigt stora likheter med inledningen till Euklides femte bok. Det är emellertid föga troligt att Beckmarck hämtat det direkt därifrån. Snarare utgick han förmodligen från Celsius, Palmqvist, eller liknande utländska verk. Intressant är att Beckmarck, trots att detta

[1] Ibid., 41. I förbigående kan noteras att uppräkningen av utländska sorter ger en bild av vilka länder som Sverige vid denna tidpunkt (1795) hade handelsförbindelser med. Förutom den stora rikedomen på olika sorter som uppenbarligen förekom (detta är alltså bara en av åtta liknande tabeller) kan man också konstatera att trettiotredjedelar är den minsta bråkdel som Beckmarck använder.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

stycke uppenbarligen passar bra för ett algebraiskt behandlingssätt, begränsat sin användning av algebra. Han använder x, men beskriver samtidigt i stor utsträckning matematiken i löpande text. Till exempel så här:

> § 93. Tvänne tal sägas hafva lika förhållande eller vara *proportionella* med 2:ne andra, när deras qvoter äro lika, eller när det första ddivideradt med det andra ibland de förra talen, är lika stort med det första divideradt med det andra ibland de senare talen; och tvärtom, när talen äro proportionella, så äro deras *qvoter* lika. Sålunda när $\frac{2}{8}$ är = $\frac{3}{12}$, så är 2 til 8, som 3 til 12; och när åter 2 är til 4 som 8 til 16 så är $\frac{2}{4} = \frac{8}{16}$.[1]

Jag tolkar detta ordrika framställningssätt – vilket ter sig föga "pedagogiskt" så till vida att det knappast framstår som tydligt för någon som är ovan vid matematik – som ett uttryck för en ambition att å ena sidan beskriva den "riktiga" matematiken, men samtidigt att inte använda algebra – eftersom algebran är ett annat "ämne" och därför behandlas i en annan bok. Att på detta sätt utforma framställningen genom hänsynstaganden till matematiken i egenskap av undervisningsämne – att dela in matematiken i "kurser" – blev under 1800-talet allt mer typiskt för skolmatematiken. Beckmarks avstående från algebra i sin *Aritmetik* utgör ett därmed ett tecken som pekar mot vart skolmatematiken var på väg.

I linje med den vetenskapliga matematikens redogör Beckmark i sitt avsnitt om "Förhållanden och Proportioner" på litet utrymme för *principerna* som ligger till grund för Regula de Tri. Han presenterar dem i termer av matematiska sanningar . Han bevisar dem emellertid inte, utan nöjer sig med att exemplifiera. Detta är karaktäristiskt för det sammanhang som boken skulle användas inom: Beckmarcks fokus är på aritmetiken som ett användbart redskap, inte som en vetenskap.

Beckmark problematiserar inte. Han bevisar inte att de aritmetiska teknikerna är "sanna", och han diskuterar inte i vilken mån de resultat man får när man tillämpar dem stämmer med verkligheten. Snarare är hans mål att så långt som möjligt utsträcka aritmetikens räckvidd. Detta gör han till exempel genom att räkna upp 23 fall då han menar att Regula de Tri är tillämpbar. Det intressanta är att han genom denna uppräkning snarast kan sägas ringa in mängden av de uppgifter som *inom den kontext han skriver för* är avsedda att lösas med Regula de Tri. Som jag berättat om ovan är Regula de Tri tillämpbar då två kvantiteter är proportionella mot varandra. Att detta inte gäller allmänt för de fall han räknar upp är uppenbart, till exempel i följande fall:

> 1. Varors pris eller värde är altid proportionelt emot samma varors mängd, antingen i vigt, rymd, ytor eller längd; ju större mängd i vigt etc. ju större pris.
> [...]
> 6. Bestämda arbetslöner äro altid porportionella mot arbets tidernas längd; ju störretid, ju större lön.
> 7. Verkande orsaker, *på lika tid*, äro altid proportionella mot sina Effecter eller verkningar; så at ju större verkande orsak, ju större blir effeten, och tvertom, ju större effect åstundas, ju större bör verkande orsaken vara.
> [...]
> 10. När flere orsaker på en gång äro verkande, så blir efecten altid proportionel mot producten af dessa verkande orsaker.[2]

I den sista av de här referande punkterna är det tydligt att Beckmarck syftar på exempel avsedda att lösas med "sammansatt Regula de Tri", där till exempel antalet arbetare skall multipliceras med tiden de arbetar (då de i det typiska exemplet gräver ett dike). Min poäng är att Beckmarcks uppräkning bara är giltig inom en specifik kontext, och att denna kontext är just *skolans*, i det här fallet kungliga krigsakademin på Karlberg.

Typiskt för Beckmarks framställning är att han, i större utsträckning än räknelärorna, låter matematiken, snarare än den praktiska verkligheten, fungera som strukturerande princip. Detta visar sig tydligt i hans genomgång av tillämpningarna av Regula de Tri. I räknelärorna var dessa ordnade med utgångspunkt från praktiken, som en följd av mer eller mindre likvärdiga och i sig själva fullständiga "recept" för hantering av olika sorters räknefrågor. Beckmark börjar istället direkt med att skilja mellan den "enkla" och den "sammansatta" formen av Regula de Tri, för att sedan – utan anknytning till någon specifik tillämpning – presentera deras generella drag. Sedan utgår han från denna distinktion, dvs. mellan enkel och sammansatt Regula de Tri, i sin genomgång av alla de följande "tillämpade" räknesätten. Till exempel kommer "Enkel Intresse Räkning" före "Sammansatta Interesse Räkning", och "Enkel bolagsräkning"

[1] Ibid., 90.
[2] Ibid., 95-96.

före "Sammansatt Bolagsräkning". Särskilt tydlig blir matematikens strukturerande roll i det att Beckmark tar upp alla de möjligheter indelningsprincipen medger, även om detta resulterar i praktiskt meningslösa uträkningar. Varje tillämpning av Regula de Tri har i en matematisk mening en enkel och en sammansatt form. Detta faktum använder Beckmark som utgångspunkt för vad som skall behandlas. Räknelärorna utgår tvärtom (åtminstone i princip) från räknefrågor som faktiskt uppstår, och väljer med detta som utgångspunkt vilka räknesätt som måste behandlas. Beckmarks framställning kan därför, mer än räknelärornas, ses som en *illustration* av räknekonsten, snarare än en redogörelse för dess praktiska användning.

Det förtjänar dock att påpekas att Beckmarck är tämligen grundlig i sin redogörelse för det praktiska räknandet. Han är inte *omständlig* utan tvärtom koncis och kortfattad. Men genvägarna, de praktiska tipsen, och inte minst tabellerna, finns där. Man kan säga att han systematiserar, och kanske i viss mån schematiserar, räknekonsten. Om Celsius och Palmqvist uteslöt praktiken från sina framställningar med hänvisning till att räknekonsten är (blott) elementär matematik, så utesluter Beckmarck i viss mån praktiken genom att fokusera på räknekonsten som systematisk teknik. Räknelärornas karaktär av realistiska beskrivningar av praktiskt räknande saknas i viss mån, men av en annan anledning, och på ett annat sätt än i framställningarna som tog sikte på matematiken som abstrakt vetenskap.

Slutligen skall sägas att Beckmarck i sin tämligen korta bok ägnar relativt stort utrymme åt logaritmer. Framför allt visar han hur logaritmer kan användas – och han fokuserar på just de sammanhang där logaritmer är som mest användbara, det vill säga vid rotutdragning och potensräkning (framför allt beräkning av "ränta på ränta"). Denna redogörelse kan kontrasteras mot presentationen av logaritmer i läroböcker från slutet av 1800-talet, då logaritmräknandet transformerats till något helt annat än ett användbart redskap.[1]

Låt mig nu jämföra denna Beckmarcks *Arithmetik* med Olof H. Forssells *Arithmetik för Begynnare*, vilken kom ut drygt 20 år senare.

Olof H. Forssells *Arithmetik för Begynnare* (1818)

Redan andra upplagan av Beckmarcks *Arithmetik*, tryckt 1804, uppges vara "tillökt och förbättrad" av Olof H. Forssell. Ytterligare en förbättrad upplaga kom ut 1811, för att sedan 1818, under titeln *Arithmetik för Begynnare*, som Forssell skriver i sitt förord, komma ut "under sin rätta Författares namn".[2] Forssell hade 1818 ökat bokens omfång från Beckmarcks 196 till 336 sidor. De "förbättringar" han gjorde är, menar jag, signifikativa för det sammanhang han skrev för. Det rör sig nämligen om vad man kan kalla en "pedagogisering" av aritmetiken.

Beckmarcks framställning är kort, koncis, teknisk och systematisk. Det vore ingen överdrift att kalla den *torr*. Forssells ändring av titeln, från *Arithmetik* till *Arithmetik för Begynnare*, ger en vink om hur innehållet förändrats. Det vore fel att säga att Forssell förenklat aritmetiken. Däremot är Forssells framställning övervägande baserad på erfarenheter av den praktik inom vilken boken uppenbarligen användes. Man kan säga att Forssell format sin framställning med utgångspunkt från läsaren i egenskap av elev.

Först och främst är Forssells bok längre. Mer än Beckmarck är han mån om att verkligen göra sig förstådd. Texten är framställd i form av paragrafer mellan vilka Forssell sprängt in "anmärkningar" som ibland stäcker sig över flera sidor. I dessa anmärkningar reflekterar Forssell kring den övriga texten. Sammantaget blir resultatet något som liknar en dialog mellan den föreläsande (Beckmarck, vars tidigare framställning utgör bokens stomme) och en frågande lyssnare, som behöver ytterligare förklaringar, preciseringar och exempel. Första kapitlets sjätte paragraf handlar om hur man skriver stora tal – som vi vet ett av räknelärornas obligatoriska moment. Efter själva beskrivningen av hur man *gör* följer en anmärkning som jag citerar i sin helhet, för att visa på hur grundlig Forssell ofta är:

> Anm. När ett tal består af många siffror i bredd är det ofta ej så lätt, att vid första påseendet finna hvad värde hvar och en siffra äger ifrån den första till den sista. Dertil tjenar då följande anvisning: 1) Begynner man ifrån höger till venster att med ett komma (,) skilja siffrorna i klasser, tre siffror i hvar klass, 2) Öfver tredje klassens närmaste siffra åt höger sättes en punkt, öfver femte klassens sättes två punkter, öfver sjunde klassens tre punkter, och så vidare öfver hvarann klass. 3) De siffror, som hafva allenast ett komma framför sig till högre handen, utan punkt ofvanföre utnämnes genom *tusende*; men har siffran en punkt öfver sig, så nämnes *Millioner*; har hon två punkter nämnes *Billioner*, tre punkter *Trillioner*, fyra punkter *Qvadrillioner*, o. s. v. 4) För öfrigt utnämas siffrorna inom hvar klass på lika sätt, som när endast tre siffror äro skrifna i bredd.

[1] Nämligen ett föremål för mätning av prestationer. [Referens!]
[2] Forssell, *Aritmetik för Begynnare*, Företal.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

> Talet
>
> $$\dddot{9}, 876, 543,\ddot{2}10, 123,\dot{4}56, 789$$
>
> afdelas och betecknas som för ögat synes, samt utnämas sålunda: *Nie Trillioner* [...] *sju hundra åttionie.* – Med Billion menas tusen gånger tusen millioner, Trillion är tusen gånger tusen Billioner; Qvadrillion tusen gånger tusen Trillioner, o. s. v. När ordet *Milliard* förekommer, betyder det 1000 Millioner.[1]

Forssell blir som synes nästan omständlig i sin strävan efter tydlighet. Även om han inte (som tex Celsius) presenterar några matematiska bevis för räknekonstens många regler och genvägar är han inte desto mindre mån om att *förklara* det som Beckmarck helt enkelt bara *presenterar*. Ett typiskt exempel är här Forssells förklaringar till de många genvägarna för att förkorta bråk. Hans anmärkning inleds: "Orsaken till de flesta af dessa sannningar är lätt att finna", och sedan ägnar han tre sidor åt att gå igenom dem, en åt gången.

Många av Forssells anmärkningar har karaktären av goda råd. Dessa råd skiljer sig ofta (men inte alltid) från räknelärornas motsvarigheter genom att de handlar om enklare frågor, vilket är naturligt med tanke på att Forssell, som titeln anger, riktar sig till en "Begynnare". Intressant, särskilt i förhållande till senare läroböcker, är att han inte desto mindre tilltalar denna begynnare som vad jag tidigare kallat en "potentiell mästare". Att han behandlar en rad enkla frågor, innebär inte att han avstår från att behandla det som är mer komplicerat. Att läsaren uppenbarligen inte behärskar räknekonsten, förknippas här inte med en allmän oförmåga att tänka.[2]

Frågan är emellertid komplicerad. Det är nämligen inte självklart *för vad* Forssells råd är goda, med andra ord i vilken riktning han med sina långa förklaringar hjälper eleverna. Frågan hänger samman med den för mina syften enskilt viktigaste skillnaden mellan Forssells *Arithmetik för Begynnare* och alla tidigare svenska böcker om aritmetik, nämligen det stora antal "exempel för övning" som Forssell valt att inkludera i sin bok. Låt mig påminna om att Roloff Andersson, på ett tjugotal (!) ställen i sin ungefär samtidiga räknelära (från 1779), uttryckligen protesterar mot den trend han såg av att öka antalet tryckta exempel för övning i räkneböckerna.[3] Där Beckmark ger tre eller fem exempel presenterar Forssell ofta 15-25 eller ibland så mycket som 100 exempel.

För att undvika missförstånd är det emellertid viktigt att här påpeka att även räknelärorna innehöll många exempel, varav vissa, liksom de det här är fråga om, lämnades utan kommentar. I räknelärorna var emellertid exemplen på ett annat sätt än hos Forssell en integrerad del av framställningen. De fungerade som illustrationer och gav läsaren möjlighet att pröva sin förståelse. Hos Forssell är det tydligt att exemplen skall fylla en annan funktion: de skall fungera som verktyg för att lära sig. Frågan är vad man då lär sig.

Ett sätt att beskriva Forssells *Arithmetik för Begynnare* är att säga att den vänder sig mot undervisningens praktik. De långa förklaringarna, liksom exemplen för övning, riktar sig till eleven för att hjälpa, men detta innebär samtidigt att läroboken blir en sorts kodifiering av de svårigheter som måste övervinnas, och även *hur* de borde övervinnas. Min poäng är att Forssells lärobok därigenom på ett helt annat sätt än till exempel Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica* konstituerar bemästrandet som sådan. De tryckta övningsuppgifterna är något man gör *i skolan*, vilket jag tror skarpt bör skiljas från Anderssons *beskrivningar* av något som händer i specifika yrkespraktiker utanför skolan.

Här är det viktigt att komma ihåg att räknelärorna troligtvis i högst begränsad utsträckning användes för de självstudier de i viss mån var skrivna för. De hör till en genre vilken vi sett måste förstås som just *beskrivande*, eller kanske *demonstrerande* – av vad som är möjligt att göra. Liksom tidigare Palmqvist, strukturerar Forssell om räknelärornas material, men till skillnad från Palmqvist strukturerar han inte om det med utgångspunkt från matematiken. Istället strukturerar han stoffet med utgångspunkt från undervisningen. Han tar räknelärornas beskrivningar av hur man gör utanför skolan, transformerar dem till något man gör i skolan, och visar sedan hur man lär sig göra just detta.

Här har alltså både de praktiska komplikationer som räknelärorna beskriver, och vetenskapens (svåra) formalism uteslutits. Forssell har bevarat de svårigheter som är förknippade med räknekonsten som teknik, men liksom i Beckmarcks framställning framstår denna teknik här som en systematisk helhet. I motsats till Beckmarck visar Forssell vägen mot ett praktiskt bemästrande av denna teknik. I och med detta hade ett viktigt steg tagits mot den typ av läroböcker i matematik som vi har idag.

---

[1] Ibid., 4.
[2] Jmf kapitel 6 nedan.
[3] Se ovan [räknekonsten och matematik s. X].

Beckmarcks *Algebra* (1794) och Forssells *Algebra för Begynnare* (1801)

Den förändring av aritmetikens behandling som jag beskrev i förra avsnittet motsvarades av en liknande förändring rörande algebra. Jag skall här beskriva denna förändring med utgångspunkt från en jämförelse mellan Beckmarks *Algebra* från 1794 och Forssells *Algebra för Begynnare* från 1801. Tabellen nedan visar de respektive böckernas disposition.

Table 4. Jämförelse mellan Beckmarcks *Utkast til föreläsningar öfver Algebra* (1794) och Forssells *Algebra för Begynnare*. (1801)[1]

Beckmarcks rubriker	**sidor**	**Forssells rubriker**	**sidor**
Cap. 1.	3	1 Cap. Om de algebraiska Tecknen.	12
Cap. 2. Om Addition och Subtraction.	2	2. Cap. Om Addition och Subtraction.	5
Cap. 3. Om Multiplication och Division.	4	3 Cap. Om Multiplication och Division.	10
Cap. 4. Om bråk i allmänhet.	9	4. Cap. Om Bråk.	11
Cap. 5. Om decimal bråk.	6		
Cap. 6. Om digniteter.	8	5 Cap. Om digniteter och Rötter.	22
Cap. 7. Om Æquationer.	9	6 Cap. Om Equationer i allmänhet och om Enkla Equationers uplösning, som blott innehålla En obekant.	19
		7 Cap. Om Quadratiska Equationers Uplösning	11
		8 Cap. Om Equationers Uplösning, som innehålla Två eller flera Obekanta.	13
Cap. 8. Om Proportioner och Serier	15	9 Cap. Om Förhållande, Proportioner och Serier.	12
		10 Cap. Om Logaritmer.	17
		11 Cap. Om Algebras Tillämpning til Geometriska Problemers Uplösande.	44
Cap. 9. Om Problemers uplösning.	8	12 Cap. Några Arithmetiska Problemer til hvilkas uplösning Algebra lämpas.	30
Cap. 10. Om Æquationer av högre grader	8		
totalt antal sidor:	80	totalt antal sidor:	204

Beckmarcks *Utkast til föreläsningar öfver Algebra* sträcker sig över endast 80 sidor. Samtidigt behandlar Beckmarck ett tämligen omfattande stoff. Att ekvationen går ihop beror på att Beckmarck är synnerligen kortfattad. Han beskriver kort och koncist en mängd *regler för hur man räknar med bokstäver*. Han bevisar dem inte, han förklarar inte varför de ser ut som de gör, han demonstrerar inte deras (eventuella) praktiska nytta. Liksom räknelärorna illustrerar han sina regler med exempel, men de innehåller ytterst sällan något annat (tex sorter) än den bokstavsräkning boken handlar om. Beckmarck har, kan man säga, gjort algebran till ett system av regler – och uteslutit allt annat. Detta system beskriver han, på samma sätt som räknelärorna beskriver det borgerliga livets praktiska räknande.

I sin *Algebra för Begynnare*, som med sina 204 sidor är mer än dubbelt så lång som Beckmarcks bok, ägnar Forssell tvärtom stort utrymme åt att förklara. Väsentligt är emellertid att det han förklarar är hur man gör – han ägnar sig inte åt matematiska bevis. Om Beckmarck beskriver systemet, så presenterar Forssell en ingång till dess bemästrande. Precis som i sin *Arithmetik för Begynnare* ger han läsaren en mängd goda råd, kombinerade med exempel för övning.

Framställningssättet kan illustreras genom Forssells redogörelse för multiplikation och division. När man multiplicerar "enkla storheter" med varandra sätter man, skriver Forssell, bokstäverna bredvid varandra, "utan något tecken emellan".[2] Han forsätter:

> Dervid märkes endast, at de för redigheten skull vanligen sättas i samma ordning, som de äga i alphabetet; således skrifver man *ab* och ej *ba*; *acx* och ej *xax* eller *xca*; ehuru i alla fall producten blir densamma, man må sätta bokstäfverna i hvad ordning som hälst.[3]

[1] Nils Petter Beckmark, *Utkast til föreläsningar öfver algebra, utgifvit af Nils Peter Beckmarck. Stockholm, tryckt hos Anders Zetterberg, 1794* (Stockholm: 1794). respektive Forssell, *Algebra för Begynnare*.
[2] Forssell, *Algebra för Begynnare*, 17.
[3] Ibid.

Citatet illustrerar Forssells "pedagogiska" framställningssätt, där han som synes skiljer mellan det matemtaiska och det konventionella, och ger exempel för att förtydliga vad han menar. Som ytterligare exempel kan anföras vad Forssell skriver mot slutet av sin redogörelse för division:

> Alla ofvanstående exempel äro så valde, at divisorn går jämnt up i dividenden; men sådan händer mycket sällan vid equationers handterande, der divisorn och divienden ej bero af eget val. Vanligaste utvägen är då at genast teckna quoten som et bråk, hvaruti dividenden blir täljare, och divisorn nämnare; ty sällan vinnes någon förmon dermed, at man verkställer Division så långt som ske kan, och sedan tecknar resten som et Bråk. Likväl är för en begynnare altid rådligast at först försöka om Division kan verkställas; emedan annars kunde hända at han anser det för omöjligt som likväl låter göra sig. Kännemärket at en Division ej går jämnt up är det, at man sluteligen får något öfrigt, som ej kan divideras med divisorns första term utan at få bråk i quoten. Til vissa ändamål i den högre calculen brukar man väl, at ändå fortsätta divideringen med bråk, såsom följande exempel utvisar, då man i quoten får en såkallad *Series* [...][1]

Viktigt här är att det Forssell leder läsaren mot inte är den matematiska vetenskapen algebra i allmänhet, utan det system av regler som Beckmark sammanställt som utgångspunkt för undervisningen vid krigsakademin på Karlberg. Reglerna konstituerar en praktik, och Forssells bok handlar, kan man säga, om elevens möte med denna praktik. Den utgår troligtvis från Forssells egna erfarenheter av detta möte. Forssell har observerat vilka svårigheter eleverna möter, och hur de kan övervinnas. Han fyller på med tips och goda råd – som visat sig vara eleverna till hjälp.

Beckmarcks bok är strukturerad med utgångspunkt från algebran som system, det vill säga med utgångspunkt från hur de många reglerna hänger samman. Algebran framstår i Beckmarcks bok som ett verktyg. Genom Forssells mer detaljerade rubrikstruktur framstår hans bok i högre utsträckning som en *väg*, med riktning från det enklare, till det mer komplicerade. Utgångspunkten är här med andra ord eleven, den som skall lära sig "ämnet" algebra. Algebran utgör fortfarande slutpunkten, men Forssells bok innehåller inte bara denna slutpunkt, utan även vägen dit.

Det är tydligt att Beckmarck inte skrev sin algebrabok med utgångspunkt från Celsius och Palmqvists respektive böcker. I sitt förord anger han "Mclaurin, De la Caille, Simpson och Euler" som de "Godkände Auctorer" från vilka han utgått.[2] Inte desto mindre kan man fortfarande hos Beckmarck – liksom i de tidigare svenska algebraböckerna – se att algebran ännu inte fått de fasta gränser den fick under första halvan av 1800-talet. Det typiska exemplet är här att Beckmarck i sin bok inkluderar ett avsnitt om decimalbråk – ett ämne som svårligen låter sig behandlas utan användande av *siffror* snarare än de bokstäver som annars står i fokus. Att Beckmarck behandlar decimalbråk är å andra sidan ingen slump. Det visar på Beckmarcks allmänna strävan att knyta sin framställning till matematikens naturvetenskapliga och tekniska tillämpning. Det var inom dessa områden – till exempel inom lantmäteriet – som man redan under 1700-talet börjat använda dekadiska enheter, vilket därmed gjorde decimalbråk användbara. Forssell tar inte upp decimaler i sin *Algebra för Begynnare*, vilket pekar mot den allt tydligare gränsen mellan "ämnena" aritmetik och algebra.

Att algebran hade otydliga gränser i Beckmarcks bok visar sig även i det att han behandlar ekvationer av högre grader än två. Just andragradsekvationer kom nämligen, i Forssells och än mer i E. G. Björlings *Elementa-Lärobok i Algebra* från 1832, att utgöra algebraämnets självklara slutpunkt.[3] I och med detta kunde algebraämnet struktureras som en väg mot just de tekniker som krävs för lösande av andragradsekvationer. Den blev en "avrundad helhet", väl avgränsad gentemot den matematiska vetenskapen, i förhållande till vilken den förmåga att snabbt och säkert lösa andragradsekvationer som övades upp inför examinationerna är fullständigt irrelevant.

Forssell anför tre argument för varför han inte tar upp ekvationer av högre grad än två. För det första menar han att den som "behöver känna sådana Equationers handterande" också rimligtvis måste antas kunna lära sig det de behöver på egen hand genom att läsa böcker på andra språk än svenska. För det andra – och detta är givetvis huvudargumentet – *fanns inget institutionellt krav* på kännedom om sådana högre graders ekvationer: "Af Kongl. Krigs-Academiens Elever", förklarar han i sitt föror, "äskas icke

[1] Ibid., 26.
[2] Beckmark, *Utkast*, Baksidan av titelbladet.
[3] E. G. Björling, *Elementar-lärobok i Algebra, af E. G. Björling, Ph. Mag., Lärare i Mathematik vid Hillska Skolan å Barnängen* (Stockholm: Tryckt hos Johan Hörberg, 1832).

denna kunskap".[1] Slutligen menar han att införande av denna teori skulle göra boken dyrare än nödvändigt.[2]

Intressant i detta sammanhang är även att Forssell, i motsats till Beckmarck, har med ett avsnitt om logaritmer i sin algebrabok. Det är egentligen inte svårt att förstå varför han har *med* logaritmer – de var ett relativt nytt matematiskt redskap, som (säkert med rätta) ansågs vara mycket kraftfullt. I förhållande till algebran innebar logaritmerna – särskilt så som de behandlades vid denna tidpunkt – emellertid ett problem på liknande sätt som decimalerna. Logaritmerna kunde nämligen knappast presenteras utan omfattande bruk av siffror. Det är i detta avseende symptomatiskt att Forssell i sitt avsnitt om logaritmer hänvisar till Beckmarcks *Arithmetik*.[3] Logaritmerna passar helt enkelt inte särkskilt bra in i det system som algebran i vissa avseenden utgjorde redan i Beckmarcks framställning. Signifikativt vad gäller den riktning i vilken skolmatematiken vid denna tid rörde sig, är här att E. G. Björling i sin *Elementar-Lärobok i Algebra* publicerad 1832 inte nämner logaritmer med ett ord.[4]

Även en annan skillnad mellan Beckmarcks och Forssells respektive böcker pekar fram mot Björlings. Forssell ägnar nämligen relativt stort utryme åt lösning av aritmetiska problem med hjälp av algebra. Där Beckmarck nöjer sig med att presentera algebran som system, är Forssell dessutom angelägen om att, genom tillämpningar, visa hur algebran kan användas. Forssells tillämpningar av algebra har mer än tidigare svenska algebraböcker karaktär av "matematisk modellering". Detta så till vida att han går igenom ett mindre antal problem relativt grundligt, snarare än snabbt ta sig igenom ett stort antal enklare problem. Hans explicit uttryckta syfte är också att med hjälp av algebran ta fram ett generellt ramverk för att hantera de "grupper" av situationer som problemen exemplifierar. De "aritmetiska" problemen hämtar han från naturvetenskap, teknik och ekonomi. Karaktäristiskt är här, som vanligt när det gäller algebra, att problemen framstår som eleganta och kraftfulla *beskrivningar*, men att de å andra sidan inte säger särskilt mycket om hur problemen kan hanteras i praktiken.

Beckmarck och Forssells böcker förenas av sin ambition att utsträcka matematikens räckvidd. Hos Beckmarck syns denna ambition tydligast i hans *Arithmetik*, medan den är ett karaktäristiskt drag hos båda Forssells böcker. Forssell placerar sig, kan man säga, mellan den matematiska vetenskapen och verkligheten, och förbinder dem med varandra med hjälp av *tillämpningar*. Dessa är mer praktiska än de som anfördes av Celsius och Palmqvist, samtidigt som de inte är realistiska på samma sätt som räknelärornas beskrivningar.

Forssell skiljer sig från Beckmarck på så sätt att hans böcker dessutom är strukturerade med utgångspunkt från en elev som skall lära sig med hjälp av hans bok. Forssell leder eleven framåt. Min tes i detta sammanhang är emellertid att det han leder eleven mot måste förstås som en relativt autonom praktik knuten till själva undervisningen. Den aritmetik och den algebra Beckmarck och Forssell konstituerar är något man *gör i skolan*. I läroböckerna framstår denna praktik emellertid som en väg mot ett bemästrande av en matematik som både är en vetenskap och praktiskt nyttig inom så gott som alla områden av den sociala och fysiska verkligheten.

4.2. Matematikens funktioner

Böckerna jag just beskrivit användes vid undervisningen på kungliga krigsakademien på Karlberg. Som en del av min övergripade berättelse om skolmatematikens historia betraktar jag denna kontext som en meritokrati. Det är dock inte självklart att verksamheten vid krigsakademin på Karlberg bör betraktas som en meritokrati. Till exempel skriver Esbjörn Larsson att "Krigsakademien aldrig antog skepnaden av vad vi idag skulle kalla en meritokratisk verksamhet".[5] Detta är emellertid ett påstående som måste preciseras och kanske även i viss mån ifrågasättas. Huruvida man anser att verksamheten på Karlberg var meritokratisk eller inte beror givetvis på vad man lägger i termen "meritokrati". Den avgörande skillnaden mellan mig och Larsson är troligtvis att jag "nöjer mig" med att en institution framställer sig själv som om den vore meritokratisk (dvs. att den fördelar meriter på ett relevant och rättvist sätt), medan Larsson vill be-

[1] Forssell, *Algebra för Begynnare*, Til Läsaren.
[2] Detta sista argument blir sedan allt vanligare under 1800-talet, vilket givetvis hänger samman med att man under denna tid allt mer måste tala om böckernas "användning" än deras läsning – böckerna blir, kan man säga, verktyg producerade för en allt mer konkurrensutsatt marknad, med uppenbara effekter för prissättningens betydelse.
[3] Forssell, *Algebra för Begynnare*, 121.
[4] Björling, *Elementar-lärobok i Algebra*.
[5] Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, 142.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

gränsa termens användning till institutioner vars sätt att fungera även innebär att de i någon mening också lever upp till sitt sätt att presentera sig själva. Problemet med Larssons terminologi är att den leder riskerar att leda till en situation där *inga* institutioner är meritokratiska, eftersom varje institution – även då det finns uppriktiga intentioner – i praktiken knappast helt och hållet kan motsvara det meritokratiska idealet. I min analys tar jag därför fasta på själva sättet att tala, om till exempel objektivitet och rättvisa, som ett av de meritokratiska systemens karaktäristiska drag. Väsentligt rörande den praktiska verksamheten blir därmed, snarare än att den motsvarar den meritokratiska diskursen, att den får denna diskurs att framstå som trovärdig. Min tes är att matematiken kom att ge ett stort bidrag i detta avseende, det vill säga för att få de meritokratiska systemen att framstå som motsvarande sina pretentioner. I det följande skall jag först beskriva en rad aspekter av hur detta gick till. Som avslutning på detta avsnitt tydliggör jag de funktioner matematiken fick fylla genom att redovisa något av den kritik som matematikens roll, till exempel i undervisningen på Karlberg, resulterade i. Kritiken tog nämligen ofta sikte just mot den "funktion" de matematiska studierna fyllde, ibland med utgångspunkt från analyser inte helt olik den jag presenterar här.

Meritokratins insida och utsida

Under 1900-talets första hälft, det vill säga ungefär 100 år efter förloppet som beskrivs i det här kapitlet, blev det svenska samhället en meritokrati.[1] Examina fördelade inom ett övergripande "utbildningssystem" blev då grunden för tillträde till positioner inom de flesta samhällssfärer, och detta utbildningssystem kom därmed att utgöra grunden för samhällets reproduktion.

De meritokratiska system som står i fokus här utgjorde istället delar av ett samhälle vars struktur och reproduktionssätt inte var meritokratiskt. I förhållande till detta samhälle reste de anspråk begränsade till en viss samhällssfär, inom vilken de försökte upprätta ett meritokratiskt system. Man kan säga att de eftersträvade *autonomi* genom att etablera en *profession* förankrad i en viss typ av *expertis*. Viktigt för denna typ av begränsade meritokratiska system är den gräns de upprättar i förhållande till det omgivande samhället. Jag skall här ta upp fyra aspekter av denna gräns.

För det första är det utifrån det meritokratiska systemets autonomi viktigt att rörelsen utifrån och in i en administrativt praktisk mening så att säga kontrolleras från insidan. Såväl i det franska sammanhang som Ken Alder studerar som vid kungliga krigsakademin på Karlberg utgjordes denna väg till stor del av matematiska studier. Det är denna aspekt av vägen jag skall fokusera på. Upprättandet av matematiska studier på själva krigsakademin kan ses som ett uttryck för strävan att kontrollera vägen in i den militära sfären. De böcker jag redogjort för ovan var skrivna "på befallning" för att användas just där, vilket ytterligare talar för en hög grad av autonomi i detta avseende.[2] Det gör även det faktum att böckerna så att säga "kodifierar" praktiken i högre grad än tidigare. Böckerna är utformade för att skapa en enhetlig praktik vars ändamål är att fungera som en väg från A (utanför) till B (innanför den militära sfären). Viktigt är även autonom kontroll över examinationen av de som pretenderar på att ingå i den militära sfären. De återkommande, och vad jag förstår tämligen formella examinationerna, samt utdelandet av betyg, talar för en hög grad av autonomi i detta avseende.[3]

Kontroll över "vägen in", kräver emellertid också en kontroll över betygens och examinationernas konsekvenser. Poängen är givetvis att inträde – och mer specifikt position inom den militära sfären – skall bestämmas med utgångspunkt från (bland annat de matematiska) studieresultaten. Detta är en av de punkter där krigsakademin särskilt inte inledningsvis passar med den meritokratiska modellen. Inte förrän 1835 infördes krav på formell examen för tillträdande officerare.[4] Innan dess skedde befodran på delvis informella grunder, vilket innebär att gränsen mellan insida och utsida alltså inte stod under "meritokratisk" kontroll. Detta upplevdes emellertid som ett problem. Larsson citerar generalmajoren Magnus Björnstjerna, som framhåller

> den orättvisa hvarje Befälhafvare begår, så han till officer föreslår en yngling, hvars like till härkomst, uppförande och förmögenhet går uti conscriptionens leder?[5]

[1] Se kap. [X] nedan.
[2] Beckmark, *Utkast*, Förord. Beckmark, *Arithmetik (1795)*, Förord.
[3] Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, 120.
[4] Ibid., 194. Det fanns emellertid undantag från denna regel, se Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, 114.
[5] Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, 190.

Att Björnstjerna betecknar den befordran som ligger bortom den meritokratiska kontrollen som "orättvis" är karaktäristiskt för de anspråk som hör till det meritokratiska systemet. Man ville att "företräde skulle tillkoma den militaira upfostran", det vill säga examen från Karlberg.[1] Undantag från regeln att examen skulle vara obligatorisk skulle bara göras för de som "genom tre till fyra års verklig tjänstgöring skaffat sig praktiska kunskaper som kunde väga upp eventuela teoretiska brister".[2] Man kan här se ett månande just om *kontrollen* över inskolningen i det militära.

För det andra är det väsentligt att vägen så att säga leder fram till en punkt som förknippas med allmänt omhuldade sociala värden. En viktig poäng med varje form av autonomi är givetvis att det skall betraktas som gott och eftersträvansvärt att ingå, här i den militära sfären. De matematiska studerna bidrog till detta värde genom de egenskaper som förknippades med matematiken, och som vi ovan sett kom till uttryck tidigare under 1700-talet. Delvis låg argumentationen som omgav de matematiska studierna på krigsakademin i linje med den retorik jag beskrev i kapitel 3. Man sa att matematiken " icke allenast stadgar begreppet, wänjer att täncka i ordning med redighet samt aldrig antaga en sak för sann eller osann förr än efter nogaste pröfning och urskilgning, utan och upodlar fintligheten [...]".[3] Man talade om "snillets tillwäxt och framsteg", och om att matematiken, som Larsson uttrycker det, "övade abstraktionsförmågan".[4]

Det räckte emellertid knappast att de studier som låg till grund för inträde i den militära sfären förknippades med allmänna högre värden – för det tredje måste de också vara specifikt knutna till de anspråk som var förknippade med denna specifika sfär. De matematiska studierna måste alltså även motiveras med hänvisning till att de var *relevanta* inom det militära. Detta var också något man argumenterade för, och här skiljer sig retoriken kring krigsakademien från den som förekom under första halvan av 1700-talet. Man talade vid krigsakademin om "Mathematiquen, utur hvilcken grunderna till all Krigskonst hämtas" och att just de allmänna egenskaper som matematiska studier leder till alla är "hufvusakeliga egenskaper hos en Krigsman".[5] Anknytningen mellan matematiken och det militära var emellertid inte bara en fråga om retorik – den avspeglades även i studiernas praktiska och teoretiska utformning. Det var med andra ord inte matematik i allmänhet som studerades, utan en matematik speciellt utformad för att passa det militära.

Ken Alder ägnar stort utrymme åt att diskutera just matematikens anknytning till det militära. Han visar att matematiseringen av fransk militär utbildning – i synnerhet utbildningen av ingenjörer – hänger samman med upprättandet av en ny position mellan den abstrakta teoretiska vetenskapen, och praktiken. Centralt är att utbildningen syftade till att *forma effektiva individer*, och att det för att nå detta mål var nödvändigt att undvika två defekta personlighetstyper: å ena sidan vetenskapsmannen som sitter vid sitt skrivbord och spekulerar kring verklighetens essens utan förmåga till praktisk handling; å andra sidan skulle utbildningen leda till en kompetens annan än hantverkarens eller soldatens, som är bunden till en traditionell oreflekterad praktik. Ingenjören skulle förena teori och praktik. Han skulle kunna tala och förstå vetenskapens språk, men samtidigt kunna knyta denna förståelse till den militära verksamhetens praktiska detaljer.[6] På detta sätt skulle han frigöra praktiken från traditionen och leda en kontinuerlig förbättringsprocess – med det högre syftesmålet att ge Frankrike en effektiv krigsmaskin.[7]

Intressant nog innebar detta ett särskilt fokus inom den matematiska vetenskapen – nämligen på analys och analytisk geometri (geometri förenad med algebra), snarare än på euklidisk geometri. Den euklidiska geometrin hade stått i de militära matematiska studiernas centrum i Frankrike under hela första halvan av 1700-talet, men från och med 1760-talet hamnade den i vanrykte och beskrevs som "ostentatious and useless". Istället för euklidisk geometri skulle ingenjörerna studera "the new analytical mixed mathematics", vilken betraktades som "open-ended and explosive". Den "blandade matematiken", där man mätte upp parametrar vilka relaterades till varandra med hjälp av matematik för att nå en "optimal gain", kunde associeras med "the dynamic field tactics advocated by reformers, and with the maximizing methods of

[1] Generalmajoren Magnus Björnstjerna, i Ibid., 190-91.
[2] Här är det Larsson själv som talar, Ibid.
[3] Stapelmohr, "Plan till en cadettcorpes inrättande för armén o dess flotta" (1777-1779) ur Tosterupsamlingen i Riksarkivet, citerad i Ibid., 218.
[4] Majoren Herman Henrik von Stapelmohr citerad i Ibid., 186. samt Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, 219.
[5] Stapelmohr, "Plan till en cadettcorpes inrättande för armén o dess flotta" (1777-1779) ur Tosterupsamlingen i Riksarkivet, citerad i Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, 218.
[6] Alder, "French Engineers Become Professionals," 104.
[7] Ibid., 102-03.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

the new engineering ballistics". Det var genom sitt behärskande av *denna* matematik som ingenjörerna kom att associeras med "research, innovation, and a dynamic mode of thought".[1]

Mitt intryck är att studieordningen på krigsakademin var inspirerad av franska förhållanden, men att man på Karlberg inte lika definitivt som i Frankrike tog avstånd från den euklidiska geometrin. För detta talar inte minst att studentexamen kring mitten av 1800-talet, i samband med att krigsakademin avvecklades, kom att fungera som första krav för inträde i den militära sfären. Denna examen bestod till stor del av en prövning i just euklidisk geometri,[2] och den hade formats i stor utsträckning med utgångspunkt från hur studierna tidigare bedrivits på Karlberg.[3]

I detta sammanhang kan nämnas att det i England, parallellt med framväxten av meritokratier knutna till det militära i bland annat Frankrike och Sverige, växte fram ett meritokratiskt system med helt andra konnotationer, nämligen systemet som kretsade kring Tripos i Cambridge. Även i Cambridge spelade matematiska studier huvudrollen, men i motsats till i Frankrike stod där den euklidiska geometrin i centrum.[4] Det är tänkbart att utvecklingen i Sverige i viss mån var påverkad även av England, och att detta utgjorde en bidragande orsak till Euklides fortsatt starka ställning i Sverige under hela 1800-talet (liksom under första halvan av 1900-talet).

För det fjärde, och här ligger det meritokratiska systemets kärna, är det väsentligt att det autonoma system för befordran som upprättas, från utsidan ser ut att leda till ett realiserande av de värden som systemet som helhet representerar. Inrättandet av matematiska (och andra) studier vid Karlberg utgjorde ett försök att bryta med en äldre social ordning. Denna innefattade en syn på hur en god militär skulle vara, hur han skulle bli sådan, hur det skulle avgöras vem som var lämpad för vilken position inom det militära, och så vidare. Den nya ordningen inrättades med anspråk på att vara *bättre* än den gamla. Ovan har jag diskuterat två roller de matematiska studierna spelade som delar av dessa anspråk. För det första som befordrande av goda personliga egenskaper i allmänhet. För det andra som grunden för en specifikt militär expertis.

Lika viktigt som de värden som förknippades med studiernas innehåll var emellertid det sociala system genom vilket dessa egenskaper gjordes verksamma inom den militära sfären. Enkelt uttryckt menade krigsakademins talesmän att, om vi får förvalta den militära sfären själva, då kommer den svenska militären fungera så bra som det bara är möjligt. Detta på grund av att vi utbildar våra adepter i matematik (som lär dem tänka redigt), kunde de tänkas säga, på grund av vår väl organiserade praktiska exercis, på grund av att våra studier är fokuserade på just den matematik som utgör krigsvetenskapens grund, på grund av att vi fostrar män som behärskar såväl teori som praktik, och så vidare. Men till detta kom en helt annat typ av anspråk, nämligen på att ha utformat ett socialt system där individer fördelas inom den militära sfären med utgångspunkt från deras lämplighet för olika uppgifter. Studierna sägs alltså å ena sidan leda till allmänt värdefulla egenskaper. Å andra sidan innefattar kraven på autonomi ett system för fördelning av individer med utgångspunkt från i vilken mån varje enskild individ anses besitta dessa egenskaper.

Vad gäller denna sida av det meritokratiska systemet såväl som de övriga tre jag redogjort för ovan, är det viktigt att skilja mellan hur systemet *framstår* – från utsidan – och vad en sociologisk analys kan säga om hur det i praktiken fungerar. Det är, tror jag, på denna punkt min analys skiljer sig från Larssons. Vad han, med utgångspunkt från sina sociologiska data, kan konstatera är att krigsakademin under sin verksamhetstid inte tycks ha utgjort någon "verklig" meritokrati, så till vida att studieresultaten särskilt inledningsvis hade föga betydelse för kadetternas karriärer efter avslutade studier.[5] Mer exakt konstaterar Larsson emellertid att studieresultaten, från att nästan inte haft någon betydelse alls på slutet av 1700-talet, kom att få en växande betydelse under 1800-talets första hälft. Denna kronologi stämmer ypperligt med de analys som Ken Alder gör av den franska artilleristutbildningen, respektive den John Gascoigne gör av Tripos vid Cambridge.[6] Men givet den gradvis ökande betydelse studieresultaten fick, och att

[1] Alder, *Engineering the revolution*, s. 73. Stora delar av det matematiska stoff en svensk teknolog får ta sig an under sina studier har sitt ursprung i dessa kursordningar. Den "degeometrisering" som den franska artilleristutbildningen enligt Alder genomgick 1765-1830 sprider för övrigt ett säreget ljus över den ställning som Euklides kom att få i de svenska läroverken under 1800-talet. Degeometriseringen av svensk grundläggande matematikutbildningen kom inte förrän kring mitten av 1900-talet. Då trängde slutligen en matematik inte särskilt olik den som dominerade den franska artilleristutbildningen kring sekelskiftet 1800 undan den euklidiska geometrin.

[2] Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, 335.

[3] En slutats jag drar med utgångs bland annat från Ibid., 194-97.

[4] Gascoigne, "Mathematics and Meritocracy."

[5] Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, 142-43.

[6] Alder, "French Engineers Become Professionals," 99 [men hitta bättre i Engineering!]. Gascoigne, "Mathematics and Meritocracy," [sida!].

Larsson beskriver hur resultaten faktiskt hade viss betydelse även under Karlbergs första verksamhetstid, tycks slutsatsen att verksamheten vid krigsakademin "aldrig antog skepnaden av vad vi idag skulle kalla den meritokratisk verksamhet" vara grundad i en onödigt snäv definition av termen meritokratisk. Problematiskt är dessutom att denna slutsats implicit antyder möjligheten av"riktiga" meritokratiska system, vilka skulle ha tagit form senare. Min teoretiska ingång till detta fenomen är tvärtom att det är bilden av den meritokratiskt organiserade institutionen – hur den framställer sig själv – som är det väsentliga.

Intressant i sammanhanget är att studieresultaten, såväl i Sverige som i England och Frankrike, kring mitten av 1800-talet kom att fungera inte bara som inträdesbiljetter till de respektive militära och akademiska sfärerna, utan också med Bourdieu kan sägas ha börjat fungera som en mer allmänt erkänd form av symboliskt kapital. Detta skall jag säga mer om i nästa kapitel.

Som jag förstår saken karaktäriseras en meritokrati av att den förstår sig själv, och framställer sig själv, som ett objektivt redskap för att befordra egenskaper som den likaledes framställer som värdefulla inom den sfär den gör anspråk på autonom kontroll över – i Sverige i den militära sfären. Larssons studie visar att krigsakademins talesmän reste denna typ av anspråk.[1]

Anspråk på autonomi analyseras ingående av statistikhistorikern Theodore Porter i *Trust in numbers : the pursuit of objectivity in science and public life*,[2] och Alder hänvisar till honom i sin analys av de franska artilleristerna. Porter menar att anspråk på objektivitet utgör ett typiskt drag hos vad han kallar "weak communities".[3] Man måste här betänka det omständliga i att använda "objektiva", "rättvisa", examinationer som grund för inträde och befordran. Denna ordning kan knappast förklaras med att de högt uppsatta militärerna själva ansåg sig oförmögna att identifiera militär kompetens. Snarare måste det meritokratiska systemet ses som en ersättning för personlig makt. Förenklat kan man säga att man inom det militära ville ha större intern kontroll över rekryteringen. Vad gäller Frankrike beskriver Alder behovet av att bryta med adelns traditionella rätt att med hänvisning till börd besitta centrala positioner inom den militära beslutsordningen.[4] Den svenska problematiken var givetvis en annan – men i det här sammanhanget kan den betraktas som snarlik. Men man kunde inte få gehör för anspråk på större "personlig" rätt att välja ut lämpliga rekryter. Därför hänvisade man istället till ett "objektivt" system, som man så att säga lät sig representeras av. Återigen kan vi här se hur matematiken får fungera som representant för sociala intressen, eller med Bourdieu kan sägas bli en del av en social strategi. Det intressanta är att matematiken här spelar en dubbel roll – dels som kunskapsinnehåll, dels som yttre tecken på objektivitet genom den möjlighet matematiska studier erbjuder för exakt och opersonlig prestationsmätning. Porters huvudpoäng är att anspråk på vetenskaplighet och objektivitet skall ses som en *följd*, eller, kan man nästan säga, en *aspekt*, av dessa institutioners *politiska* sida, snarare än, som de givetvis vill ge sken av, som ett *uttryck för distans* i förhållande till allt som har med politik att göra.[5] Porters fokus ligger på samhällsvetenskapen. Han skriver att den blev objektiv samtidigt som den började fylla en politisk funktion.[6] Analysen tycks vara möjlig att föra över på matematiska studier, det vill säga: mätning av prestationer i matematik blev objektiv samtidigt som dessa prestationer började fylla en social funktion. Och mer specifikt började de i Sverige fylla en sådan funktion vid kungliga krigsakademin på Karlberg.

Meritokratins insida

Ovan har jag beskrivit hur hänvisningar till matematikens egenskaper fick betydelse för upprättande av en autonom militär sfär i Sverige. Kort sagt har jag ovan argumenterat för att matematiken, både i egenskap av värdefullt och relevant innehåll, och som tecken på objektivitet och rättvisa, bidrog till att upprätta en *bild*, vilken skänkte legitimitet åt anspråken på autonomi. Lika viktigt för att förstå de matematiska studiernas betydelse i detta sammanhang är emellertid den roll de fick för den militära sfärens interna struktur. Man kan här skilja mellan två i och för sammanhängande funktioner som matematiken fyllde.

För det första bidrog de matematiska studierna till att binda samman den militära sfärens olika delar. Ken Alder beskriver att de matematiska studiernas talesmän explicit argumenterade för matematiken som ett gemensamt språk som gjorde det möjligt för ingenjörer utbildade vid olika tidpunkter och på olika platser att kommunicera med varandra. Mer allmänt skriver Alder:

---

[1] Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning,* 190.
[2] Porter, *Trust in numbers: the pursuit of objectivity in science and public life.*
[3] Alder, "French Engineers Become Professionals," s. 97.
[4] Ibid., 101-02.
[5] Porter, *Trust in numbers: the pursuit of objectivity in science and public life.*
[6] Jag återkommer till detta viktiga faktum i kapitel 4 nedan.

> The intention was to impose a uniformity of habit an thought, instilling a solidarity that was the technicians' equivalent of esprit de corps. Mathematics was particularly well suited for this role because it impressed on students the virtues of uniformity and precision. These were the virtues that made agreement matter.[1]

Matematiken kom med andra ord att fungera som en gemensam nämnare. *Samma* väg, samma matematiska studier, skulle, förklarar Alder, leda in i den militära sfären över hela Frankrike – inga förändringar vad gäller matematiskt stoff eller studieordning tolererades.[2]

Jag skall nu säga något om hur man, med utgångspunkt från mitt teoretiska ramverk, kan förstå effekterna av att omfattande matematiska studier fungerade inträdesbiljett till den militära sfären.

En viktig effekt var, menar jag, att de matematiska studiernas praktik gjorde matematiken i en specifik mening *närvarande* inom den militära sfären. Å ena sidan representerade den en viss uppsättning värden, samtidigt utgjorde studierna en modell för ett praktiskt sätt att vara som speglade dessa värden. Kort sagt ledde studierna till att ingenjörerna förstod sin värld i matematiska termer. Med en psykoanalytisk term kan man här tala om en matematisk *blick*, det vill säga: ingenjörerna förstod sig själva och sin (sociala) verksamhet med utgångspunkt från den "objektiva" verklighet de var en del av, men denna verklighet var som sådan en effekt av deras gemensamma erfarenhet av viss utbildningspraktik. Matematiken upprättade därmed inte bara ett autonomt socialt rum, utan detta rum förankrades även i en specifik ontologi.

Böckerna jag redogjort för ovan antyder vilken plats matematiken hade i denna ontologi. Böckerna framställer matematiken som något man *gör* – liksom räknekonsten ett system av tekniker. I synnerhet i Forssells böcker – och som vi snart skall se även i läroböcker publicerade strax efter Forssells – åtföljs hela tiden beskrivningen av teknikerna av illustrationer som visar teknikernas praktiska "användning". I motsats till i räknelärorna handlar det här emellertid inte om verklighetstrogna beskrivningar av praktiskt räknande, utan snarare av just illustrationer där verkligheten får fungera som didaktiskt redskap i de matematiska studiernas tjänst. Med den franske filosofen Roland Barthes kan man här tala om produktionen av en *myt*, i vilken matematiken vävs samman med den sociala och fysiska verkligheten.[3] I Forssells läroböcker hämtas illustrationer av matematikens användning från just de delar av verkligheten som de matematiska studierna skall leda till ett bemästrande av. Men i boken struktureras verkligheten med utgångspunkt från matematiken – verkligheten framträder som en serie fragment, formade och sammanfogade för att kunna manipuleras med hjälp av exakt de tekniker som boken framställer som matematik. Resultatet blir en bild av en verklighet som i grunden är matematisk till sin natur, och en motsvarande bild av matematiken som det redskap med vars hjälp den kan bemästras. Matematikens blick strukturerar verklighetens framträdelse i de läroböcker jag redogjort för ovan, och min tes är de matematiska studierna ledde till en "internalisering" av läroböckernas budskap, med följd att de betraktade sig själva som delar av en verklighet inte helt olika läroböckernas.[4]

För det andra bidrog matematiken, i synnerhet i Frankrike, till upprättandet av en hierarkisk struktur inom den militära sfären. Alder beskriver hur det matematiska stoffet som sådant delades in i olika "ämnen" vilka motsvarade olika abstraktionsnivåer. Varje social nivå i den militära hierarkin kunde därför motsvaras av en viss "slutstation" av de matematiska studierna. Systemet var, skriver Alder, utformat så att varje social hierarkisk nivå krävde matematiska studier som innebar en mer grundläggande förståelse av vad de lägre nivåernas studier lett fram till. I ingenjörernas matematiska värld värderades det teoretiska vetandet högre än det praktiska, och grader av makt kunde därmed, genom studiernas hierarkiska struktur, legitimeras med hänvisning till grader av kunskap.

Man kan säga att de matematiska studierna inte bara ledde till att matematiken konstituerades som en gemensam referensram – den upprättades också som referens vilken gjorde det möjligt att fördela människor hierarkiskt med utgångspunkt från deras prestationer. Matematiken fick dessa skillnader i prestationer att framstå som olika grader av "kunskap" om matematik. Väsentligt är att de inte framstod som sådana enbart i en objektiv yttre bemärkelse, utan att de framstod som sådana för de som deltog i de matematiska studierna. Matematiken gjordes närvarande som idenfikationsobjekt i förhållande till vilket man

[1] Alder, "French Engineers Become Professionals," 108.
[2] Ibid.
[3] Barthes, *Mytologier*, [mytsidor].
[4] Jag menar här inte att denna "internalisering" innebar att officerarna på något sätt skulle ha blivit blinda för att läroböckernas illustrationer inte speglade verkligheten, att de inte var "realistiska". Den blick jag talar om ligger på en mer grundläggande och helt omedveten nivå. Det innebär, menar jag, inget problem att samtidigt anta att läroböckerna ledde till en internalisering av verkligheten som i grunden matematisk genom arbetet med otaliga matematiska "tillämpningsuppgifter" – och att detta arbete försiggick under någon sorts medvetenhet om att uppgifterna inte var "realistiska". För en analys av liknande fenomen se [zizek, om disidentifikation]

kunde inta en mängd olika positioner – från totalt bemästrande till fullständig okunskap. Matematikens blick, som gav verkligheten sin matematiska struktur, innefattade även en specifik "objektiv" relation till denna verklighet. I och med detta fick de matematiska studierna en social hierarki att framstå som förankrad i objektiva skillnader i "kunskap" om verkligheten.

Matematikens instrumentella nytta

I resonemanget ovan har jag inte sagt något om huruvida de matematiska studierna faktiskt ledde till det praktiska bemästrande av verkligheten som krigsakademiens talesmän gjorde anspråk på att det skulle leda till. Vad gäller Sverige finns inga studier med vars hjälp de matematiska studiernas instrumentella nytta kan bedömas. Denna fråga är dessutom till sin natur besvärlig, eftersom det givet intrumentella framgångar – till exempel konstruktion av användbar teknik – är svårt att avgöra i vilken mån en specifikt matematisk kunskap (och den matematiska "verklighetsuppfattning" jag beskrivit ovan) kan betraktas som framgångarnas *orsak*.

Alder har emellertid behandlat denna fråga i anslutning till sin studie av de franska artilleristerna, och hans svar är tämligen entydigt. Utbildningen matematiserades kan *inte*, menar han, förklaras med hänvisning till att de matematiska kunskaper den ledde till var praktiskt användbara.

Angående den påstådda instrumentella effektiviteten konstaterar Alder till exempel att "Rifling was known to improve accuracy of guns long before Robins explained why it worked".[1] På samma sätt visar empiriska studier att "the accuracy of cannon fire did not noticaby increase during this period".[2] Matematiken gjorde det möjligt att formulera imponerande och exakta teorier som *beskrev* olika aspekter av artilleristernas praktik. Men dessa utgjorde ingen *funktionell* del av dessa praktiker. Teoriernas förutsättningar var inte uppfyllda i praktiken; tillverkningsmetoderna var inte tillräckligt precisa för att kunna dra nytta av matematikens exakta beräkningar. Varken den tekniska eller sociala verkligheten kunde behärskas i så stor utsträckning att den högre matematiska exaktheten skulle göra någon positiv praktisk skillnad. Alder konstaterar helt kort att "The functional contribution of mixed mathematics to the practical success of the late-eighteenth-century artillery engineers, therefore, was largely illusory".[3]

Alder hänvisar också till [militärhistorikern?] David Bien, och skriver att "the elementary mathematics at the army's Ecole Militairy was intended to discipline its young cadets, rather than provide them with useful knowledge. [Bien] shows that Enlightenment military leaders saw the rigor of mathematics as a tool to instill the martial values of subordination".[4] Bien skriver själv att:

> If the decision for math, then, had to do with practical needs, these needs were not the kind that we usually define as technical. Officers would not use their math much, and by the 1780s some were even reacting against it as stultifying and destructive of initiative in the individual officer. Perhaps the emphasis on mathematics helped to create a new military culture within which problems could be defined differently; perhaps there were technical and even technological results that came from the new education. But to explain how the new 'technical' education for all officers appeared and spread, we till do better to look into the social and moral dimensions to the problem.[5]

En viktig slutsats som Alder drar är med andra ord att artilleristerna lyckades konstituera matematiken som en del av en epistemologi, där matematiken utgjorde grunden för praktisk framgång, *utan understöd av "faktiska" resultat*. De lyckades framställa matematiken på ett sätt som gjorde den politiskt verksam som en del av en retorisk strategi, utan att ha "empiriska" belägg för sina anspråk. De lyckades inte producera bättre teknik med hjälp av sin matematik – vilket de hävdade.

Kritik mot matematiken

Ytterligare ljus över matematikens roll på krigsakademin sprider de kritiska kommentarer som uppenbarligen fälldes. Larsson citerar den forne kadetten Claes Bratt som 1937 skriver:

---

[1] Alder, "French Engineers Become Professionals," not 52, s. 115.
[2] Ibid., s. 116.
[3] Ibid.
[4] Alder, *Engineering the revolution*, s. 65.
[5] David Bien, "Military Education in 18th-Century France: Technical and Non-Tehnical Determinants"," i *Science, Technology and Warfare: Third Military History Symposium*, red. Monte and L. Paszek. Wright (Washington, D.C: General Publishing Office, 1969), s. 59.

> Matematik har emellertid under ett ganska långt tidsskede inom det militära haft ett alltför stort anseende. Detta inte blott vid Karlberg, utan i ännu högre grad vid den gamla Krigshögskolan på Marieberg, där den var det över allt dominerande, inför vilket de rent militära ämnena fingo nedsjunka i värde nära nog till noll.
>
> Den som där hade höga matematikbetyg ansågs à priori såsom en för högre uppgifter lämplig officer. Särskilt var detta fallet inom artileriet, där matematikvurmen en lång tid övergick till rent fåneri. Det gick där så långt, att en i denna slentrian uppammad chef för ett av våra artilleriregementen ogärna tog in någon officersaspirant, som inte hade stort A i studentbetyg i matematik.[1]

Man skall här notera att Bratt anger artilleriet som den gren av det militära där matematiken stod högst i kurs. Det passar bra med Ken Alders analys av förhållandena i Frankrike. Kritiken kan ses som en förlängning av det motstånd mot naturvetenskapernas matematisering som Yves Gringa beskriver i artikeln "What did mathematics do to physics?" som jag citerade ur i förra kapitlet.[2] Gringas anför bland mycket annat kritik från en Fransk arkitekt, som menade att matematiken ledde till dåliga broar som helt enkelt höll sämre än de som var byggda med utgångspunkt från beprövad erfarenhet.[3]

Även Tripos i Cambridge var föremål för kritik. Man menade att examensformerna gjorde att studenterna fick ägna sig åt delar av matematiken som var av föga värde. [4] Studenterna sorterades därmed, menade man, med utgångspunkt från kriterier som inte hade något att göra med de egenskaper som borde värdesättas. Kritik riktades också mot att undervisningen kom att formas med utgångspunkt från examinationerna, en synpunkt som långt senare kom att få stor betydelse i den svenska skolmatematiska diskussionen.[5] En frustrerad före detta student skrev att: "I shall always consider my time spent in Mathematics the least benificial of any employed in the whole course of my life".[6]

Tripos gav upphov till ett meningsutbyte som på grund av kontrahenternas namnkunnighet väckte viss uppmärksamhet. William Whewell var en av Tripos prominenta talesmän. I sin *Thoughts on the Study of Mathematics as a part of a Liberal Education* redogjorde han för sin syn på de matematiska studiernas förtjänster.[7] Denna artikel resulterade i en kritisk recension av filosofen William Hamilton.[8] Denna recension resulterade i sin tur i ett svar från filosofen John Stuart Mill i *An Examination of Sir William Hamilton's Philosophy and of The Principal Philosophical Questions Discussed in his Writings*.[9] En värdefull detalj i detta meningsutbyte är, tycker jag, Hamiltons definition av vad det är han är kritisk mot. Han skriver:

> Before entering on details, it is proper here, once for all, to premise: – In the *first* place, that the question does not regard the *value of mathematical* SCIENCE, *considered in itself, or in its objective results*, but in the *utility of mathematical* STUDY, that is, *in its subjective effect, as an exercise of mind*; and in the *second*, that the expediency is not disputed, of leaving mathematics, as a co-ordinate, to find their level among the other branches of academical instruction. It is only contended, that they ought not to be made the *principal*, far less the *exclusive*, object of academial education; not of that, which consideres the mind as an instrument for the improvement of science, but of this, which considers science as an instrument for the improvement of mind.[10]

Denna avgränsning säger en hel del som den plats de matematiska studierna hade i Cambridge. Det sätt på vilket det matematiska studierna vid krigsakademin motiverades och hur de läroböcker jag beskrivit var utformade talar för att denna avgränsning i viss mån även fångar svenska förhållanden. Det gör även min analys av den sociala funktion de matematiska studierna skulle fylla. Man placerade inte människan först, och matematiken som hennes redskap. Snarare placerades matematiken i främsta rummet. Man menade att matematiken skulle forma människan – och de matematiska studiernas utformning ledde, menar jag, också till att denna ambition i viss utsträckning blev verklighet.

---

1 Claes Bratt, *Minnesbilder från en nittiotvåårig levnad* (Stockholm 1937), 40 i Larsson, *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning*, 220.
2 Gringas, "What did mathematics do to physics?"
3 Ibid.: 395.
4 Gascoigne, "Mathematics and Meritocracy," 568.
5 Ibid.: 556.
6 R. W. T. Gunter, *Early Science in Cambridge* (Oxford: Oxford University Press, 1937): 63, citerad i Ibid.: 566.
7 William Whewell, *Thoughts on the study of mathematics as a part of a liberal eduation* (Cambridge: Cambridge University Press, 1836). [Det skall sägas att han inte desto mindre var mycket kritisk mot hur undervisningen i praktiken bedrevs.]
8 William Hamilton, "On the study of mathematics as an excercise of mind," i *Discussions on philosophy and literature, education and university reform* (London: Longman, Brodn, Green and Longmans, 1853).
9 John Stuart Mill, *An Examinationof Sir William Hamilton's Philosophy and of The Principal Philosophical Questions Discussed in his Writings*, red. J. M Robson (Toronto and Buffalo: University of Toronto Press, 1979 [1865]).
10 Hamilton, "On the study of mathematics as an excercise of mind," 266.

Hamiltons kritiska recension visar om inte annat på själva möjligheten av att helt betvivla anspråken på de matematiska studiernas goda effekter. Artikeln visar att de inte var uppenbara. De förutsatte en viss form av *tro*. Hamilton var ingen matematiker – såväl i förhållande till den militära sfären som i förhållande till matematikerna vid Cambridge var han en *outsider*. Det meningsutbyte han var en del av tydliggör två centrala aspekter av de sociala strukturer som de matematiska studierna bidrog till att konstituera. För det första att de matematikens goda egenskaper som låg till grund för de meritokratiska systemens legitimitet bara framträder i den mån man tror på dem – något Hamilton inte gjorde. För det andra att en av de mekanismer som gjorde att systemet kunde bevaras är att hans kritik – just på grund av att han inte bemästrade den matematik han kritiserade – inte fick några konsekvenser. Bara den som bemästrar matematiken får rätten att uttala sig om den, och (menar jag) en av de matematiska studiernas viktigaste effekter är konstitutionen av (tro på) en värld där matematiken är självklart närvarande som just det objekt som den måste vara för att legitimera det meritokratiska systemet.

4.3. Analys

Boken och undervisningspraktiken

Uppsalaprofessorn Mårten Strömers översättning av Euklides *Elementa*, liksom Anders Celsius *Aritmetik eller Räkne-Konst* syftade till att förmedla delar av den matematiska vetenskapen. Celsius och Strömer var båda knutna till Uppsala universitet och, liksom många andra i denna miljö vid denna tid, inspirerade av den tyske filosofen Christian Wolff. Han hade placerat den matematiska metoden i centrum för ett metafysiskt system i vilket vetenskapliga studier av naturen var intimt förbundna med religiösa frågor. Matematiken betraktades som det kitt genom vilket människan var förbunden både med naturen och med Gud. Det var denna matematiska vetenskap Celsius och Strömer – genom sina böcker författade på svenska – ville förmedla till den svenska ungdomen. Förorden till dessa böcker utgjorde en integrerad del av en övergripande matematisk diskurs där matematiken förknippades med en rad positiva egenskaper.

Rörelsen från Celsius och Strömer, till Forssell och Beckmarck, går via Fredric Palmqvist, född 1720 och därmed 12 år yngre än Strömer och 19 år yngre än Celsius. Hans första arbete med läroböcker i matematik utgjordes av en bearbetning av Celsius *Arithmetik* utgiven 1741. När han sedan 1750 ger ut en egen räknebok – *Underwisning i Räknekonsten* – skriver han i sitt förord att han identifierat en brist hos alla tidigare räkneböcker, nämligen att de är "alt för kårta, eller alt för widlyftiga".[1] Detta såg han emellertid inte som att *allmänt* problem. Mer specifikt, skrev han om: "Svårigheter, som [han] tyckt ligga *wår Swenska Ungdom* mycket i wägen".[2] Med andra ord såg Palmqvist böckernas utformning som ett problem i undervisningen av ungdomar – en praktisk verksamhet han vid denna tid hade lång erfarenhet av. För att råda bot på svårigheterna försökte han nå en kompromiss mellan Agrelius detaljerade och långa utläggningar och Celsius korta, koncisa och abstrakta satser. Denna kompromiss utgjorde en anpassning till den typ av undervisning inom vilken böckerna skulle användas, dvs explicita överväganden kring eleven och undervisningen bidrog till att strukturera framställningen.

Givet denna analys blir det möjlig att se rörelsen från räknekonsten till Palmqvists räknelära som ett resultat av två på varandra följande förskjutningar – den första som ett resultat av mötet mellan räknekonsten och den abstrakta matematiken, den andra som ett resultat av en anpassning till undervisningens villkor.

Beckmarcks och Forssells böcker kan ses som en fortsättning av den utveckling som Palmqvist inledde. Deras respektive läroböcker var inte enbart inspirerade av svenska förlagor – att man inte desto mindre kan placera in dem i en övergripande trend pekar på att en liknande utveckling präglade undervisningen i grundläggande matematik även i övriga Europa. Beckmarcks och Forssells böcker är ganska olika, och man kan inte reducera dem till "effekter" av det sammanhang inom vilket de användes. I synnerhet sticker Beckmarcks *Utkast til föreläsningar öfver Algebra* ut genom sin korthet. Samtidigt finns det en rad element i deras böcker som visar hur de, än mer än Palmqvists, är anpassade till det undervisningssammanhang de författades för.

Tydligast syns detta i Forssells böcker. Deras titlar anger att de är skrivna för "begynnare" och de karaktäriseras av en ambition att förklara och tydliggöra. Förenklat kan man säga att om Celsius och Beckmarck genom att utesluta Agrelius långa beskrivningar av det praktiska räknandet tog ett steg mot den

[1] Palmqvist, *Underwisning i Räkne-Konsten*, Förord.
[2] Ibid., Förord (min kursivering).

abstrakta vetenskapen, tog Forssell ett steg i en annan riktning genom att fylla på med en annan typ av beskrivningar – nämligen av räknandet så som det gestaltar sig i undervisningssituationen. Fokus förskjöts därmed från vetenskapen respektive det praktiska räknandet, mot undervisningen. Forssells böcker är utformade för att understödja undervisningspraktiken – antingen i lärarens eller elevens hand. Han identifierar svårigheter och förklarar hur de kan övervinnas.

I och med detta förändrades även, menar jag, det sätt på vilket matematiken hänvisade till sina egenskaper. Från att ha varit något man talade om, och något som beskrevs i böcker som Celsius' och Strömers, samtidigt som det därmed utgjorde ett sätt att tala om den praktiska verkligheten – något som "användes" – blev matematiken i större utsträckning något man *gör i skolan*, något som där antar form av "kunskaper".

Det skolmatematiska stoffets yttre gränser

Förskjutningen mot undervisningspraktiken drog å andra sidan givetvis inte med sig matematiken som helhet. Tvärtom ledde denna rörelse till nya gränser så att säga "inom" matematiken. Kort sagt kan man säga att det under andra halvan av 1700-talet växande fokus på undervisningssituationen åtföljdes av motsvarande processer av "autonomisering" inom andra sociala sfärer förknippade matematik. För det första skedde under denna tid en dramatisk utveckling av den matematiska vetenskapen. När böckerna anpassade för grundläggande undervisning blev enklare, blev samtidigt den matematiska vetenskapen mer abstrakt, vilket så att säga från två håll ledde till ett tydliggörande av skillnaden mellan matematiska texter avsedda för undervisning, och matematiska texter författade av och för matematiker. Man skall här komma ihåg att Celsius och Strömer, liksom även Palmqvist i sin *Algebra* försökte täcka in betydande delar av tidens matematiska vetenskap. Någon sådan ambition hade varken Beckmarck eller Forssell.

Att denna avgränsningsprocess var ett resultat av medvetna övervägande framgår av de många kommentarer angående stoffets "övre" gränser som syns i många böcker från slutet av 1700-talet fram till mitten av 1800-talet. Man talar om vad som "äskas" av eleverna, av vikten av att inte "onödigtvis" fylla böckerna med matematiskt stoff som eleverna ändå inte har någon möjlighet att begripa. Böckernas pris framträder som en ny och viktig faktor.[1]

En annan gräns som inte diskuteras av författarna men inte desto mindre kan härledas ur böckernas framställningar, är den gentemot de praktiker de så att säga "handlar om". Som jag nämnt många gånger i det föregående, karaktäriseras räknelärorna av relativt detaljerade beskrivningar av en mängd praktiska situationer hämtade från det "borgerliga livet". Räknekonsten framträder som ett redskap för att bemästra dessa situationer. Hos Celsius kan man säga att de praktiska sammanhangen istället snarare framträder som illustrationer av vetenskapen, än som beskrivningar av den praktiska verkligheten så som den faktiskt är – beskrivningarna har anpassats till det illustrerande syftet. Hos Forssell har ytterlistare ett steg tagits, så att de praktiska sammanhangen snarast framträder som redskap för att fylla undervisningspraktiken med "innehåll". Det handlar inte som i räknelärorna om trogna beskrivningar, och inte som hos Celsius om att illustrationer av abstrakta principer – snarare framträder den hela den praktiska verkligheten som ett *fält för tillämpningar*. På ett liknande som i räknelärorna har Forssells lärobok i algebra en parataktisk struktur, men istället för räknelärornas serie av likartade matematiska tekniker avgränsade genom sina respektive tillämpningsområden, innehåller Forssells lärobok grupper av övningsexempel, avgränsade av de del av matematiken vars tillämpning de illustrerar – medan det praktiska innehållet inom varje grupp hämtas från vitt skilda sfärer av det praktiska livet.

Min poäng är att detta inte bara innebär att innehållet är strukturerat med utgångspunkt från matematiken snarare än den praktiska verkligheten, utan också att den matematiska undervisningspraktiken i och med detta *förlorar kontakten* med de praktiker den hänvisar till. Ett enkelt konstaterande är att Forssell, liksom Palmqvist före honom, uppenbarligen saknar egen praktisk erfarenhet av de praktiker han beskriver. Denna situation kan skiljas från Celsius och Strömers, vars syften var att beskriva vetenskapen. I och med att detta var deras syfte, utgjorde det inte på samma sätt ett problem att deras bild av verkligheten är tämligen artificiell – deras huvudsakliga syfte var ju att beskriva den matematiska vetenskapen, inte den praktiska verkligheten. Forssellss syfte är att visa matematikens "tillämpning" genom att ge underlag för ett praktiskt "tillämpande" av matematiken i skolan. Viktigt att komma ihåg är nämligen att de områden

[1] Detta gäller givetvis snarare algebran än aritmetiken. Se förorden i Björling, *Elementar-lärobok i Algebra*; Henrik Falck, *Practisk lärobok i arithmetiken med fullständig underrättelse om in- och utrikes mått, mål, vigt och mynt* (Upsala: Palmblad & c., 1830); Forssell, *Algebra för Begynnare*.

från vilka Forssell hämtade sina tillämpningar förändradades på ett tämligen genomgripande sätt under slutet av 1700-talet och första halvan av 1800-talet. På samma sätt som när det gäller relationen till den matematiska vetenskapen kan man därför tala om ett tydliggörande av skillnaden mellan skolans matematik och det omgivande samhället genom två motsatta tendenser: läroböckerna kom att fokusera på undervisningssituationen, samtidigt som de ekonomiska och tekniska sfärerna i samhället blev mer komplexa.

Dessa två processer av avgränsning av det matematiska stoffet måste givetvis knytas till den successivt ökande autonomin hos de institutioner inom vilka undervisningen bedrevs. Som jag beskrivit ovan kan man på ett sociologiskt plan se en rad mekanismer genom vilka den institution inom vilken undervisningen bedrevs i allt större utsträckning kom att få sätta sin egen agenda. Enkelt uttryckt kom det matematiska stoffet därmed att framställas med utgångspunkt från den funktion det skulle fylla inom denna institution.

Det skolmatematiska stoffets struktur

Den succesiva avgränsningen av en särskild "skolans matematik" innefattade även en uppdelning av detta skolmatematiska stoff i olika "kurser" och "ämnen". Det är viktigt att komma ihåg att dessa indelningar inte hade någon förankring i den matematiska vetenskapen. Detta gäller i synnhet särskiljandet mellan aritmetik och algebra, samt uppdelningen mellan analytisk och euklidisk geometri. Tvärtom är det tämligen uppenbart hur uppdelningen av matematiken i olika ämnen hängde samman med inrättandet av examinationer: undervisningen kom att utformas med utgångspunkt från den examen den ledde fram till.[1]

Av central betydelse är att matematikens olika ämnen ordnades hierarkiskt. De kunde därmed konstituera en trappa från det enklare till det mer komplicerade. Denna trappa var strukturerad med utgångspunkt både från den matematiska vetenskapen och eleven: stegen skulle följa på varandra i termer av "abstraktion", men lika viktigt var att de blev successivt svårare, så att man bara kunde klara av en examen på ett visst "trappsteg" efter att klarat av de föregående trappstegens examinationer.

Tydliggörande av gränsen gentemot den matematiska vetenskapen innebar också ett tydliggörande av gränserna mellan de matematiska studiernas olika delar. Läroböckerna i aritmetik befriades i stor utsträckning från algebra. Logaritmer lyftes i sin tur ut från läroböckerna i algebra. Den euklidiska geometrin bevarades som en autonom helhet, fri från inblandning av algebraiska bevis.

Det matematiska stoffets hierarkiska struktur fungerade som ett stöd för den sociala hierarki inom vilken de matematiska studierna bedrevs. Genom de väl avgränade matematiska kurserna och deras examinationer kunde adepterna väg från "outsiders" till "insiders" kontrolleras och regleras.

Skolmatematikens producenter och konsumenter

Som avslutning på detta kapitel skall jag försöka att, med utgångspunkt från mitt teoretiska ramverk, fördjupa bilden av vad verksamheten på Karlberg innebar för de matematiska studiernas betydelse.

En aspekt av den grundläggande matematiska undervisningens förändring under andra halvan av 1700-talet vars betydelse jag tror inte bör underskattas rör relationen mellan författarna och deras böcker. Beckmarck skriver i förordet till sin *Utkast till föreläsningar i Algebra* att den är skriven "[p]å befallning", och specifikt för att användas vid undervisningen på Carlberg.[2] Han poängterar också att boken inte innehåller något nytt. Initiativet att författa denna bok kom med andra ord inte från honom själv. Den skrevs för att fylla tämligen specifika institutionella behov. Under 1800-talet blir detta allt vanligare, och än viktigare: det var just de böcker som skrevs för att passa institutionella behov som blev populära och kom ut i många upplagor. I och med detta kan man inte bara säga att författaren "blir" ett instrument för den institution han skriver för, lika väsentligt tror jag är att författarna också kom att *se sig själva* som ett sådant instrument. Det blev vanligt att explicit motivera böckernas utformning med hänvisning till institutionen.

Man kan, menar jag, tolka detta som upprättandet av en sorts distans mellan författarens så att säga "personliga övertygelser" och den bok han skriver, vilken kan förklara ett drag hos de matematiska läroböckerna som blir allt mer framträdande under 1800-talet, nämligen en separation mellan den verklighet som läroböckerna utgår från och beskriver – och verkligheten utanför skolan, som författarna rimligen också måste ha varit en del av.

[1] Att examinationerna bestämde undervisningen var något som orsakade kritik. Angående Tripos se Gascoigne, "Mathematics and Meritocracy," 556.
[2] Beckmark, *Utkast*, [baksidan av titelbladet].

Låt mig illustrera detta fenomen med hjälp av *Grunderna till Arithmetiken* (1816) författad av Carl Eric Kjellin. Kjellins närmar sig undervisningen så att säga *från matematiken*.[1] Han tar inte undervisningen som utgångspunkt, utan försöker istället anpassa matematiken efter vad han (till synes "personligen") tycker man kan förvänta sig av en bok ämnad för undervisning av ungdomar. Han vill, kan man säga, visa hur matematiken kan komma till sin rätt. Därför inkluderar han i sin *Grunderna till Arithmetiken* en mängd stoff som inte finns i till exempel Beckmarcks *Aritmetik*.[2] "Intet af hvad man i ett Arbete af detta slag äger rätt att fordra är förbigånget", skriver han, men "åtskilligt deremot, som i andra saknas, skall finnas här med intaget".[3] Detta för att visa "hvad tillgångar Arithmetiken i sjelfva verket äger, om man förstår att begagna den".[4] Särskilt lyfter han fram fördelarna med decimalräkning.[5] Han lägger också stor vikt vid användandet av logaritmer. Vad som i synnerhet signalerar Kjellins distans till de institutioner inom vilka undervisningen bedrevs och, kan man säga, till den skolmatematiska tradition som nu höll på att växa fram, är hans sätt att förhålla sig till Regula de Tri. Man skall, skriver han nämligen, tänka efter innan man använder Regula de Tri, för "Stundom beror likväl en frågas besvarande af en sådan mängd omständigheter, att den ej kan besvaras".[6] Kjellin exemplifierar:

> Om någon frågade: Huru många Tunnor frukt man kan vänta sig af ett träd, hvars tjocklek och höjd vore gifna? – Så beror väl detta antal af trädets tjocklek och höjd; men det beror tillika af en mängd andra omständigheter, omöjliga att noga determinera. Det löjliga i denna uppgift består då deri, att man vill såsom enkelt behandla ett oändeligen sammansatt förhållande.[7]

Det intressanta är att denna typ av reflektioner faktiskt kom att uteslutas från diskussionen i samma rörelse som böckerna allt mer kom att utformas för att användas i speciella institutionaliserade sammanhang.[8] Kjellin är inte, verkar det som, knuten till den institution han skriver för; han förhåller sig till två väsentligen separata entiteter: matematiken och undervisningen – det är *han* som genomför anpassningen av matematiken till undervisningen, och detta, inser han, är ett ganska riskabelt företag.

Det är inte svårt att se varför författare som (mer eller mindre) skrev "på befallning" inte tog inte upp denna typ kritiska reflektioner: de efterfrågades inte. Denna så att säga tjänstemannamässiga disidentifikation med den egna produkten spelade, menar jag, en viktig roll för formandet av skolmatematiken.

I redogörelsen ovan, av kritik mot matematiska studier, hördes en student säga att de matematiska studierna inte är till någon praktisk nytta.[9] Mycket talar för att denna typ av "insikt" om att de matematiska studierna i högst begränsad omfattning ledde fram till en praktiskt användbar kompetens var tämligen utbredd. Man "visste", tror jag, att studierna hade en huvudsakligen "social" eller "symbolisk" betydelse (det enda som betyder något är att klara examen, etc.). Min poäng är att denna "cyniska distans" redan från början speglades av en motsvarande distans i "produktionsledet" – inte heller läroboksförfattarna "trodde" – i en viss mening – på de böcker de författade.

Det till synes paradoxala är emellertid, menar jag, att denna frånvaro av tro inte utgjorde något hinder för de matematiska studiernas symboliska effektivitet. Tvärtom lämnade det på ett plan "oengagerade" förhållande till de matematiska studierna (att man är skeptisk till de anspråk på var förbundna med matematiken, matematikens praktiska nytta, övningarnas "realism", etc.) utrymme för just den typ av engagemang som de matematiska studiernas sociala funktion krävde, nämligen ett ägnande av tid och energi på att "klara examen". Om, säg, den tid olika kadetter ägnade åt de matematiska studierna var förbundna med deras respektive personliga upplevelser av studiers instrumentella "verkliga" nytta, skulle den givetvis ha varierat kraftigt mellan olika individer. Men i den mån de diskursiva anspråken på matematiken kunde identifieras som självklart "falska" lämnade detta utrymme för ett lika självklart engagemang, fast på helt andra grunder. Det var, menar jag, just genom sådana på ett plan halvhjärtade, men på ett annat

---

[1] Carl Eric Kjellin, *Grunderna till Arithmetiken, innehållande, jemte dess Tillämpning till alla vanligen förefallande Räkningar, åtskilliga andra, Genvägar till deras förenklande, särdeles genom Decimal-Räkningen, samt Flera Reductions-Tabeller. Författade och utgifna af Carl Eric Kjellin, Prof. i Mathem. i Lund, L. K. W. A. etc.* (Stockholm: Tryckta hos Elmén och Granberg, 1816).
[2] Ibid. Beckmark, *Arithmetik (1795)*.
[3] Kjellin, *Grunderna till Aritmetiken*, förord.
[4] Ibid.
[5] Ibid., s. 106.
[6] Ibid., s. 186.
[7] Ibid.
[8] Jag återkommer till detta faktum i slutet av kapitel 3.
[9] R. W. T. Gunter, *Early Science in Cambridge* (Oxford: Oxford University Press, 1937): 63, citerad i Gascoigne, "Mathematics and Meritocracy," 566.

plan helhjärtade, matematiska studier som dessa studenters sociala och fysiska verklighet, så att säga bakom deras rygg, blev en matematisk verklighet.

Fortfarande var det dock, vad gäller svenska förhållanden, i det närmaste bara studenterna vid kungliga krigsakademin på Karlberg som ägnade sig åt denna typ av matematiska studier kring sekelskiftet 1800. Detta innebär att den hegemoniska fixering av betydelser som dessa studier ledde till, bara hade giltighet inom en högst begränsad del av det svenska samhället. Under 1800-talets första hälft kom dock den skolmatematiska undervisningspraktik jag beskrivit i det här kapitlet att – i mer eller mindre modifierade former – flytta ut till allt fler andra institutionella sammanhang: till de skolor för folkundervisning som nu började inrättas, till Nya Elementarskolan i Stockholm (bildad 1828) och så småningom till läroverken mer allmänt. Inom dessa institutioner skulle matematiska studier bedrivas under nya praktiska omständigheter, samtidigt som de skulle fylla delvis andra sociala funktioner än inom kungliga krigsakademin på Karlberg. Kapitel 5 och 6 nedan handlar om vad detta fick för konsekvenser för skolmatematiken. I kapitel 5 fokuserar jag på den matematiska undervisningen i läroverket, medan jag i kapitel 6 tar upp den vid denna tid nya idén att låta *barn* ägna sig åt matematiska studier.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

5. Matematik för medborgerlig bildning

I det här kapitlet beskriver jag hur matematik under första halvan av 1800-talet blev ett mer allmänt förekommande skolämne i Sverige. Fokus ligger här på de läroböcker i matematik som vid denna tid utformades för att leda till "medborgerlig bildning". Jag visar hur de nya institutionella sammanhangens praktiska förutsättningar – tillsammans med nya undervisningsmetodiska idéer (växelundervisningsmetoden) – ledde till en tämligen radikalt förändrad utformning av läroböckerna i aritmetik, samtidigt som utformningen av läroböcker förändrades på ett sätt som tydligare kan förstås som en fortsättning på den utvecklingslinje jag beskrivit i tidigare kapitel. Jag diskuterar också det faktum att Euklides *Elementa*, trots att det vid denna tid även skrev en rad nya läroböcker i geometri med syfte att ersätta dem, låg fast som utgångspunkten för geometriundervisningen i läroverket.

Kring sekelskiftet 1800 kretsade studier vid läroverket huvudsakligen kring teologi och studier av klassiska språk.[1] Under 1800-talets första hälft restes i Sverige krav på att plats i läroverket även skulle beredas åt "realbildande" ämnen, som moderna språk, naturvetenskap och matematik.[2] Diskussionen resulterade under första halvan av 1800-talet i en rad mindre förändringar av läroverkets organisation. Ett första större steg mot en mer betydande förändring av balansen mellan de klassiska språken och realbildande ämnen togs 1859, då en relativt detaljerad stadga beskrev hur studierna skulle delas in i två linjer: en linje för de som "läsa klassiska språk" och en för dem som "icke läsa klassiska språk" – senare kallad reallinjen. I huvudsak behöll sedan läroverket denna form fram tills dess att läroverket 1905 delades i realskola och gymnasium. Redan det faktum att realskolan fick namnet *real*skola visar att de realbildande studierna i och med detta intagit huvudrollen, samtidigt som de studier av klassiska språk som stod i centrum kring sekelskiftet 1800, nu förpassats till läroverksstudiernas periferi.

I språkstudiernas ställe trädde matematiken in. Det första skedet av denna process kan beskrivas som en flytt av de matematiska studier som sedan 1792 bedrivits vid krigsakademin på Karlberg till en rad nya institutionella sammanhang. Esbjörn Larsson, vars redogörelse för kungliga krigsakademin på Karlberg spelade en viktig roll i det föregående kapitlet, beskriver hur studier vid krigsakademin under 1800-talets första hälft i allt större kom att leda till karriärer utanför den militära sfären. Han beskriver också hur allt fler ansökte om att få studera vid krigsakademin, något som slutligen ledde till att den elementära delen av studierna från och med 1835 förlades utanför själva krigsakademin (detta i ett försök att öka genomströmningen genom att förkorta studierna). De skolor inom vilka ungdomar förbereddes för antagnings till krigsakademin, vara bara en av flera nya typer av institutioner inom vilka det bedrevs grundläggande matematiska studier. Hit hörde även de sedan 1820 inrättade apologistskolorna, samt Nya Elementarskolan i Stockholm, som bildades 1828 – med krigsakademin som förebild både vad gäller studiernas innehåll och undervisningens form.

Fokus i det här kapitlet ligger på vad som hände med de matematiska studierna i denna rörelse, från den specifikt militära kontexten vid krigsakademin (och sedan 1818 artillerihögskolan på Marieberg) till skolor som Nya Elementar, där studierna istället syftade mot en ny typ av "medborgerlig bildning". Kronologiskt innebär detta att fokus ligger på 1830-talet och början av 1840-talet. Under detta dryga decennium publicerades en rad läroböcker som skulle få enorm betydelse för skolmatematikens fortsatta utveckling.

Denna matematikens rörelse från den militära sfären till läroverket, skedde emellertid samtidigt som matematiska studier tog plats i en annan typ av institutioner, nämligen de allt fler folkskolorna. Detta leder till en avgränsningsproblematik som jag här skall säga något kort om. De matematiska studiernas roll i folkundervisningen utgör temat för kapitel 6. Det är emellertid inte möjligt att helt hålla isär dessa två institutionella sammanhang, eftersom gränsen mellan dem nämligen var ganska otydlig. Genom 1820

[1] Läroverkskommittén, *Betänkande afgifvet den 8 december 1902 af den för utredning af vissa frågor rörande de allmänna läroverken den 26 maj 1899 i nåder tillsatta kommitté* (Stockholm: 1902), Kap 1, "Historik", 2.

[2] Se tex. Lars Niléhn, *Nyhumanism och medborgarfostran: åsikter om läroverkets målsättning 1820-1880* (Lund: Gleerup, 1975). Wilhelm Sjöstrand, *Pedagogikens historia*, 4. uppl. / utg. (Lund: Gleerup, 1966), band III:2, 52-197.

års skolordning hade läroverket delats upp i två slags skolor: lärdomsskolor och apologistskolor. De senares syfte var att bibringa lärjungarna "medborgerlig bildning". Konsekvensen av denna delning blev dock inte att den medborgerliga bildningen så att säga flyttade in i ett nytt läroverk. Snarare kom apologistskolorna att betraktas som en sorts folkbildningsanstalter.[1]

Att apologistskolorna hade lågt socialt anseende, samtidigt som matematiska studier spelade en viktig roll som grund för ett meritokratiskt system inom den militära sfären, talar för att matematiska studier – i synnerhet studier i aritmetik – inte hade någon entydig *betydelse* vid denna tid. Inom en viss typ av institutioner (tex krigsakademin) kunde de betraktas som första steget på en väg mot matematisk expertis. Vid andra institutioner (apologistskolor och folkskolor) kunde de betraktas som en "låg" form av bildning, kontrasterad mot "riktiga" läroverksstudier fokuserade på döda språk. Det går därför inte att dra någon skarp gräns mellan matematikens – och i synnerhet aritmetikens – behandling i (enkelt uttryckt) folkskola respektive läroverk.

En viktig sida av denna avgränsningsproblematik har att göra med de inflytanden från utlandet som man kan se i den svenska diskussionen vid denna tid. Det var framför allt i Frankrike och England som matematiska studier tidigt tog plats som en grund för meritokratiska system. I Tyskland var tvärtom de döda språkens ställning fortsatt stark under merparten av 1800-talet. Från Tyskland kom emellertid ett annat inflytande, som inte var direkt knutet till matematiken, men som inte desto mindre fick stor betydelse för skolmatematiken. Jag syftar här på de idéer om *bildning* som tog plats i Sverige under första halvan av 1800-talet. På flera sätt kan man se detta inflytande i den skolmatematiska diskurs jag redogör för i det här kapitlet. Men då detta inflytandet var ännu tydligare i fråga om folkundervisning väntar jag med att ta upp det särskilt till nästa kapitel, där folkundervisningen står i centrum.

Det förtjänar att upprepas att mitt syfte med den historiska redogörelsen, i detta kapitel såväl som i allmänhet, är att beskriva den svenska skolmatematikens genes, och att detta övergripande syfte fungerat som vägledning då jag sovrat i det empiriska materialet. En mängd i sig intressanta detaljer rörande såväl läroböckernas innehåll som hur de motiverades, har av denna anledning lämnats utanför framställningen. Samhällsutvecklingen i stor tas bara upp till diskussion i den mån ytterligare ljus på så sätt kan spridas över skolmatematiken.

Kapitlet har följande disposition. Nedan beskriver jag först vad som hände med aritmetiken, i dess första rörelse mot att utgöra en form av medborgerlig bildning. I princip hände då två saker: regler och övningsuppgifter placerades i studiernas centrum, samtidigt läroböckerna i stor utsträckning befriades från löpande text. När aritmetik blev något för en bredare, "lägre", allmänhet, som Carl Jonas Love Almqvist uttrycker det i förordet till sin lärobok i aritmetik,[2] då kom aritmetiken att förändras från något man lär sig genom att lyssna, läsa, tänka och öva, till *arbetsinstruktioner* följda av noga reglerat *arbete* med övningsuppgifter. Signifikativt är att det var nu som övningsuppgifternas svar – facit – skiljdes från presentationen av frågorna och placerades i ett särskilt häfte. Eleverna förlorade rätten och möjligheten att själva avgöra om de räknat rätt, och läroböckerna blev i ett slag betydligt mer lika de som används i dagens matematikundervisning.

Algebrans förändring var en annan. Som vi såg i förra kapitlet blev läroböcker i algebra allt längre under andra halvan av 1700-talet och början av 1800-talet. Denna process tog nu ytterligare ett steg. I sin *Elementar-Lärobok i algebra* lade E. G. Björling ut algebran som en väg för eleverna.[3] Med hjälp av förklarande text, regler, tabeller och inte minst övningsexempel förde han dem framåt längs denna väg. Algebran som skolämne fick i och med detta skarpare konturer. Den inleddes med *bokstavsräkning*, för att småningleda till en förmåga att lösa *första och andra gradens ekvationer*.

Geometrin utgör här ett märkligt undantag. För även om det skrevs en rad nya läroböcker även i geometri fick inte dessa böcker på alls samma sätt som sina motsvarigheter inom aritmetik och algebra konsekvenser på längre sikt. Euklides *Elementa* kom att ligga fast som utgångspunkt för grundläggande studier i geometri – i mer eller mindre modifierade former ända fram till den nya matematikens inbrott på 1960-talet.

I kapitlets avslutning försöker jag dra några generella slutsatser rörande hur detta skede i den svenska skolmatematikens historia skall tolkas. Jag pekar på att det diskursiva budskapet i aritmetiken vid denna tid ersattes av instruktioner för praktiskt arbete – detta samtidigt som (vilket jag visar nedan) en epistemo-

[1] Läroverkskommittén, *Betänkande afgifvet den 8 december 1902 af den för utredning af vissa frågor rörande de allmänna läroverken den 26 maj 1899 i nåder tillsatta kommitté*, Kap 1, "Historik", 5.
[2] Carl Jonas Love Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik* (Stockholm: Johan Hörberg, 1834 [1832]), Företal.
[3] Björling, *Elementar-lärobok i Algebra*.

logi tog form inom vilken detta praktiska arbete betraktades som en nödvändig förutsättning för att "rätt" typ av matematiska kunskaper skulle ta form inom lärjungarna. Angående studierna vid krigsakademin argumenterade man för vikten av att hela tiden knyta den matemtaiska teorin till sin tillämpning. Detta, menar jag, gjorde att de matematiska studierna ledde till konstitutionen av en sorts matematisk blick genom vilken verkligheten och matematiken, för studenterna, successivt kom att flyta samman. Väsentligt är att det inte var genom att *läsa* om matematik som detta hände, utan genom på ett plan oreflekterat praktiskt arbete med uppgifter inom vilka verkligheten och matematiken framställdes på detta sätt. Just detta arbete hyllade de nya läroboksförfattarna som vägen mot matematiska kunskaper. Faktum är dock att de matematiska studiernas praktik vid denna tidpunkt i ganska liten utsträckning motsvarade författarnas uttryckliga ambitioner. Utvecklingen under 1800-talet kan något förenklat ses som en lång realiseringsprocess, genom vilken praktiken successivt formades till överensstämmelse med bland annat de idéer jag skall redogöra för i det här kapitlet – men lika mycket de idéer rörande den allra första undervisningen som står i fokus för nästa kapitel.

5.1. Aritmetik

Bland de läroböcker i aritmetik som publicerades under 1830-talet var det särskilt en som kom att få ofantlig betydelse för skolmatematikens fortsatta utveckling i Sverige: kyrkoherden Per Anton von Zweigbergks *Lärobok i Räknekonsten med talrika öfningsexempel*.[1] Den publicerades 1839, och kom sedan ut i en mängd upplagor en bra bit in på 1900-talet. För den skolmatematiska diskussionen blev den en obligatorisk referenspunkt, och det är ingen överdrivt att säga att den utgjorde ett paradigm för läroböcker i aritmetik under andra halvan av 1800-talet på samma sätt som Agrelius fungerade som ett paradigm för räknelärorna under 1700-talet.

Zweigbergks bok är disponerad som en räknelära. Den inleds med ett avsnitt motsvarande "numeratio". Sedan följer de fyra räknesätten i hela tal, de fyra räknesätten i bråk (och decimalbråk), Regula de Tri med tillämpningar, för att avslutas med några korta avsnitt om "digniteter och rötter".

Vad som skiljde boken från sina föregångare är den centrala plats Zweigbergk gav å ena sidan *regler* och å andra sidan *övningsuppgifter*. Dessa två typer av innehåll dominerar Zweigbergks lärobok dels i kvantitativ bemärkelse så till vida att reglerna och övningsuppgifterna fyller merparten av sidorna. Än väsentligare är att de fungerar som bokens strukturerande princip, den stomme kring vilket allt övrigt innehåll fördelar sig. Den löpande texten ingår i form av *inledningar* – före reglerna, och *anmärkningar* – insprängda mellan reglerna.

Väsentligt för mina syften är att Zweigbergks lärobok redan ett par decennier efter det att den kommit ut kom att fungera som en sorts idealtyp för hur en lärobok *inte* borde vara utformad. Den blev en gemensam fokuseringspunkt. Alla var överens om att *detta var fel*, och kunde med detta som utgångspunkt tvista om hur man borde göra istället. Det man tog fasta på var just Zweigbergks regler och – dock i en någon mer sammansatt bemärkelse – övningsuppgifterna.

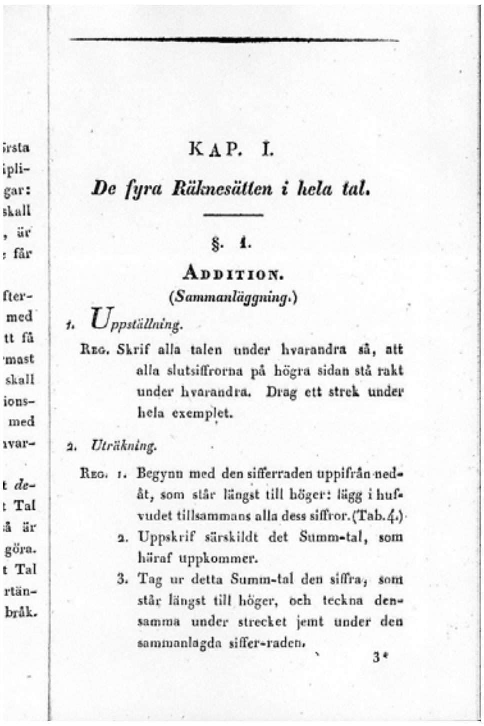
Mitt första syfte med det här avsnittet är att i möjligaste mån visa dels hur reglerna och övningsuppgifterna i de nya läroböckerna utgjorde en tämligen logiskt sammanhängande helhet, dels hur denna helhet motiverades med hänsyn till överväganden rörande de matematiska kunskapernas natur, lärjungarnas förutsättningar och undervisningens villkor. Ett andra syfte är att i någon mån förklara varför det var just Zweigbergks bok som fick stor spridning, snarare än någon av de andra snarlika böcker som publicerades ungefär samtidigt. Min hypotes är i korthet att denna bok, genom att ha en tydlig disposition och vara synnerligen välskriven, utgjorde ett tämligen flexibelt undervisningsredskap, möjligt att använda i en mängd olika institutionella sammanhang. Detta till skillnad från de övriga försöken, som var mer specifikt utformade med utgångspunkt från en eller annan idé om undervisningens mål och anpassad för särskilda praktiska villkor.

Regler

En bok, vilken liksom de flesta andra *inte* kom att sätta agendan för den svenska skolmatematiken under andra halvan av 1800-talet, är Carl Jonas Love Almqvists *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritme-*

[1] Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten*.

tik från 1832.[1] Tillsammans med hans *Lärobok i geometrien* är denna bok intressant av två anledningar. För det första på grund av att Almqvist i sina förord till dessa böcker på ett slagkraftigt sätt presenterar idéer som delades av många författare av läroböcker i matematik på 1830-talet. För det andra på grund av de utgör tämligen kompromisslösa realiseringar av dessa idéer. Almqvists räknekonst innehåller till exempel *bara* regler och övningsuppgifter. Figurn nedan visar ett typiskt uppslag:


KAP. I.

De fyra Räknesätten i hela tal.

§. 1.

ADDITION.

(*Sammanläggning.*)

1. *Uppställning.*

REG. Skrif alla talen under hvarandra så, att alla slutsiffrorna på högra sidan stå rakt under hvarandra. Drag ett streck under hela exemplet.

2. *Uträkning.*

REG. 1. Begynn med den sifferraden uppifrån nedåt, som står längst till höger: lägg i hufvudet tillsammans alla dess siffror. (Tab. 4.)

2. Uppskrif särskildt det Summ-tal, som häraf uppkommer.

3. Tag ur detta Summ-tal den siffra, som står längst till höger, och teckna densamma under strecket jemt under den sammanlagda siffer-raden.

3*

Figur 4. Inledningen av avsnitten om addition i Almqvists *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik* från 1832.

Vi ser här hur Almqvist *inleder* sitt avsnitt om de fyra räknesätten i hela tal med rubriken "uppställning". Det som i räknelärorna i och för spelar en viktig roll, får här spela huvudrollen. Och den löpande text som i räknelärorna leder läsaren framåt, är här helt utesluten. Almqvist är mer extrem än Zweigbergk som, även om han placerar reglerna i centrum, inte helt uteslutit den löpande texten. Zweigbergks framställning liknar i flera avseenden Forssells på så sätt att man i hans bok kan följa en sorts dialog mellan en "föreläsande" författare, och en läsare som skjuter in frågor och kommentarer. Zweigbergk presenterar även, liksom räknelärorna, flera uträknade och kommenterade exempel. För att ge en tydlig bild av Almqvists regler – vilka kan fungera som en sorts idealtyp för det framställningssätt som är baserat på regler och övningsuppgifter – följer här ett citat av *hela* Almqvists avsnitt om multiplikation i hela tal:

1. Uppställning.
Reg. Skrif Multiplikanden ofvanför Multiplikator. Drag ett streck under hela exemplet.

2. Uträkning.
Reg. 1. Begynn på höger hand och gå allt [sic] åt venster. Tag den *första* (d. v. s. den längst åt höger varande) siffran i Multiplikator och multiplicera dermed den *första* siffran i Multiplikanden. (Tab. 7.) [en gångertabell]
2. Uppskrif särskildt det Produkt-tal, som deraf uppkommer.
3. Tag ur detta Produkt-tal den siffra, som står längst till höger, och uppteckna den under strecket, rakt under den siffra i Multiplikator, hvarmed multiplierades; men, var något mera öfrigt i Produkt-talet, så behåll det i minnet.
4. Multiplicera nu med *samma* siffra i Multiplikator den *andra* siffran i Multiplikanden, och addera dertill det, som enligt Reg. 3 var behållet i minnet.
5. Af det tal, som härigenom erhålles, upptecknas åter högre siffran under strecket (och venster om den, som förut står der); men, var något mera der öfrigt, så behålles det i minnet, likasom förut.

[1] Carl Jonas Love Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik* (Stockholm: 1832).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

6. På samma sätt fortfares med alla siffrorna i Multiplikanden; och, då den sista blifvit multiplicerad, nedskrifvet hela Produkt-talet.
7. Nu tages den andra siffran i Multiplikator, och dermed multipliceras åter hela Multiplikanden, alldeles på samma sätt som förut är beskrifvet om den första; hvarvid märkes, att den Produkt-rad, som nu erhålles, skrifves under den förra, men så, att *första* högre siffran i sednare Produkt-raden sättes under den *andra* siffran i förra raden.
8. Sedan alla siffror i Multiplikator blifvit genomgångna, skola lika många Produkt-rader finnas, som det är siffror i Multiplikator; och under alla raderna drages ett streck.
9. Alla Produkt-raderna adderas tillsammans: hvarvid märkes, att additionen här skall ske i den ordning raderna nu redan ega, utan omflyttning.
10. Den summa, som genom additionen erhålles, är *Produkten* av Multiplikator och Multiplikand.

3. *Prof.* (kan nytjas, sedan division inhemtats).
Reg. Dividera produkten med multiplikator: blir qvoten lika med multiplikanden, så var det rätt räknadt.

4. Öfnings-Exempel.
81. En gränd hade genom sparsamhet förvärfvat 213 R:dr; då lofvades honom att beloppet skulle gifvas 2 gånger: huru mycket fick han inalles?
82. En annan lofvade att gifva 213 r:dr 3 gånger: huru mycket blef det då?
83. 983*3.
84 1256*4.
[...]
119. 2001000598 * 73690
120. 98723456 * 7896542 [1]

Av det ovanstående framgår att Almqvists regler är synnerligen detaljerade. Med ett ord som kom att användas ofta i den skolmatematiska diskussionen under andra halvan av 1800-talet kan man säga att Alqmvist gör det möjligt för sin läsare att utföra multiplikationen *mekaniskt*, utan att tänka. Multiplikation framträder här kort sagt som en *algoritm*. Alla steg, konceptuella så väl som praktiska, är beskrivna. I en mening kan man säga att det är en sorts "räknekonst" Almqvist konstituerar. Å andra sidan, vilket givetvis har avgörande betydelse, så innebär uteslutandet av den löpande texten – liksom uteslutandet av alla sorttabeller och andra detaljer från det borgerliga livet – att denna räknekonst i så fall inte kan sägas vara en räknekonst för det praktiska livet utanför skolan. Snarast konstituerar Almqvist en slags skolans räknekonst – en uppsättning regler för hur de räkneuppgifter man möter i skolan skall hanteras, en rik uppsättning sådana uppgifter – givetvis helt anpassade till boken regler, samt kriterier för vad som utgör en riktig tillämpning av reglerna (facit).

Typiskt för den struktur som förenar Almqvist och Zweigbergks böcker är att reglerna kommer *först*, och övningsuppgifterna *sedan*. Detta förtjänar att påpekas eftersom ordningen mot slutet av 1800-talet kom att omvändas, så att *övningarna* kom först, och reglerna sedan. Frågan om denna ordning är tämligen intrikat, och den resulterade i hetsiga diskussioner på 1880-talet.[2] Alla var nämligen redan på 1830-talet tämligen överens om att övandet var det centrala, och att det var detta som ledde till kunskaper, medan det faktum att man lärt sig en regel, inte kunde likställas med att ha lärt sig matematik. Men hur skulle lärjungarna kunna öva, om de inte först fick regeln? Reglerna framstod som en praktisk nödvändighet. En stor del av diskussionen under andra halvan av 1800-talet handlade om reglerna, och hur de kunde undvikas, och vid sekelskiftet 1900 var en lösning på plats: den "skriftliga heuristiken". Den bestod i att man fyllde läroböckerna med ett mycket stort antal övningsuppgifter, så ordnade att svårigheterna introducerades i ytterst små steg – i idealfallet så små steg att lärjungarna leddes framåt mot allt större kunskaper, utan att någonsin se en regel innan de genom övning förstått dess tillämpning.[3]

[1] Ibid., s. 34-7.
[2] Se C. A. Nyström, "J. E. Johanssons "Räknelära" och folkskolekommitterades "utvecklande metod" m. m.," *Svensk Läraretidning* (1888); C. A. Nyström, "Vidräkning med kommitterade för granskning af folkskolans läroböcker," *Svensk Läraretidning* (1888).
[3] Ett viktigt namn i detta sammanhang är Karl Petter Nordlund. Se A. A., "Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar af K. P. Nordlund," *Svensk Läraretidning* (1890); Karl Peter Nordlund, *Räkneöfningsexempel för skolor: uppställda med afseende på heuristiska methodens användande* (Gefle: 1867). Samt för en intressant diskussion av Norlunds metodiska idéer: Birger Rollin, "Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen," *Pedagogisk Tidskrift* (1891). och Nordlunds svar: K. P. Nordlund, "Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen. Svar på Herr Rollins uppsats i Ped. Tidskrift 1891:10," *Pedagogisk Tidskrift* (1892); K. P. Nordlund, "Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen. Svar på hr Rollins uppsats i fjärde häftet af pedagogisk tidskrift för år 1892.," *Pedagogisk Tidskrift* (1892); Karl Peter Nordlund, *Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen: svar på Herr Rollins uppsats i Ped. Tidskrift 1891:10* (S.L.: 1892).

Någon skriftlig heuristik var det inte fråga om i Zweigbergks och Almqvists böcker. Liksom räknelärorna utgick de från att man skulle lära sig regeln *först*. I räknelärorna åtföljdes alltid regler av kommenterade exempel, och sedan av okommenterade exempel med endast svaret tryckt vid sidan av frågan, för att man skulle kunna pröva sin förståelse. De "Öfnings-Exempel" som följer efter Almqvists regler var uppenbarligen avsedde att fylla en annan funktion, vilken jag strax skall återkomma till.

Zweigbergks framställning av reglerna är inte fullt lika schematisk som Almqvists. Han beskriver "Uppställningen" i löpande text, är mer utförlig i sin beskrivning av själva "reglerna" (vilka dock liksom hos Almqvist är indelade i punkter), han exemplifierar ofta, och har dessutom rader av insprängda "anmärkningar" i mindre typsnitt, som ger extra, eventuellt behjälplig information. Inte desto mindre står som sagt reglerna och övningarna i centrum även i Zweigbergks lärobok.

Varför gav Almqvist och Zweigbergk sina läroböcker i aritmetik denna säregna form? Almqvist skriver i sitt förord om "behofvet för första undervisningen i detta ämne, att ega en Exempel-bok, tillika åtföljd af korta, klara och bestämda Reglor".[1] Renodlade "exempelsamlingar" fanns, skriver han, att tillgå. Men dessa innefattade vanligen inte regler, "emedan man ansett dem böra hemtas ur sjelfva läroboken".[2]

Problemet var att detta var lättare sagt än gjort, "emedan de i dem finnas inblandade i de vettenskapliga beskrifningarne, och stundom ej stå att redigt erhålla".[3] Uppenbarligen syftar Almqvist här på räknelärornas framställningssätt (minns att Agrelius *Institutiones Arithmetica* hade tryckts om så sent som 1798, och att sista upplagan av Roloff Anderssons *Arithmetica Tironica* kom ut 1830), där reglerna, precis som han skriver, är sammanvävda med den löpande texten.[4] Vad lärarna behövde var regler och övningar – och detta var vad Almqvist i sin *Räknekonst*, och Zweigbergk i sin *Lärobok,* förság dem med.

Mer allmänt innebar detta framställningssätt en kraftig begränsning av innehållet i jämförelse med böcker som till exempel Roloff Anderssona *Arithmetica Tironica* eller Forssells *Arithmetik för begynnare*.[5] Även denna begränsning finns motiverad i förordet till Almqvists lärobok. Han skriver:

> Min mening med denna riktning för läroboksskrifningen är för ingen del den, att stora djupsinniga och egentligen vetenskapliga verks utgifvande skulle vara öfverflödigt. Tvertom. Men jag tror uppriktigt, att just då man slår an den methoden, att för den lägre och talrikaste allmänhetens räkning författa skrifter, så mycket som möjligt af blott praktisk syftning, och der det låter sig göra, snarare liknande sliding rules, utan inblandning af sådant, som denna allmänhet i alla fall icke kan förstå; så skola deremot, å andra sidan, rent och på djupet gående arbeten mycket mer kunna egna sig åt theorien, oblandad och föra fram vetenskapen ett steg längre, genom att i sådant skick utgifvas till deras tjenst, hvilka uteslutande öfverlemna sig åt forskningar, och icke sträfva i det yttre lifvet. Om jag icke bedrager mig, hafva författare af förriga läroböcker förbisett denna åtskillnad mer än billigt, och man har derföre bekommit arbeten, hvarken väl inrätade för den lärde eller för den olärde. Månne icke det bästa är, att vara ganska låg, der sådant behöfves, för at i stället kunna vara rätt hög, der det skall vara?[6]

Här blir det väldigt tydligt hur läroböckernas utformning speglade den kontext inom vilken de var tänkta att användas. Almqvist skrev för "den lägre och talrikaste allmänheten", och av denna anledning såg han sig nödgad att utesluta allt det som denna allmänhet "i alla fall icke kan förstå".[7] Jag tror dock att detta tämligen specifika syftesmål, och det säregna framställningssätt det resulterade i, var en viktig orsak till att Almqvists bok inte blev särdeles populär utanför den institution för vilken den var skriven – Nya Elementarskolan i Stockholm, där Almqvist var rektor.[8] Den mångfald av sammanhang inom vilka aritmetiska studier vid denna tidpunkt bedrevs behövde en bok som innehöll *mer* än det skelett av regler och övningar som Almqvist erbjöd dem.

Ett viktigt sätt på vilket Zweigbergks lärobok kom att sätta agendan för den svenska skolmatematiken var genom den specifika uppsättning tillämpningar av Regula de Tri som han inkluderade i sin bok. I detta avseende skiljer sig Zweigbergks lärobok från Almqvists. Almqvist valde nämligen att helt utesluta tillämpningarna av Regula de Tri. Även detta motiverar han i sitt förord:

---

[1] Carl Jonas Love Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik,* 3. uppl. utg. (Stockholm: W. Isberg, 1837), Företal.
[2] Ibid.
[3] Ibid.
[4] Agrelius, *Institutiones arithmeticae*. Andersson, *Arithmetica Tironica*.
[5] Andersson, *Arithmetica Tironica*; Forssell, *Aritmetik för Begynnare*.
[6] Carl Jonas Love Almqvist, *Lärobok i geometrien, innefattande grunderna för läran om Linier, Ytor Planimetri och Landtmäteri, solida Figurer Stereometri utgörande en ny bearbetning af Chr. Wolffs Anfangsgrnde allre mathematischen Wissenschaften 1 Th II Abschn.* (Stockholm: Johan Hörberg, 1833), Företal.
[7] Ibid.
[8] Han var rektor för skolan 1829-41.

> Förf. har uteslutit alla de särskilda afhandlingar om Räknesätt, som äro en tillämpning af Regula de tri eller Proportionsläran, ehuru de annars i aritmetiska läroböcker bruka upptaga ett betydligt rum, såsom Rabatt, Baratt, Thara, Fursti, Regula soceietatis, alligationis m. m. Hvar och en, som ingår i ett yrke, der kunskap derom behöfs (i synnerhet handel), måste i alla fall enkom studera sin sak, och inhemta en närmare kännedom om dessa ämnen, än som i en lärobok för hela almänheten står att bekomma. För denna allmänhet deremot behöfvas dessa underrättelser icke, och skulle blott göra boken onödigtvis stor och dyr.[1]

Det finns anledning att lägga detta stycke på minnet. Almqvist riktar här en kritik mot vad som under resten av 1800-talet kom att utgöra den aritmetiska undervisningens stomme – tillämpningarna av Regula de Tri. Dessa tillämpningar fungerade, kan man säga, som scheman för matematikens tillämpning; de bestämde hur, på vad, i vilka sammanhang, som matematiken kunde tillämpas. En lockande metafor är att betrakta dessa tillämpningar som skolmatematikens motor – och därmed verkligheten som ett slags bränsle vilket sögs in i läroböckerna, och därmed också i klassrummen och eleverna.

Zweigbergk var i detta avseende räknelärorna relativt trogen. Man kan följa en tämligen kontinuerlig utveckling från Agrelius, via Beckmarck och Forssell, till Zweigbergk där tillämpningarna av Regula de Tri får en allt mer schematisk utformning; matematiken, i form av algebra, får en liten, men viktig plats i framställningen; uppdelningen mellan "enkel" och "sammansatt" Regula de Tri får en allt mer självklar roll som strukturerande princip; antalet olika tillämpningar blir färre, och de som blir kvar får en allt mer stereotyp karaktär så till vida att allt mer blir scheman för att generera "verklighetslika" situationer, snarare än beskrivningar av metoder för att hantera situationer som faktiskt kunde tänkas uppstå i verkligheten "så som den är".

Det intressanta är att denna utveckling kom att avstanna efter publikationen av Zweigbergks *Lärobok*. Helt andra frågor än räknesättens eventuella bristande relation till verkligheten utanför skolan hamnade i diskussionens centrum efter 1830-talet. För läroverkets del till exempel motsättningen mellan latinet och realbildningen. Folkskolans talesmän hade för sin del fullt upp med frågor rörande skolornas ekonomiska och praktiska villkor samt ordnandet av en ändamålsenlig lärarutbildning. Det kan av denna anledning vara värt att klargöra vari de räknesätt bestod, som genom Zweigbergk kom att tas för givna som de aritmetiska studiernas slutpunkt. I tabellen nedan förklaras därför innebörden av de sex "räknesätt" som hade egna avsnitt i Zweigbergks *Lärobok i räknekonsten*.[2]

Table 5. De tillämpningar av Regula de Tri som genom Zweigbergks *Lärobok i Räknekonsten* kom att spela en central roll inom den svenska skolmatematiken från och med 1840-talet.[3]

Räknesätt	Innebörd
Intresseräkning	Motsvarar dagens procenträkning. I analogi med skillnaden mellan enkel och sammansatt Regula de Tri skiljer Zweigbergk mellan enkel och sammansatt intresseräkning, där den sammansatta "uppkommer, då afseende äfven göres på den tid, Kapitalet varit utlånadt eller användt".[4] Zweigbergk framställer intresseräkningen som en tillämpning av Regula de Tri, där kapitalet och tiden utgör "orsaker" och intresset "verkan".
Rabatt-Räkning	Uppkommer då en person ålagts att betala en viss summa efter en viss tid, men istället betalar den genast. Han skall då nämligen få en viss "rabatt" som motsvarar den räntevinst som betalningsmottagaren kan göra tack vare att han fått pengarna tidigare än vad som avtalats. Zweigbergk förklarar detta med hjälp av lite algebra, som emellertid sätts in i Regula-de-Trins övergripande ramverk av orsak och verkan: "Således är ***k*** [den summa som genast betalas] att anse såsom orsak till ***K*** [det större belopp som enligt avtalet skulle betalas efter en viss tid], i samma förhållande som ***100*** till ***100 + tp*** [tiden gånger den procentsats som motsvarar räntan]".[5]
Betalningsterminers reduktion	Detta avsnitt följer i Zweigbergks bok direkt efter avsnittet om rabatträkning. Trots det för Zweigbergk inte in detta räknesätt i Regula-de-Trins övergripande ramverk. Istället nöjer han sig med en algebraisk förklaring av problemet, för att därefter direkt (ens utan ett kommenterat exempel!)

[1] Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, Företal.
[2] Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten.*
[3] Ibid.
[4] Per Anton von Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel, utgifven af P. A. v. Zweigbergk, Phil. Magister. Tredje Upplagan.* (Stockholm: Hörbergska boktryckeriet, 1843 [1839]), 115.
[5] Ibid., 123.

	ange 10 övningsuppgifter. Antag att ett antal belopp, a, b och c, skall betalas vid olika tidpunkter, t, t', t''. Vad man söker är då, givet en räntesats p, en tidpunkt T, då hela summan kan betalas "utan att hvarken gäldenären eller fordringsägaren derpå förlorar".[1] Det hela mynnar ut i en formel för uträkning av "medelterminen", vilken motsvarar ett medelvärde av beloppen viktade med tidsintervallen tills dess att de skulle betalas.
Bolagsräkning	Kallades tidigare för regula societatis och senare allt oftare för delningsräkning.[2] Problemet som detta räknesätt löser uppstår till exempel när ett antal personer gått in med olika insatser i ett företag, och detta företag sedan skall säljas. För en rättvis fördelning av vinsten skall varje person få en del av denna vinst som står i samma förhållande till vinsten, som hans insats gjorde till summan av insatserna. Om till exempel A gick in i ett företag med 100 kronor, och B med 400, och företaget sedan säljs för 10000 kronor, då skall A få 2000 och B 8000 kronor eftersom $\frac{100}{500} = \frac{2000}{10000}$ och $\frac{400}{500} = \frac{8000}{10000}$. Zweigbergk redogör även för sammansatt bolagsräkning. Då bolagsräkningen är sammansatt kompliceras räknandet av att insatserna har olika karaktär. Till exempel kan det handla om ett gemensamt köp av åkermark, där de olika delägarna köpt jord av olika kvalitet, som därför bidrar i olika hög grad till avkastningen. Zweigbergk skriver att "Bolags-Räkning kallas ***sammansatt***, då flera tal äro gifna, som gemensamt bestämma hvarje lotts förhållande till de öfriga. Dessa tals produkt utgör då den ifrågavarande lottens rations-tal".[3]
Alligationsräkning	Kom senare allt oftare att kallas för blandningsräkning. "Alligations-Räkning lärer att besvara sådane frågor, som kunna förekomma, då flera ämnen af olika halt eller värde hopblandas till en massa".[4] Det kan till exempel handla om att beräkna priset på en tunna, som innehåller en viss mängd vete blandad med en viss mängd råg. Till detta räknesätt för Zweigbergk även frågor rörande enskilda beståndsdelars värde eller mängd, då det totala priset är känt. Liksom när det gäller betalningsterminers reduktion bemödar sig Zweigbergk här inte om att göra Regula de Tri av beräkningarna, utan beskriver istället problematiken med hjälp av algebra.
Kedje-Räkning	Innebörden förklaras lättast med ett exempel: "Om 13 tunnor hvete äro i värde lika med 16 tunnor råg, men 5 tunor råg gälla så mycket som 7 tunnor korn, och 20 tunnor korn kosta lika mycket som 26 tunnor havre; huru många tunnor havre bör man då erhålla för 25 tunnor vete?".[5] Det är alltså fråga om att använda en kedja av förhållanden, för att säga något om förhållandet mellan den första och sista termen i denna kedja (i detta exempel vete och havre). Detta räknesätt är en utveckling av tidigare räknelärors växelräkning. Räknesättet hade ursprungligen sin tillämpning på mynt, där det ibland inte fanns någon direkt växelkurs att tillgå eller man av någon annan anledning behövde gå vägen över andra myntsorter.[6] Tillämpningarna av kedjeräkningen är hos Zweigbergks dock i första hand hämtade från det som annars skulle kallas bytesräkning.[7]

Dessa "räknesätt" kom i praktiken att fungera som mallar för att ge verkligheten – framför allt samhällets ekonomiska sfär – en form som gjorde den möjlig att behandla i de skolmatematiska undervisningspraktiker som nu fick allt större spridning i det svenska samhället.

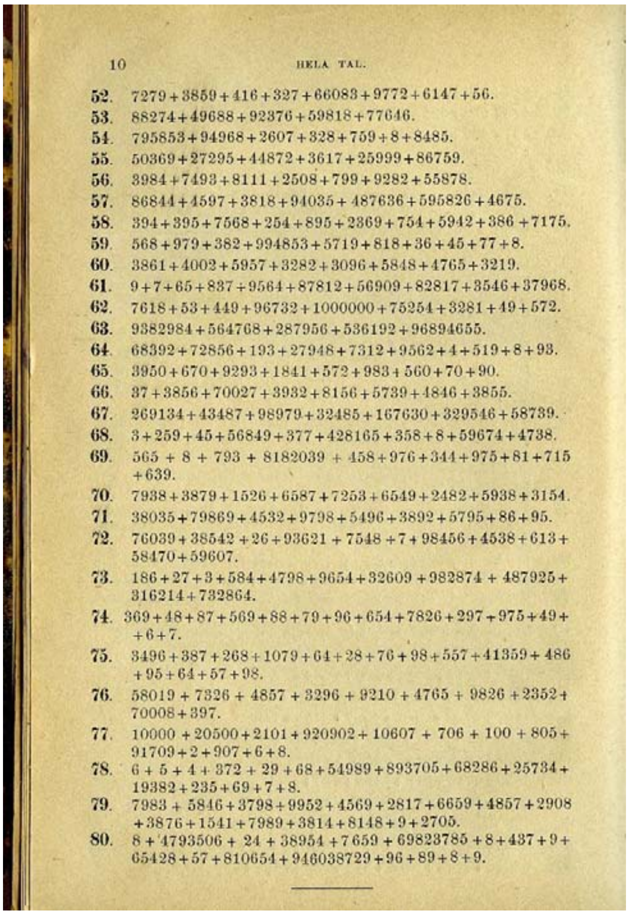
Övningsuppgifter

Zweigbergks och Almqvists böcker är utformade för en undervisning där lärjungarna först får regler som säger hur en viss typ av uppgifter kan lösas, för att sedan få en mängd sådana uppgifter att arbeta med. Denna undervisningspraktik motiverades med hänvisning till att praktiskt arbete med den typ av praktiska

[1] Ibid., 127.
[2] Roloff Andersson gör dessutom en mer detaljerad indelning i Skeppsdelning, Parters delning och Arvdelning (Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 215.).
[3] Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten*, 131 (fetstilen är Zweigbergks).
[4] Ibid., 137.
[5] Ibid., 143.
[6] Forssell, *Aritmetik för Begynnare*, s. 279.
[7] Samma typ av tillämpning har t. ex. Lithander, *Aritmetik och Euklides' Elementer*, s. 103-04. Förändringen av räknesättets tillämpning är karaktäristisk för den nya skolmatematiken; den representerar ett steg bort från praktiken – där denna form av kedjor knappast förekommer – mot en skolmatematik vars signum är uppgifter för övning. Kedjeräkningen är, tycks det mig, (som) gjord för kontruktion av övningsuppgifter.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

övningsuppgifter det här var fråga om skulle få en rad positiva konsekvenser för lärjungarna. Detta på ett liknande sätt som man tidigare argumenterat för att arbete med matematik i form av euklidisk geometri skulle få sådana konsekvenser.


10 HELA TAL.

52. 7279+3859+416+327+66083+9772+6147+56.
53. 88274+49688+92376+59818+77646.
54. 795853+94968+2607+328+759+8+8485.
55. 50369+27295+44872+3617+25999+86759.
56. 3984+7493+8111+2508+799+9282+55878.
57. 86844+4597+3818+94035+487636+595826+4675.
58. 394+395+7568+254+895+2369+754+5942+386+7175.
59. 568+979+382+994853+5719+818+36+45+77+8.
60. 3861+4002+5957+3282+3096+5848+4765+3219.
61. 9+7+65+837+9564+87812+56909+82817+3546+37968.
62. 7618+53+449+96732+1000000+75254+3281+49+572.
63. 9382984+564768+287956+536192+96894655.
64. 68392+72856+193+27948+7312+9562+4+519+8+93.
65. 3950+670+9293+1841+572+983+560+70+90.
66. 37+3856+70027+3932+8156+5739+4846+3855.
67. 269134+43487+98979+32485+167630+329546+58739.
68. 3+259+45+56849+377+428165+358+8+59674+4738.
69. 565+8+793+8182039+458+976+344+975+81+715 +639.
70. 7938+3879+1526+6587+7253+6549+2482+5938+3154.
71. 38035+79869+4532+9798+5496+3892+5795+86+95.
72. 76039+38542+26+93621+7548+7+98456+4538+613+ 58470+59607.
73. 186+27+3+584+4798+9654+32609+982874+487925+ 316214+732864.
74. 369+48+87+569+88+79+96+654+7826+297+975+49+ +6+7.
75. 3496+387+268+1079+64+28+76+98+557+41359+486 +95+64+57+98.
76. 58019+7326+4857+3296+9210+4765+9826+2352+ 70008+397.
77. 10000+20500+2101+920902+10607+706+100+805+ 91709+2+907+6+8.
78. 6+5+4+372+29+68+54989+893705+68286+25734+ 19382+235+69+7+8.
79. 7983+5846+3798+9952+4569+2817+6659+4857+2908 +3876+1541+7989+3814+8148+9+2705.
80. 8+4793506+24+38954+7659+69823785+8+437+9+ 65428+57+810654+946038729+96+89+8+9.

Figur 5. En sida i Zweigbergks *Lärobok i räknekonsten*. Bilden visar upplagan från 1877, där antalet övningsuppgifter ytterligare ökat sedan den första upplagan från 1839.[1]

I min redogörelse för dessa motiv skall jag vidga perspektivet något, och även ta upp argument från några andra läroböcker. Framför allt skall jag ta upp läroböcker där inte *regler* – men väl övningsuppgifter – tillmättes en central betydelse. Detta gör det möjligt att ge en mer heltäckande bild av hur man vid denna tid såg på relationen mellan matematiska kunskaper och praktiskt övande.

Den enskilt viktigaste förändring som gör det möjligt att dra en skarp gräns mellan de läroböcker i aritmetik som står i fokus här och de som publicerats tidigare, är att övningsuppgifternas *facit* i de nyare böckerna skiljts från presentationen av frågorna. De placerades nu längst bak i boken, eller i ett särskilt häfte. Övergången sker mellan Forssells *Arithmetik för Begynnare* från 1818 och Henrik Falcks *Practisk lärobok i arithmetiken* från 1830. I förordet till Falcks bok kan man läsa att:

> Bästa bruket af denna bok är visselitgen, att läsaren, sedan han vid en uppgift medelst enskildt exempel rätt fattat frågans mening, då först om upplösningen rådfrågar boken, när egen uppfinning ej vill lyckas, och blott så vida, som till densammas rigtning erfordras. Utom de anvista sätten att mångdubbla exemplen blir det för läraren lätt att af de här gifna bilda en mängd andra, till formen lika eller beslägtade. Att *svaren* på öfnings-exemplen så vid bokens *slut* i ett *serskildt Tillägg*, bör blifva ganska nyttigt.[2]

Flytten av övningsexemplens svar motiveras här med hänvisning till att "läsaren" bör försöka lösa uppgifterna på egen hand, innan han rådfrågar boken. Av citatet framgår emellertid att boken även var tänkt att användas i en undervisningssituation, och det krävs ingen djupare analysförmåga för att inse att denna förändring av bokens struktur hänger samman med en förskjutning i synen på den matematiska undervisningens mottagare, som i och med detta fick ta mindre eget ansvar för sitt kunskapsinhämtande.

[1] Per Anton von Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel* (Stockholm: 1877).
[2] Falck, *Practisk lärobok i arithmetiken*, Förord.

Förändringen hängde emellertid också samman med ett nytt sätt att tänka kring matematiska kunskaper i allmänhet. Man kom nämligen att tillmäta lärjungens *upptäckande* av "de matematiska sanningarna" – upptäckande genom eget arbete – en allt större betydelse, något som givetvis understöddes av att uppgifternas svar gjordes mer svårtillgängliga.

I Falcks bok var svaren placerade sist i boken. Mer betydelsefull blev förändringen då svaren helt lyftes ur boken, och placerades i ett särskilt häfte. Detta var den lösning Almqvist valt i sin *Räknekonst för begynnare* från 1832.[1] Även Zweigbergks *Lärobok i räknekonsten* har facit åtskilt från läroboken.[2] Man kan i denna förändring se hur böckernas utformning följer det sociala sammanhang inom vilket de användes. Mer specifikt kan man se en begynnande separation av räknekonstens explicita diskursiva budskap från en typ av *arbetsinstruktioner* riktade till lärjungarna, något jag skall återkomma till. Till saken hör att det vid denna tid började publiceras särskilda "anvisningar" utformade för lärare, i vilka det bland annat beskrevs hur undervisning i matematik borde bedrivas.[3]

Alla som ägnade sig åt författande av läroböcker i matematik på 1830-talet var överens om betydelsen av praktisk övning. Detta övande motiverades på delvis olika sätt, men man kan inte se några direkta motsägelser mellan de respektive ståndpunkterna. De framstår tvärtom snarast som uttryck för en tämligen koherent gemensam grundsyn på så väl de matematiska studernas syfte som hur detta syfte kan nås bara genom en viss typ av praktisk övning.

I författarnas förord kan man särskilja sex olika funktioner som övningsuppgifterna antas fylla. *För det första* ansågs de utgöra en nödvändig förberedelse för senare teoretiska studier. Denna funktion hänger samman med att de matematiska studierna vid denna tid utsträcktes till personer som både på grund av sin ungdom och sin sociala tillhörighet, inte ansågs förmögen att tillgodogöra sig den typ av "abstrakta" undervisning som tidigare varit de matematiska studiernas kännemärke. De stod emellertid klart att de matematiska studierna för de flesta lärjungar inte skulle leda till några fortsatta matematiska studier. *För det andra* menade man därför att just detta praktiska övande skulle utgöra en god förberedelse för det praktiska livet.

Bland andra Henrik Falck, som var adjunkt vid Uppsala universitet, uttryckte emellertid mer vidsträckta förhoppningar rörande det praktiska övandets möjliga konsekvener. *För det tredje* menade han att det skulle leda lärjungarna till allmänna sanningar, vilka skulle upptäckas under det praktiska arbetets gång. Man bör observera att detta är något annat än den förberedelse för det praktiska livet som Zweigbergks och Almqvist talade om. *För det fjärde* nämns vid denna tid fortfarande den möjlighet exempel erbjuder lärjungarna att pröva om man förstått. Detta motiv fick emellertid allt mindre betydelse. *För det femte* menade man att de många tillämpningarna skulle tjäna till att illustrera matematikens räckvidd, ett mål vi känner igen från argumentationen kring undervisningen vid krigsakademin. *För det sjätte* menade man att övningsuppgifterna – genom sitt praktiska och omväxlande innehåll – skulle öka lärjungarnas intresse för matematik och på så sätt göra dem mer benägna att lära sig.

Låt mig anföra några citat som exemplifierar hur dessa motiv kom till uttryck. Kommendörkaptenen Abraham Wilhelm Lavén skriver i förordet till sin *Lärobok uti Mathematik* följande:

> Som det lättaste sättet att pröfva, huruvida man förstår at tillämpa sin mathematiska kunskap, består uti des användande på frågors, eller problemers, besvarande; så hafva här en stor mängd problemer blifvit anförde. Dessa problemer medföra tillika den fördel, att lärjungen ser, att den inhemtade kunskapen är af nytta; hvarigenom ock han med större håg och nöje bör söka inhemta densamma.[4]

I bokens andra upplaga skriver han att hans syfte varit att

> genom en stor mängd med omsorg valda exempel och problemer, bibringa lärjungen så väl förmåga att använda, som öfvertygelse om gagnet af den theori han inhemtat.[5]

---

[1] Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik.*
[2] Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten.*
[3] Jag tänker här på Carl Olof Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden* (Stockholm: 1830). Anders Oldberg, *Praktisk handbok i pedagogik och methodik för swenska folkunderwisningen*, 2. uppl. utg. (Stockholm: 1846). O. E. L. Dahm, *Skolmästarkonst. Antydningar för Lärare och Skolinspektörer* (Kalmar: August Westin, 1846).
[4] Abraham Wilhelm Lavén, *Lärobok uti mathematik: bok 1. räknelära*, *Handbok uti sjövetenskapen, 1* (Stockholm: 1842), Förord.
[5] Abraham Wilhelm Lavén, *Lärobok uti mathematik.: Bok 1. Räknelära. 2:a uppl. 1. Arithmetik och algebra till läran om eqvationer; jemte kort tillägg om serier ochlogarithmer samt en tabell öfver mått, vigter och mynt* (Stockholm: 1852), Förord.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Man kan här notera den betydelse som Lavén tillmäter övningarna både för att väcka intresse, och för att illustrera matematikens användbarhet. Henrik Falck skriver i förordet till sin *Practisk lärobok i arithmetiken* följande:

> Om en Mathematisk Lärobok skall åstadkomma den förståndsbildning, man med rätta väntar af en sådan vetenskap, och derigenom förtjena sitt namn, måste hon vara *practisk*, d. ä. från enskildta exempel, hämtade ur *verkliga* lifvet och verlden, småningom leda lärjungen till mer och mer allmänna sanningar, för att sedan genom en utförligare fortsättning af dylika exempel visa dessa sanningars mångfaldiga giltighet och användning.[1]

Här ser man hur Falck tillmäter övningsuppgifterna två olika funktioner: första att leda lärjungen till allmänna sanningar, och sedan att visa dessa sanningars "giltighet och användning". Längre fram förklarar han att det måste vara fråga om att "icke så mycket *bibringa* som fast mer ur hans eget förstånd *utveckla* kunskaperna". Man kan här skönja en sorts epistemologi, där det så att säga ligger i kunskapernas natur att de måste växa fram som ett resultat av övning. Tanken tycks vara att övningsuppgifternas innehåll – det man arbetat med under kunskapernas utveckling – har en avgörande betydelse för vari de "allmäna" kunskaperna man sedan når fram till har för "innehåll". Falck talar även, liksom Lavén, om att uppgifterna "ouphörligt väcker, uppmuntrar och belönar" lärjungen för hans arbete.[2]

Mindre anspråksfull rörande övandets konsekvenser är Almqvist. Han skriver helt kort att genom övandet "inöfvas [lärjungen] praktiskt i ämnet, och kan sedan med mera lätthet emottaga och grundligt behålla de vettenskapliga förklaringar och utvecklingar, som längre fram meddelas honom".[3] Här är det alltså fråga om en förberedelse för framtida mer teoretiskt lagda studier. Zweigbergk, som i sitt förord är mycket kortfattad, skriver, angående bokens utformning:

> I den öfvertygelse, att knappast någon grad af utförlighet i en Mathematisk Lärobok kan göra Lärarens biträde umbärligt för Lärungen, har utgifvaren af *denna* till större delen inskränkt sig till at i korta reglor angifva de särskilda Räknesätten samt i bifogade anmärkningar antyda deras grunder. Det utrymme, som härigenom kunnat vinnas, har han heldre användt till ett större antal omvexlande öfnings-exempel.[4]

Om något särskilt motiv för de många övningsuppgifterna kan utläsas ur hans förord så är det att de erbjuder lärjungarna "omväxling".

Som en avslutning på min redogörelse för de aritmetiska övningsuppgifterna vill jag lägga två ytterligare "funktioner" till de sex som kan utläsas av hur författarna motiverade sina läroböckers utformning. *För det sjunde* är det nämligen uppenbart att en av övningsuppgifternas viktigare funktioner var att strukturera själva undervisningspraktiken. Eller enklare uttryckt: de tjänade till att hålla eleverna sysselsatta. Denna övningsuppgifternas funktion kom att diskuteras explicit mot slutet av 1800-talet, och jag kommer i min framställning att argumentera för att den hade en avgörande betydelse för läroböckernas successiva förändring mot allt fler övningsuppgifter under 1800-talets andra hälft. Man måste i detta sammanhang komma ihåg att den svenska folkskolan i stor utsträckning växte fram som sätt att möta behovet av att bemästra en framväxande "arbetarklass". En av folkskolans uppgifter var helt enkelt hålla barn och ungdomar sysselsatta på en plats där de inte störde de vuxnas arbete. Det ökande antalet övningsuppgifter måste ses som ett tidigt svar på detta behov. Både Almqvist och Zweigbergk framhåller att deras böcker innehåller "talrika" övningsuppgifter. Nedanstående tabell visar förändringen av antalet övningsuppgifter på några av läroböckernas obligatoriska moment:

Table 6. Antal övningsuppgifter på olika moment i några läroböcker i aritmetik.

	Förenkling av bråk	Sortomvandling	Intresseräkning	Rotutdragning
Andersson (1779)	4	6	16	10
Beckmarck (1795)	21	7	4	10
Almqvist (1832)	62	20	40	16
Zweigbergk (1843)	140	40	50	50

[1] Falck, *Practisk lärobok i arithmetiken*, Förord.
[2] Ibid.
[3] Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, Företal.
[4] Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten*, Förord.

Man kan här se hur antalet uppgifter ökade under första halvan av 1800-talet. I förhållande till dagens matematikläroböcker är antalet uppgifter emellertid fortfarande mycket litet. Man skall komma ihåg att var och en av dessa böcker innehöll *hela* aritmetiken. Det var inte förrän mot slutet av 1800-talet som man började dela in stoffet i olika böcker för olika "stadier" eller "årskurser". Då började man också kunna räkna uppgifternas antal i tusental, snarare än som här i tiotal.

I förhållande till sysselsättningproblematiken blir även uppgifternas "svårighet" intressant, eftersom svårare uppgifter givetvis tar längre tid att lösa. Följande tabell är ett försök att uppskatta hur *svåra* uppgifterna var att lösa i några av de böcker jag tagit upp i detta och de föregående kapitlen.

Table 7. En jämförelse av den *sista* övningsuppgiften på avsnitten "Division i hela tal" och "Division av bråk" i några läroböcker i aritmetik från slutet av 1700-talet och början av 1800-talet.

	Division i hela tal	Division av bråk
Andersson (1779)	$124 : 165$	$389\frac{2}{3} : 45$
Beckmarck (1795)	$756984 : 932$	$1\frac{1}{4} : 1\frac{1}{8}$
Almqvist (1832)	$768099360864 : 800096$	$15\frac{9}{13} : 14$
Zweigbergk (1843)	$1024643703204000 : 1897200$	$771\frac{3}{7} : 146\frac{46}{49}$

Här syns tydligt att uppgifterna alltså inte bara blev fler, utan också svårare. Relationen mellan uppgifternas antal och deras svårighet kom även det att bli ett centralt tema för den skolmatematiska diskussionen mot slutet av 1800-talet. Att göra uppgifterna svårare visade sig nämligen vara ett föga ändamålsenligt sätt att hålla eleverna sysselsatta (eftersom de svåra uppgifterna ofta bara resulterar i att lärjungen vill ha hjälp från läraren).

Det kan i detta sammanhang vara värt att nämna att inte alla de läroböcker vars förord jag citerat ovan lånade sig till den typ av undervisning inom vilken det var betydelsefullt att eleverna hade något att göra. Lavén var en av de som fortfarande i stor utsträckning betraktade övningsexemplen som ett sätt att pröva sin förståelse. I linje med detta synsätt anför han, uppenbarligen frustrerad över den riktning skolmatematiken tagit i fråga om komplicerade tillämpningar av sammansatt Regula de Tri, endast *ett* exempel på den typ av problem som detta räknesätt löser:

> 500 man, som arbetade 12 timmar om dagen, hafva användt 57 dagar för att gräfva en kanal, 1800 alnar lång, 7 alnar bred och 3 alnar djup; huru många dagar behöfva då 860 man använda, om de arbeta 10 timmar dagligen, för att gräfva en kanal 2900 alnar lång, 12 alnar bred och 5 alnar djup, uti en jordmån, som anses 3 gånger svårare att gräfva uti; och då man tillika utrönt att de förstnämndes arbetsförmåga förhåller sig till de sistnämndes som 7 till 5? (Svar $768\frac{36}{43}$ dagar).[1]

Efter en lång och detaljerad genomgång konstaterar Lavén: "Detta exempel, hvilket är ett bland de mest sammansatta som gerna kunna komma i fråga, torde tillräckligt visa huru dylika frågor böra behandlas".[2] Precis som han säger tjänar detta exempel, i vilket, som vi ser, svaret på samma sätt som i äldre räkneläror och läroböcker placerats direkt i anslutning till frågan, i och för sig till att "visa" hur dessa problem kan behandlas – det var dock till föga hjälp i en undervisningssituation där en ensam lärare hade som huvudsaklig uppgift att sätta lärjungarna i arbete.

För det åttonde är det inte svårt att se hur det ökande antalet övningsuppgifter bidrog till att, som jag diskuterade i avslutningen på kapitel 4 ovan, förmedla en "matematisk världsbild" till eleverna, att utsträcka matematikens blick. En genomgång av avsnittet om sammansatt Regula de Tri hos Zweigbergk och Almqvist visar att uppgifterna handlade om: grävande av dike, läggande av mur, åtgång av mat, avkastning av kapital, transport av varor, produktion av brännvin, samt sömnad av kläder – för att nämna några ofta återkommande teman. Den särklassigt vanligaste typen av uppgift handlar om människor som utför någon typ av arbete tillsammans. Här är en variant hos Almqvist:

> Om 4 arbetare på 5 dar afrödje och uppgräfva 460 qvadratalnar, med 9 arbetstimmar om dagen; huru många dar behöfva då 15 arbetare, att på sådant sätt uppgräfva 3 1/4 Tunnland (som göra tillsammans 45,500 qvadratalnar), när de arbeta 12 timmar om dagen?[3]

[1] Lavén, *Lärobok uti mathematik: bok 1. räknelära*, 190-91.
[2] Ibid.
[3] Almqvist, *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*, s. 106.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Här en snarlik uppgift hos Zweigbergk:

> Om 6 man på 3 dagar, då de arbeta 10 timmar om dagen, kunna lägga en stenmur af 20 famn. längd, 3 1/2 qvart. bredd och 1 1/4 alns höjd; huru många timmar behöfva då 10 man dagligen arbeta, för att på 7 dagar hinna fullborda en dylik stenmur af 45 famn. 1 1/9 alns längd, 1 1/8 alns bredd och 1 1/2 alns höjd?[1]

Är det inte tydligt hur matematiken i dessa uppgifter – enkelt uttryckt ämnade för blivande bönder och arbetare – blivit en sorts arbetets mästare? Genom arbete med denna typ av uppgifter lärde sig lärjungarna att matematiken *handlar om* den verklighet som de efter skolan själva blev en del av. Men den var inte till någon *nytta* i detta praktiska arbete. Man blev knappast bättre på att gräva diken, röja skog, mura, eller sy, genom att lösa skolans övningsuppgifter. Om det var något "realistiskt" perspektiv som dessa uppgifter gestaltade så var den framväxande borgarklassens – som kunde betrakta arbetet på avstånd. Lösandet av dessa uppgifter blev med andra ord en övning i att betrakta arbete från ett perspektiv som är detta arbete i grunden främmande. Genom matematiken lärde sig de blivande bönder och arbetare att betrakta sin egen praktiska verklighet som en del av ett större sammanhang som inte var deras. Medan givetvis blivande borgare lärde sig betrakta det arbete de aldrig skulle behöva utföra från ett perspektiv som var just deras.

Det var ännu en utopi, men man ser redan här hur matematiken bär på en potential att utgöra en slags gemensam samhällelig referenspunkt. En blick som bestämmer vad den sociala och fysiska verkligheten är och därmed också vem som har rätt i fråga om denna verklighet.

Algebra

I takt med att matematiska studier blev mer allmänna uppstod ett behov av ändamålsenliga läroböcker, detta såväl i aritmetik som i algebra. J. Delander skriver i förordet till sin lärobok i algebra från 1836 att hans avsikt varit att "bidraga till afhjelpande af den ofta öfverklagade bristen på en tjenlig Lärobok i detta ämne".[2] E. G. Björling skriver att han ursprungligen hade tänkt att hans bok bara skulle användas vid den skola där han själv undervisade (Hillska skolan på Barnängen), men att han blivit "uppmanad" att ge ut den i "allmänna bokhandeln".[3]

Björling anger i förordet till sin *Elementar-lärobok i algebra* (vilken kom ut i 10 upplagor mellan 1832 och 1877) att han på tre olika sätt velat avhjälpa brister hos tidigare läroböcker i algebra. *För det första* genom att "ej andra delar af Algebran blifvit vidrörda än de, som för en grundliga undervisning uti och redig uppfattning af läran om 1:sta och 2:dra gradens aequationer erfordras; (kostnaden blir derigenom mindre, och användbarheten vid allmänna undervisningn i samma mån större)".[4] Här syns ett av skolmatematikens kännetecken: begränsningen av stoffet med utgångspunkt från eleven och undervisningen.

För det andra har Björling tagit med "ett så stort antal som möjligt af goda öfningsexempel". Liksom på aritmetikens område har övandet nu gjorts till en huvudsak. Syftet med övningsuppgifterna var, skriver Björling, att väcka lärjungens intresse, en ambition vi ser ligger i linje med de som kom till uttryck i förorden till läroböckerna i aritmetik. Björling skriver, angående övningsuppgifternas ordning, att den möjligen "vid första påseendet förefalla något besynnerlig".[5] Han är emellertid övertygad om att man "kommer det ungdomliga interesset närmare derigenom att man, sedan en gång inledningen är gjord med det enklaste och lättfattligaste, låter det lättare och det svårare omväxla med hvarannan (naturligtvis i enlighet med en på förhand utstakad plan), än derigenom att man i oupphörlig serie tröttar med allt svårare och svårare ämnen".[6] Även månandet om elevens intresse utgjorde alltså en gemensam nämnare för Björling och författarna till läroböcker i aritmetik. *För det tredje* har han bemödat sig om att inte skilja det teoretiska från det praktiska. Även här kan man se en överensstämmelse med de motiv som presenterats angående aritmetiken. Björlings ambition är att teori och praktik hela tiden skall stå i förbindelse med varandra, för att på detta sett bibringa lärjungen praktiska kunskaper.

Med detta sagt om Björlings utgångspunkter skall jag i redogörelsen för hans bok ta fasta på två karaktäristiska drag, vilka fick stor betydelse för skolalgebrans fortsatta utveckling i Sverige. För det första att

---

[1] Per Anton von Zweigbergk, *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel: med facit-tabeller [vilken upplaga kom 1842?]* (Stockholm: 1842), s. 100.
[2] J. Delander, *Lärobok i elementerne af algebra: innefattande första och andra gradens eqvationer, jemte logarithmer och serier* (Stockholm: 1836), Förord.
[3] Björling, *Elementar-lärobok i Algebra*, Förord.
[4] Ibid., förord.
[5] Ibid.
[6] Ibid.

hans bok är utformad som en *väg* – av teori varvad med övningsppgifter – mot allt högre grad av bemästrande. I detta avseende utgör den en naturlig fortsättning på den utveckling som jag i förra kapitlet beskrev angående Beckmarcks och Forssells respektive algebraböcker. För det andra att Björlings bok väsentligen består av två delar: en första del, som utgör själva vägen, vilken innehåller *bokstavsräkningen*, och en avslutande del som kretsar kring *ekvationer*, vilken utgör vägens slutpunkt.

Algebran som väg

I förra kapitlet såg vi hur Forssells *Algebra för begynnare* utgjorde en sorts pedagogisering av Beckmarcks *Algebra*. Forsell delade in algebran i en mängd kortare moment, och gav vart och ett av dessa moment en betydligt utförligare beskrivning än Beckmarck gjorde i sin algebrabok. I nedanstende tabell kan vi se hur Björling tar detta "utsträckande" av algebran ytterligare ett steg.

Table 8. Jämförelse mellan Forssells *Algebra för Begynnare* och E. G. Björlings *Elementar-lärobok i algebra*.[1]

Forssells rubriker	**sidor**	**Björlings rubriker**	**sidor**
1 Cap. Om de algebraiska Tecknen.	12	Cap. 1. Förberedelser	18
2. Cap. Om Addition och Subtraction.	5	Cap. 2. Addition	5
		Cap. 3. Subtraction.	2
3 Cap. Om Multiplication och Division.	10	Cap. 4. Multiplication.	8
		Cap. 5. Division.	7
4. Cap. Om Bråk.	11	Cap. 6. Bråks reductioner	8
		Cap. 7. Bråks Addition och Subtraction	7
		Cap. 8. Bråks Multiplication och Division	5
5 Cap. Om digniteter och Rötter.	22	Cap. 9. Digniteter och Rötter. 1:o Upphöjande till Digniteter.	17
		Cap. 10. Digniteter och Rötter. 2:o Rotutdragning	21
6 Cap. Om Equationer i allmänhet och om Enkla Equationers uplösning, som blott innehålla En obekant.	19	Cap. 11. Första gradens æquationer med en obekant.	32
7 Cap. Om Quadratiska Equationers Uplösning	11	Cap. 12. Andra gradens æquationer med en obekant.	32
8 Cap. Om Equationers Uplösning, som innehålla Två eller flera Obekanta.	13	Cap. 13. Första och andra gradens æquationer med två eller flere obekanta.	31
9 Cap. Om Förhållande, Proportioner och Serier.	12		
10 Cap. Om Logaritmer.	17		
11 Cap. Om Algebras Tillämpning til Geometriska Problemers Uplösande.	44	[Cap. 11,12 och 13]	
12 Cap. Några Arithmetiska Problemer til hvilkas uplösning Algebra lämpas.	30		
		Cap. 14. Några anmärkningar om æquationer i allmänhet.	3
totalt antal sidor:	204	totalt antal sidor:	196

De skillnader som kan noteras är för det första att Björling delat in vägen fram mot ekvationsläran i dubbelt så många steg som Forssell: där Forssell nöjer sig med att skilja "Addition och Subtraktion" från "Multiplikation och Division" har Björling ett avsnitt för varje räknesätt. Forssells avsnitt "Om bråk" har Björling delat i tre. Denna mer detaljerade innehållsförteckning speglar en motsvarande ökning av detaljer i själva framställningen, vilka sammantaget gör denna första del av Björlings bok till ett successivt framåtskridande, från det lättare till det svårare. Elevens lärande har fått fungera som strukturerande princip.

En andra signifikant skillnad mellan Forssells och Björlings respektive böcker ligger i hur de konstituerar bokstavsräkningens slutpunkt – lösandet av ekvationer. Forssells framställning av denna del av algebran framstår i jämförelse med Björlings som tämligen splittrad. Förutom "Equationer i allmänhet" tar Forssell upp "Förhållande, Proportioner och Serier" samt "Logaritmer". Till det (jämförelsevis) splittrade intrycket bidrar även att han valt att skilja mellan algebrans tillämpning på "Geometriska Problemer" och

[1] Forssell, *Algebra för Begynnare*. respektive Björling, *Elementar-lärobok i Algebra*.

dess tillämpning på "Arithmetiska Problemer". Björlings struktur utgår tvärtom helt och hållet från själva algebran. Hans bok börjar med en grundlig genomgång av bokstavsräkningen, det vill säga hantering av de fyra räknesätten samt digniter och rötter. I avsnitten om ekvationsräkning följer sedan tillämpningar av den teknik man övat upp under arbetet med bokens första del. Först på första gradens ekvationer med en obekant, sedan på andra gradens ekvationer med en obekant och slutligen på första och andra gradens ekvationer med två eller flera obekanta. Logaritmerna har Björling förbigått med tystnad – eftersom, enkelt uttryckt, man inte har någon nytta av logaritmer för att lösa första och andra gradens ekvationer.

Björling är, liksom Forssell, tämligen "pedagogisk". Hans inledning är värd att citera i sin helhet, eftersom den så tydligt visar hans ambition att väcka intresse, samt hur han riktar sig till en ung läsare:

> I Arithmetiken räknar man med ziffror. Man säger t. ex. att 2 lod och 3 lod tillsammans utgöra 5 lod. – Men en annan gång kan man lättare uträkna någonting, utan att blott räkna med ziffror. T. ex. En gossa frågar sin kamrat: *kan du säga, huru många timmar jag tillsammans har arbetat på fyra dagar, då jag första dagen arbetade* $3\frac{4}{13}$ *timme, andra dagen dubbelt så mycket, tredje dagen hälften så mycket, och fjerde dagen lika så mycket som första dagen?* För att nu kunna svara derpå, skulle gossen egentligen lägga tillsammans $3\frac{4}{13}$, 2 gånger $3\frac{4}{13}$, $\frac{1}{2}$ gång $3\frac{4}{13}$, samt $3\frac{4}{13}$. Men då tycker han, att det är lättare att, i stället för det blandade talet $3\frac{4}{13}$, taga något enklare uttryck, och säger derföre: Låt mig kalla talet $3\frac{4}{13}$ för *a*, så skall jag lätt besvara din fråga. Du arbetade således på första dagen *a* timmar; på andra dagen dubbelt så många, d. ä. 2*a* timmar; på tredje dagen hälften så många, d. ä. $\frac{1}{2}a$ timmar; på fjerde dagen *a* timmar. Nu är det mycket lätt att lägga tillsammans dessa alla. Jag säger då, likasom i Arithmetiken:
>
> $$a + 2a + \frac{1}{2}a + a \text{ blir} = 4\frac{1}{2}a;$$
>
> Men med *a* mente jag $3\frac{4}{13}$; således får jag till summa $4\frac{1}{2}$ gånger $3\frac{4}{13}$ d. v. s. $14\frac{23}{26}$ timmar.[1]

Bättre så här kan man väl knappast presentera algebrans grundläggande idé – att ersätta siffror med bokstäver? Mitt intryck är att det inte är en slump att det var just Björlings och Zweigbergks respektive böcker som blev de mest populära av böckerna publicerade på 1830-talet. Björling är kort sagt en god stilist, och han var troligtvis ganska framgångsrik i sin ambition att väcka läsarens intresse.[2] I framställningen kombineras löpande text med kommenterade illustrerande exempel, tabeller och övningsuppgifter.

Även om Björlings bok innehåller mycket mer text och många fler kommenterade exempel än Palmqvists eller Beckmarcks korta framställningar av algebran som ett slags "system av regler", spelar reglerna en framträdande roll även i Björlings bok. De är genomgående koncist formulerade, som till exempel "*Multipliciera täljare med täljare, och nämnare med nämnare!*" eller "*om man vid Bråks multiplication kan jämt dividera någon af täljarena och någon af nämnarena med samma tal, så har man rättighet att göra det*".[3] Särskilt hatad blev mot slutet av 1800-talet regeln för division av bråk: "*Vänd upp och ned på Divisorn, och multiplicera sedan!*".[4] För att betona reglernas betydelse har Björling använt både kursiv stil och utropstecken.

I viss mån ironiskt är att Björlings regler i en praktisk mening knappast var särskilt lättillgängliga, om någon lärare till äventyrs var intresserad av att – så som Almqvist beskriver angående aritmetiken – ur boken extrahera endast dessa regler. Tvärtom är reglerna i Björlings *Elementar-Lärobok* ofta inbakade i den löpande texten. Tillspetsat kan man säga att Björling i och med detta nästan har skapat en sorts algebraisk räknelära. Likheten ligger just i reglernas centralitet, och att det praktiska räknandets detaljer får så stort utrymme. I räknelärorna rörde det sig emellertid om räknande i olika yrkespraktiker, medan det i Björlings bok istället rör sig om räknande med bokstäver i skolan. Björlings bok utgör, på samma sätt som läroböckerna i aritmetik, ett slags självrefererande system – i boken finns allt som behövs för att lära sig räkna i skolan, samtidigt som detta räknande bara har relevans just där – i skolan.

---

[1] Björling, *Elementar-lärobok i Algebra,* 7-8.
[2] Det senare 1800-talets kritik mot Björlings lärobok tyder dock på att det oftare var lärarens intresse han lyckades väcka en elevens.
[3] Björling, *Elementar-lärobok i Algebra,* 56.
[4] Ibid., 57. [skall lägga hit fler referenser]

Första och andra gradens ekvationer

Tanken bakom lärogången i Björlings *Elementar-Lärobok* är att man först lär sig räkna med bokstäver, för att sedan använda denna förmåga till att lösa ekvationer. Björling skriver i en not:

> Det är med æquationers upplösning som man i Algebra hufvudsakligast sysselsätter sig. Alt det föregående är intet annat än sådana förberedelseräkningar, som man nödvändigt måste känna, för att kunna upplösa æquationer. – Och emedan nästan alla i det allmänna lifvet förefallande räkningar kunna behandlas efter reglorna för æquationers upplösning; så är æquationsläran så vigtig och förnöjande.[1]

Relationen mellan bokstavräkninen och – för att använda de senare 1800-talets teminologi – "ekvationsläran" är synnerligen logiskt. För upplösning av till exempel förstagradsekvationer presenterar Björling fyra "reglor":

> 1:o) Omtill den obekanta qvantiteten *x* är *adderad* en annan qvantitet; så befrias *x* derifrån, om man på båda sidor om likhetstecknet *subtraherar* denna qvantitet.
>
> 2:o) Om ifrån *x* är *subtraherad* en annan qvantitet; så befrias *x* derifrån, om man på båda sidor *adderar* denna qvantitet.[2]

Och så vidare, på samma sätt för multiplikation och division. Här används just de fyra räknesätt som man lär sig använda i bokens inledning. I ekvationsläran hänvisas alltså ständigt tillbaka på den inledande bokstävsräkningen. Det kan påpekas att Björling även i dessa senare avsnitt är synnerligen pedagogisk – han visar med en mängd kommenterade exempel hur man *gör* när man hanterar de ekvationer som hans bok syftar till att man skall lära sig hantera. Lika viktigt att komma ihåg är att det är just lösning av ekvationer som Björlings lärobok pekar fram mot. Ibland drar han in "verkligheten" i sina exempel, men på precis samma sätt som i tidigare svenska algebraböcker tjänar den uteslutande till att illustrera algebrans tillämpbarhet och, som Björling säger i sitt förord, "väcka lärjungens intresse". Ett exempel kan ges för tydlighets skull:

> 30) Då jag sålde ett stycke kläde för 24 R:dr, vann jag så många procent som klädet kostade mig Riksdalrar. Hvad hade jag gifvit derför?[3]

Det hela mynnar ut i en andragradsekvation, vilket givetvis också var orsaken till uppgiftens formulering.

Algebran var vid denna tid uteslutande något för högre skolor eller skolor speciellt inriktade mot den militära sfären. Intressant är att den knappast ansågs vara särskilt praktisk, på samma sätt som aritmetiken. Signifikativt är att flera författare talar om hur det är "möjligt" att med algebra behandla alla de problem som man löser med aritmetik, och att detta är vad som gör algebran så "förnöjande".[4] Man tycks alltså inte menat att man skulle använda algebran för att *lösa* det praktiska livets problem. Snarare utgjorde algebran en sorts teoretisk överbyggnad till aritmetiken.

Det fascinerande är att skolmatematiken i och med detta kunde upprätta en intern hierarki som på ett märkligt sätt hänvisade till verkligheten utanför skolan. Det praktiska lösandet av praktiska uppgifter inom aritmetiken kom att *motsvara* praktiskt arbete utanför skolan, det vill säga: det praktiska arbetet utanför skolan kom, genom skolmatematiken, att framstå som ett "aritmetikens föremål". I och med att algebran framstod som aritmetikens teori, det vill säga aritmetiken som "algebrans föremål", kunde den därmed framstå som det praktiska arbetets teori. Det var ännu inte en social realitet, men man kan här åtminstone se ett frö till upprättandet av en homologi mellan två olika relationer: den mellan aritmetik och algebra i skolan, och mellan kroppsarbete och "intellektuellt" arbete utanför skolan. Arbete med aritmetiken var på väg att bli ett sorts "simulerat" kroppsarbete, medan arbete med algebran var på väg att bli ett sorts "simulerat" intellektuellt arbete.

[1] Ibid., 99.
[2] Ibid., 103.
[3] Ibid., 143.
[4] Ibid., 99.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

5.2. Geometri

Utvecklingen under denna tid på geometriens område skiljer sig på en avgörande punkt från utvecklingen inom skolmatematikens aritmetik och algebra. De läroböcker i geometri som publicerades fick nämligen aldrig, så som sina motsvarigheter inom aritmetik och algebra, något större genomslag. Tvärtom låg den lärogång baserad på Euklides *Elementa* som tagit form under 1700-talet i stort sett fast genom hela 1800-talet.

Precis som rörande övriga delar av matematiken menade de som skrev läroböcker i geometri att undervisningens huvudsakliga syfte borde vara att bibringa lärjungarna praktiskt användbara kunskaper. Likaledes var man överens om att sättet att nå detta mål var att ge lärjungarna en stor mängd övningsuppgifter med praktiskt innehåll. Genom att arbeta praktiskt med uppgifter där teori och praktik var förenade skulle lärjungarna utveckla rätt sorts kunskaper. Detta resonemang mynnade föga oväntat ut i en skarp kritik mot Euklides *Elementa*, vilka man menade svarade dåligt mot dessa krav.

Inledningsvis kan nämnas Anders Alreiks argumentation för geometrins värde, eftersom den så tydligt knyter an till den typ av retorik från början av 1700-talet som jag redogjorde för i kapitel 5 ovan. Han skriver att geometrin "odlar förståndet, då den lärer, att från säkra grunder draga riktiga slutsatser", att den "skärper eftertankan, och stärker minnet, drigenom att de hållas i en oafbruten verksamhet; ty ingen sats kan bevisas, intet problem lösas, utan att förut erindra sig föregående satser, hvarpå desamma si stödja", samt att det i samhället finns "mångfaldiga yrken och handtverk, som ovilkorligen fordra insigter i Geometrien, om de skola tilbörligen skötas, såsom Landtmäteriet, Seglings- och Byggnadskonsten, Bergs- och Krigsväsendet, m. fl.".[1] Alreik har här lånat friskt från förordet till Mårten Strömers översättning av Euklides *Elementa* (först publicerad 1744) som vid denna tid fortfarande kom ut i nya upplagor.

Denna retorik spelade emellertid inte någon framträdande roll på 1830-talet. I centrum stod då istället *vägen* mot geometriska kunskaper, och betydelsen av att denna väg var praktiskt för att de geometriska kunskaperna också skulle bli praktiska. Henrik Falck beskrivning av en ändamålsenlig geometriläroboks väsentliga egenskaper utgör ett tydligt och samtidigt rikt uttryck för tidens syn på matematiska kunskaper. Han skriver bland annat följande:

> En *lärobok* i Geometrien bör aldrig sakna följande egenskaper: **1:o** Bör hon, såsom hvarje Mathematisk lärobok, i ett afsigtsenligt system af Uppgifter eller Problemer låta läsaren genom verklig handläggning vid deras upplösning sjelf *upptäcka* så väl de åsyftade sanningarne som deras från subjectif till objectif härigenom efterhand öfvergående visshet. Hon får således icke, såsom vanligt sker, hufvudsaklinge bestå af en mängd Theoremer, om ock aldrig så strängt *bevista*, och aldraminst får hon, såsom Euclides, låta de tunnt sådda Problemerna vara blotta medel för en sådan förestafvad bevisning. Hon måste tvärtom, i egenskap af egenlig Geometrie, betrakta Problemerna såsom hufvudsak, [...] **5:o** bör läroboken framför allt vara en ändamålsenlig förberedelse för de Practiska lifvet [...] Alltså bör öfverallt, där räkning eller egentlig Mathematik förekommer, genom en mångfald af sakrika öfnings-exempel omdömet och uppfinningsgåfvan stärkas och utbildas samt practisk färdighet bibringas.[2]

Vi kan här se hur syftet – att bibringa lärjungen praktiska kunskaper – samspelar med hur dessa kunskaper skall ta form, nämligen under "upptäckande" arbete med "en mångfald af sakrika öfnings-exempel".[3]

Almqvist är mindre anspråksfull, i det han skriver att hans bok "hufvudsakligen blifvit beräknas för att praktiskt gagna i det allmänna, lägre lifvet".[4] Tämligen intressant är att Almqvist i sin bok anför ett geometrin som ett redskap för de lägre klassernas emancipation. Han skriver:

> Mätkonstens grunder; en kunskap, så högst nödvändig för alla stånd (sjelfva Allmogen ej undantagen) genom den förmåga massan af medborgare dymedelst kunde vinna, att sjelf beräkna sin egendoms vidd, mäta sina landstycken, kontrollera sin rätt, och finna storleken af hvad föremål som helst, utan att behöfva slumpvis lita på andras utsago och deraf bero.[5]

---

1 Anders Alreik, *Theoret. praktisk lärobok i elementar-geometrien och plana trigonometrien. Till Landtmätares, Skol-Lärares samt den Studerande ungdomens m. fl. tjenst* (Stockholm: Hörbergska tryckeriet, 1837), Förord.

2 Henrik Falck, *Practisk lärobok i geometrien och trigonometrien med strängt bevis i läran om parallela linier* (Upsala: Palmblad, 1831), förord.

3 Ibid.

4 Carl Jonas Love Almqvist, *Lärobok i geometrien: innefattande grunderna för läran om linier, ytor (planimetri och landtmäteri), solida figurer (stereometri), samt deskriptiv geometri*, 3. uppl., öfversedd och tillökad utg. (Stockholm: Hörberg, 1842 [1833]), Företal.

5 Ibid.

Detta stycke kan jämföras med att Alreik knyter vikten av att kunna "uppmäta och beräkna sin jords innehåll" till det borgerliga livets åtskillnad mellan "Mitt och Ditt".[1] Jag kommer inte göra någon poäng av detta, men man tycks här i alla fall kunna se hur argumenten för matematiska studier vävs samman med mer övergripande samhällsfrågor. Mitt fokus ligger närmare undervisningen.

Flera av författarna till de läroböcker i geometri som står i fokus här tar upp frågor rörande undervisningen i sina förord. P. R. Bråkenhielm skriver att han "[g]enom en långvarig erfarenhet [är] bekant med följderna af de misstag, som i vårt Fädernesland äro alltför allmänna vid den första undervisningen uti Geometrien [...]".[2] Alreik talar liksom Almqvist om lärarens behov, "hvars inskränkta tid oftast ej tillåter att uppgöra nog många, varierande exempel m. m. för sina lärjungar", men att han också skrev för "Studerande i allmänhet, hvilka önska att på egen hand vinna någon öfning och färdighet i ifrågavarande kalkuler".[3] Det han menar saknas är

> en sådan theoret. praktisk Lärobok i nämnde delar af Mathematiken, deri Arithmetik och Algera jemväl vore på de geometriska storheterna använd, och som således innehöll såsom tillämpning af anförde nödiga theoretiska satser en någorlunda kärnfull och rikhaltig samling af öfnings-exempel för geometriska och trigonometriska beräkningar, hvarpå vi åter på vårt språk allt hitintills haft nära nog fullkomlig brist.[4]

Ett förenande drag i dessa ståndpunkter är deras mer eller mindre explicita kritik mot Euklides *Elementa*. Falck är tydlig i det han skriver:

> Huru föga Euklides *Elementa*, som i snart ett sekel hos oss varit nybegynnarens nästan enda Geometriska lärobok, kunnat, såsom i helt annan syftning författade, motsvara ofvannämnde lika sjelfklara som alltid lika oafvisligt återkommmande fordringar, är för hvar och en synbart, om ock med aldrig så stor benägenhet att prisa nämnde arbete för bevisens logiska stränghet och conseqvenz [...][5]

Han konstaterar att ett flertal böcker redan författats med ambitionen att ersätta Euklides, och hoppas att hans själv skall ha kunnat "undvika sina föregångares brister".[6] Att han inser att ersättandet av Euklides *Elementa* med andra läroböcker knappast kan antas gå särskilt snabbt framgår av att han likväl i slutet av sin bok införd en jämförelse mellan de bevis han presenterar i sin bok och de som finns Euklides *Elementa*. Han skriver att den som så önskar kan använda de euklidiska bevisen, men att man "endast vid de *första* grunderna bör undandraga sig den lilla mödan att äfven lära sig det förbättrade bevisningssystemet".[7] Almqvist förklarar i förordet till sin geometri att "direktionen öfver Nya Elementarskola funnit Euklides *Elementa* mindre tjenliga att nyttjas vid första undervisningen i geometri för barn emellan tio och tretton år [...]", och att det är av denna anledning som han fått i uppdrag att författa en ny lärobok i geometri.[8]

Den praktiska vägen mot geometrin

I och med att inget av de försök som vid denna tid gjordes att ersätta Euklides *Elementa* fick något större genomslag, får redogörelsen här en liten annan inriktning än de ovanstående, i vilka jag hela tiden fokuserade på de förändringar av läroböckerna som fick störst betydelse för den svenska skolmatematikens fortsatta utveckling. Här kommer jag istället endast översiktligt beskriva några av de försök som gjordes, för att visa hur de speglade författarnas respektive ambitioner. Denna redogörelse har om inte annat ett värde som historisk bakgrund till den kritik som i omgångar skulle riktas med Euklides under hela återstoden av 1800-talet samt under första halvan av 1900-talet. Jag skall här säga något om Henrik Falcks, Anders Alreiks och Almqvists respektive läroböcker i geometri.

---

1 Alreik, *Theoret. praktisk lärobok i elementar-geometrien och plana trigonometrien. Till Landtmätares, Skol-Lärares samt den Studerande ungdomens m. fl. tjenst*, Förord.
2 Per Reinhold Bråkenhielm och Euklides, *De sex första samt elfte och tolfte böckerna af Euclidis Elementa jemte planimetri, stereometri och geometriska problem* (Örebro: Lindh, 1844).
3 Alreik, *Theoret. praktisk lärobok i elementar-geometrien och plana trigonometrien. Till Landtmätares, Skol-Lärares samt den Studerande ungdomens m. fl. tjenst*, Förord.
4 Ibid.
5 Falck, *Practisk lärobok i geometrien och trigonometrien*, Förord.
6 Ibid.
7 Ibid.
8 Almqvist, *Lärobok i geometrien: innefattande grunderna för läran om linier, ytor (planimetri och landtmäteri), solida figurer (stereometri), samt deskriptiv geometri*, Företal.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Henrik Falcks ambition var uppenbarligen att ersätta Euklides *Elementa*. Falck har till och med delat in sin lärobok i tre "böcker", den första utan annan titel än "Första boken", den andra med undertiteln "Om liniers, Vinklars och Plana Figurrs Förhålande och Delning, jämte Plana Trigonometrien", den tredje med undertiteln "Om storheter med både Längd, Bredd och Högd eller Stereometrien". Falcks bok kan förenklat beskrivas som ett försök att ge de delar av den matematiska vetenskapen som knöt an till geometri – i en allmän bemärkelse – en form som passade den typ av undervisning vilken då kretsade kring Euklides *Elementa*. Han börjar med "Definitioner", och framställningen är sedan strukturerad kring "Problem" med åtföljande "Upplösningar". Karaktäristiskt i jämförelse med de två andra läroböckerna jag tar upp här (Alreiks och Almqvists) är Falcks närhet till den matematiska vetenskapen – genom sina tre böcker sträcker sig hans framställning i en matematisk mening längre än de övriga två, något som säkert kan knytas till att Falck var adjunkt vid Uppsala universitet.

Alreiks bok är, till skillnad från de flesta andra samtida läroböcker i matematik, "realistisk" i samma bemärkelse som de äldre räknelärorna. Detta hänger samman med att Alreik var lärare vid kungliga lantmäterikontoret. Hans bok är i princip en lärobok i lantmäteri. Den tycks inte ha fått någon större spridning utanför den institution inom vilken den var författad, och 1843 har boken bytt titel till det mer specifika *Theret. praktisk lärobok i landtmäteriet*.[1] Alreik befinner sig nära lantmäteriets praktik, vilken han tycks ha personlig erfarenhet av. Följande exempel är typiskt:

> Probl. På fältet äro tre otillgänglige objekter A, B och C, hvilka bilda en gifven triangel, eller tre punkter A, B, C äro på en karta rätt upptagne, samt afstånden dem emellan AB, BC, AC bekanta, och ifrån en fjerde punkt D äro dessa objekter synliga, hvarifrån på taflan vinklar kunna dem emellan uppmätas, nemligen emellan A och C=m, samt mellan C och B=n; att då utan vidare mätning på kartan bestämma läget för punkten D, äfvensom afstånden DA, DB och DC.
>
> Första sättet (Fig. 84,85).
>
> 1) Uppställ taflan öfver punkten D, och nedstick i punkten A en nål, samt för diopterlinialen derintill, syfta till objektet A på fältet, och uppdrag syftlinien AD tillbaka (43). Nedstick derefter nålen i C, för diopterlinialen derintill, syfta till objektet C på fältet, och uppdrag likaledes syftlinien CD tillbaka.
>
> 2) BEskrif omkring sidan AC en cirkel AFCD, så att AC blifver korda till ett segment AFC, som i sig innefattar en vinkel, som är dubbelt så stor som vinkeln m, hvilken de ifrån A och C uppdragne syftlinier utgöra (69).
>
> 3) Syfta sedermera på samma sätt till objektet B på fältet, och beskrif omkring sidan BC en cirkel BGCD, hvari segmentet BGC likaledes innehåller en vinkel, som är dubbelt så stor som vinkeln n, vilken de båda ifrån B och C dragna syftlinier utgöra.
>
> 4) Dessa cirklar skära då hvarandra i punkten D, som sålunda blifver den sökta och rätta stationspunkten, äfvensom AD, CD och BD utgöra enligt skalan afstånden emellan station och de gifna objekterne A, B, C.
>
> [...][2]

Jag har här inte citerat hela exemplet, vilket sträcker sig över flera sidor. Alreik tar i sin bok stor hänsyn till lantmäteriets praktiska detaljer, vilket gör att matematiken i egenskap av teori får en relativt underordnad roll. Han konstituerar, liksom räknelärorna, matematiken som en samling tekniker. Han visar hur dessa tekniker kan användas på bästa sätt för att lösa de problem som faktiskt behöver lösas. Han anpassar kan man säga matematiken till lantmäteriets praktiska omständigheter. Typiskt för denna inriktning är att han ägnar stort utrymme åt logaritmer,[3] och att han inte tycks ta någon notis om den uppdelning av matematiken i "ämnen" (geometri, aritmetik och algebra) som vid denna tid blivit gängse inom lärobokslitteraturen. Alreik framställde tvärtom stora delar av den matematiska vetenskapen som om den vore en sorts lantmäteriets räknekonst.

[1] Anders Alreik, *Theoret. praktisk lärobok i landtmäteriet. Till Landtmätares, lantbrukares, juristers och kameralisters m. fl. tjenst* (Stockholm: Hörbergska tryckeriet, 1843).
[2] Alreik, *Theoret. praktisk lärobok i elementar-geometrien och plana trigonometrien. Till Landtmätares, Skol-Lärares samt den Studerande ungdomens m. fl. tjenst*, [sida?].
[3] Ibid., 135.

Almqvist behandling av geometrin, slutligen, kan ses som ett försök att göra praktisk lärobok av Euklides *Elementa*. Praktisk i dubbel bemärkelse – både som lärobok att praktiskt arbeta *med*, och som lärobok med syfte att bibringa lärjungarna praktiskt användbara kunskaper – två aspekter vilka, som jag visat ovan, ganska mycket flöt samman i 1830-talets syn på matematiska kunskaper. Almqvist var som sagt rektor på Nya Elementarskolan i Stockholm, och till skillnad från Falcks och Alreiks böcker var Almqvists *Lärobok i geometrien* elementär vad gäller det matematiska innehållet. Följande kan tas som exempel på hur Alqvist på ett plan bevarat Euklides form, men på ett annat plan givit denna form ett helt nytt "praktiskt" innehåll:

> 11. Problem. Att vid en gifven punkt på en gifven rät linie göra en vinkel af ett visst gradtal.
>
> Låt A vara den gifna punkten och AB den gifna räta linien. Det begäres, attvid punkten A på linien AB, göra en vinkel af ett visst gradtal. Tag transportören eller gradskifvan och lägg dess diameter utefter AB, så att medelpunkten kommer vid A. Afsätt nu på gradskifvan så många grader, som man vil att vinkeln skall hafva, och drag en linie ifrån A till punkten C, som på instrumentet utmärker det ifrågavarande gradtalet. Då är BAC den begärda vinkeln.
>
> Vill man göra en rät vinkel, så är det detsamma som att på gradskifvan afsätta 90° (enl. I-10).[1]

I förordet till sin bok talar Almqvist om geometrins stora praktiska nytta, men det är uppenbarligen inte den euklidiska geometrin han syftar på, utan något annat. Hans bok visar om någon hur svårt det är att knyta någon specifik innebörd till ordet "geometri". Utgår man från Euklides framstår den stringenta och deduktiva uppbyggnaden som geometrins främsta kännetecken. Alqmvists presenterar tvärtom geometrin som en praktisk konst, där Euklides form – "problem" följda av "upplösningar" – fått en helt ny innebörd.

Av flera anledningar kan man dra en parallell mellan hur Celsius i sin *Arithmetik eller Räkne-Konst* så att säga "matematiserade" Agrelius *Institutiones Arithmetica* och hur Almqvist gör "mätkonst" av Euklides *Elementa* i sin *Geometri för begynnare*.[2] Det intressanta, och förbluffande, är att både Celsius och Almqvst använde Christian Wolffs *Auszug Aus den Anfangs-Grunden Aller Mathematischen Wissenschafften* som utgångspunkt för sina respektive läroboksförsök.[3] Märkligt nog ville nämligen direktionen på Nya Elementarskolan att deras nya lärobok i geometri skulle baseras på Wolffs vid denna tidpunkt drygt 100 år gamla arbete.[4]

Som sagt fick inte något av dessa läroboksförsök något större genomslag. Euklides *Elementa* låg fast som utgångspunkt för läroverkets studier i geometri. Samtidigt, det vill säga under första halvan av 1800-talet, tog emellertid ett nytt matematiskt "ämne" med anknytning till geometri plats i Sverige – linearteckningen. Detta ämne hade vissa likheter med den geometriska mätningskonst som Almqvist ville förmedla i sin geometrilärobok. Linearteckningen får ett eget avsnitt i nästa kapitel, eftersom detta ämne i så hög utsträckning måste förstås mot bakgrund av inflytandet från Tyskland och schweizaren Henrich Pestalozzi. Om denna linearteckning – vilken i praktiken bestod i att lärjungarna fick lära sig *teckna, benämna och känna igen* den euklidiska geometrins figurr, dock utan att lära sig några *bevis* – tas med i beräkningen, går det emellertid lätt att göra en analys på geometrins område, som motsvarar den jag gjorde ovan i anslutning till min redogörelse för aritmetiken och algebran. Linearteckningen kom nämligen att presenteras som vägen mot ett riktigt "skådande" av den fysiska verkligheten. P. A. Siljeström, en av den svenska skolmatematikens förgrundsfigurr under andra halvan av 1800-talet, skriver i en recension av en lärobok i geometri följande:

> Geometrien ger nybörjaren i alla fall tillräcklig öfning för tanken; och jemte tanken öfvar den äfven handlaget, ögonmåttet, iakttagelseförmågan och inbillningskraften. Man lär sig att med uppmärksamhet betrakta de yttre tingen, uppfatta deras former och kännetecken, upptäcka likheter och olikheter samt med noggrannhet och tydlighet uttrycka i ord, hvad man förnummit.[5]

---

[1] Almqvist, *Lärobok i geometrien: innefattande grunderna för läran om linier, ytor (planimetri och landtmäteri), solida figurer (stereometri), samt deskriptiv geometri*, 16.
[2] Agrelius, *Institutiones arithmeticae*. Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-Konst*. Strömer, *De Sex Första Böckerna Af Euklidis Elementa, eller grundeliga inledning til geometrien*. Almqvist, *Lärobok i geometrien*.
[3] Wolff, *Auszug aus den Anfangs-Gründen aller Mathematischen Wissenschafften: zu bequemerem gebrauche der Anfänger auf Begehren verfertiget*.
[4] Se Almqvist, *Lärobok i geometrien*, förord.
[5] Pehr Adam Siljeström, "Geometri för nybegynnare, af P. N. Ekman, Lektor i Matematiken vid Wexjö Gymnasium," *Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1846).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Här är det givetvis oerhört väsentligt att man vet att den "geometri" han syftar på är just den lineartecknigens geometri från vilken bevisen uteslutits. Det krävs ingen djupare analys för att se hur geometrin här får bestämma vad verkligheten *är*. Man lär sig uppfatta och benämna, men det man lär sig är givetvis att se verkligheten så som den framstår med utgångspunkt från geometrin. Lineartecknigens praktiska arbete blir därmed ett arbete med "verkligheten". Och den euklidiska geometri blir ett arbete med denna versklighets grund eller essens.

Mer allmänt kunde därmed aritmetiken och lineartecknigen blir "arbetets" – eller mer exakt "arbetarnas" – skolmatematik, vilken fick matematiken att framstå som om den handlade om praktiskt arbete, och detta praktiska arbete att framstå som om det utgick från matematiska principer. I en hierarkisk mening över aritmetiken och lineartecknigen kunde sedan algebran och geometrin framstå som läran om just dessa, det praktiska arbetets principer, vilka lärjungarna i läroverket, genom sitt "intellektuella" arbete med algebrans och geometrins "praktiska" uppgifter, lärde sig behärska.

5.3. Analys

Låt mig förklara hur den syn på matematiska studier som jag beskrivit i det här kapitlet, måste förstås mot bakgrund både av räknekonsten (kapitel 2), matematiken (kapitel 3) och de förändringar som blev resultatet av de matematiska studiernas funktion inom kungliga krigsakademin på Karlberg (kapitel 4).

Räknelärorna och räknekonsten utgjorde den självklara utgångspunkten för undervisningen i aritmetik. Räknelärornas beskrivningar av aritmetikens grundläggande algoritmer känns lätt igen bakom de nya räkneböckernas schematiskt uppställda regler. Liksom i räknelärorna pekade undervisningen i aritmetik fram mot Regula-de-Trins tillämpningar. Det fält från vilka aritmetikens tillämpningar hämtades hade i läroböckerna anpassade för undervisningen vid krigsakademin i någon mån förskjutits från det "borgerliga livet" mot teknik och naturvetenskap. I och med att undervisningen nu (på 1830-talet) skulle syfta till "medborgerlig bildning" hamnad åter frågor kring ekonomi i handel i fokus – helt i linje med de äldre räknelärornas framställningar. De många förändringarna till trots kan läroböckerna i aritmetik fortfarande vid denna tid betraktas som modifierade räkneläror.

Undervisningen under 1830-talet syftade dock inte till att förmedla räknekonsten på samma sätt som räknelärorna. I räknelärorna presenterades räknekonsten som ett instrumentell användbart redskap för att besvara det "borgerliga livets" många räknefrågor. För att behärska detta redskap krävdes övning, för att fästa regler och tabeller i minnet, och lära sig använda dem på ett effektivt sätt. Av redogörelsen ovan framgår att man under 1830-talet, på ett annat sätt än i räknelärorna, menade att undervisningen skulle leda fram till praktiskt användbara kunskaper i matematik. Här syns ett tydligt inflytande från den matematiska diskurs som jag beskrev i kapitel 3. Tydligt är nämligen att matematiken – i egenskap av abstrakt teori – finns närvarande i diskussionen. Snarare än att betrakta räknekonsten som ett redskap "externt" i förhållande till den som använde det, menade man att undervisningen skulle leda till "matematiska kunskaper", vilka sedan – när de väl tagit form – skulle vara praktiskt användbara. Skillnaden kan tyckas subtil, men den är högst väsentlig. Den fick till konsekvens att de uppgifter eleverna arbetade med inte nödvändigtvis behövde vara "realistiska" på samma sätt som räknelärornas exempel. Deras syfte var nämligen inte att exemplifiera exakt hur en viss teknik kunde användas, utan att *illustrera* den abstrakta matematikens praktiska tillämpning. Elevernas arbete antog därmed formen av en sorts "simulering" av praktiskt räknande utanför skolan. Tillämpningarna skulle få eleverna att förstå inte minst *att matematiken var tillämplig* – för att med denna insikt som utgångspunkt manas att använda de abstrakta matematiska kunskaper de fick sig tillgoda i undervisningen.

Viktigt jämfört med situationen kring mitten av 1700-talet är att undervisning nu antagit tydligare och mer enhetliga former. I motsats till räknekonstens beskrivningar av praktiskt räknande, och det tidiga 1700-talets framställningar av den abstrakta matematiska vetenskapen, hade läroböckerna nu fått en utformning som innebar att de kraftigt bidrog till att strukturera själva undervisningspraktiken. Som vi såg i förra kapitlet spelade undervisningen vid krigsakademin på Karlberg en viktig roll för denna förändringsprocess. De flesta av de läroböcker jag beskrivit i det här kapitlet var utformade för att användas i tämligen specifika undervisningspraktiker, vars karaktäristiska drag var att eleverna i stor utsträckning ägnade sig åt att lösa räkneuppgifter – antingen själva, eller under en lärares (eller som jag skall berätta om i nästa kapitel, någon annan elevs) ledning.

Som jag påpekat ovan, i avslutningarna av de tre avsnitten om aritmetik, algebra och geometri, kan man i de undervisningspraktiker som nu tagit form, se en begynnande tendens till produktionen och utsträckandet av en matematisk blick, det vill säga en bild av den fysiska och sociala verkligheten förankrad i skolmatematiken i egenskap av social institution. Idén att undervisningen skulle syfta till praktiskt användbara kunskaper i matematik, ledde till att böckerna fylldes med illustrationer av matematikens praktiska tillämpning. Man kunde – vilket också var syftet – i uppgifterna "se" hur matematiken var ständigt närvarande i både den fysiska och sociala verkligheten. Samtidigt presenterades aldrig någon sammanhängande bild av själva matematiken – i egenskap av abstrakt vetenskaplig system. Matematiken konstituerades just som "där ute" – sammanvävd med verkligheten.

Väsentligt är att den bild som därmed konstituerades hade en tydlig hierarkisk struktur. Något förenklat kan man säga att undervisningen i aritmetik konstituerade aritmetiken som ett praktiskt användbart redskap, samtidigt som undervisningen i geometri (i Almqvists praktiska mening) förmedlade en bild av verkligheten som till sin essens geometrisk. Undervisningens budskap var att praktiskt handhavande av verkligheten involverade och krävde praktiskt användbara kunskaper i aritmetik och geometri. Algebra respektive euklidisk geometri konstituerades tvärtom som redskap för teoretiskt behärskande av verkligheten. Algebran gjordes till aritmetikens teori, med vars hjälp aritmetikens regler och tekniker kunde sättas in i ett övergripande systematiskt sammanhang. I den euklidiska geometrin visades hur de termer och tekniker som man fått öva på i den mer grundläggande undervisningen, kunde sättas samman till ett (som det framstod då) koherent deduktivt system. Algebran och geometrin kom att representera den teoretiska sanningen om den praktiska verklighet som konstituerades genom undervisningen i aritmetik och praktisk geometri. Man kan därmed säga att matematiken som helhet konstituerades som ett i sig själv hierarkiskt objekt, som bidrog till att ge legitimerande stöd åt en hierarkisk social verklighet. Något jag skall återkomma till i samband med min redogörelse för 1900-talet är hur denna hierarkiska struktur var huvudsakligen dikotom – där aritmetik och praktiskt geometri kontrasterade mot algebra och euklidisk geometri – på ett sätt som motsvarande den dikotoma strukturen hos dåtidens offentliga skola, där gränsen var tämligen skarp mellan läroverk och folkskola.

Avslutningsvis vill jag dock upprepa att matematiken, vid den tidpunkt som stått i fokus här, det vill säga 1830-talet och början av 1840-talet, ännu spelade en helt perifer roll i det svenska samhället. Matematiken var, detta är viktigt att komma ihåg, inget tema i debatten angående realbildningen. Man var överens om att det var fel att (för att nu förenkla något) latinet fick så stort utrymme i läroverket. Man vill att något annat skulle ta plats i latinets ställe. Ytterst få tycks de ha varit som i offentliga sammanhang argumenterade för att just matematiken skulle få en central plats i den offentliga skolan. Vad jag berättat om i det här kapitlet skall förstås som en början – där matematiska studier flyttar in i nya sammanhang, de som ägnar sig åt undervisning i matematik börjar tala om matematiken och undervisningen på ett nytt sätt, samtidigt som matematikens blick både får en tydligare struktur och successivt börjar utsträckas till en större del av samhället.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

6. Matematik för folket

Det här kapitlet handlar om hur matematik, i Sverige, under 1800-talets första decennier, gjordes till ett skolämne för barn. Räknelärorna var, som jag visade i kapitel 2, böcker författade för vuxna – även om ett av deras användningsområden var som utgångspunkt för undervisning av ungdomar. I beskrivningarna av de böcker om matematik, publicerade kring mitten av 1700-talet, som stod i fokus för kapitel 3, talades däremot ofta om ungdomar.[1] Från 1700-talets andra hälft kan man följa en process där dessa ungdomar blir allt yngre (eller åtminstone allt mer behandlades som unga), vilket utgör en av flera sammanhängande förklaringar till den transformation läroböckerna och undervisningspraktiken genomgick under denna tid. Den undervisning och det tänkande kring undervisning som står i fokus för det här kapitlet kan i en mening betraktas som en radikalisering av denna process. Av flera anledningar måste den dock samtidigt betraktas som något väsentligen annat än ytterligare ett steg i den långa rörelse genom vilken de som ägnar sig åt matematiska studier blir allt yngre (samtidigt som de blir fler). Det var nämligen inte bara barnens låga ålder som satte sin prägel på den undervisning jag skall beskriva i det här kapitlet. Lika viktigt – om inte viktigare – var att dessa barnen tillhörde "folket", vilket satte ny ramar inte bara för undervisningens praktiska utformning, utan desto viktigare för dess *mål*. I tidigare kapitel har jag visat hur de matematiska studierna i en följd av steg anpassats till undervisningens praktiska villkor och de funktioner studierna skulle fylla som delar av ett institutionellt sammanhang. Konsekvenserna av att de matematiska studierna anpassades till vad man tillspetsat kan kalla *folkets barn* var så genomgripande att det är befogat att betrakta dem som ett tredje "ursprung" till den svenska skolmatematiken, vid sidan om räknekonsten och matematiken. Det var i detta skede av skolmatematikens historia som grunden lades för det tänkande kring barnet och matematiken som idag utgör en central utgångspunkt inom det matematikdidaktiska forskningsfältet. Här tog idén om nödvändigheten av matematikens anpassning till barnet, liksom idén om formandet av "talbegrepp" plats på den skolmatematiska scenen.

Låt mig inleda detta kapitel med att ge en kort resumé av vad jag sagt om skolmatematikens utveckling fram till början av 1800-talet. Jag började med räknelärorna. De var en typ av böcker vars disposition och innehåll i stor utsträckning tog form före "den vetenskapliga revolutionen" under 1600-talet, då matematiken fick sin vetenskapliga status. De framställde matematiken som en räknekonst – en mångfacetterad uppsättning tekniker för att besvara de frågor som uppstod inom det borgerliga livet. Framför allt innehöll räknelärorna en mängd olika tillämpningar av Regula de Tri, anpassade till det borgerliga livets (samtida eller möjligen förflutna) yrkespraktiker.

Räknelärorna mötte under början av 1700-talet den då "vetenskapliga" matematiken, vilken tagit form utanför Sverige. Denna matematik var i motsats till räknekonsten ett objekt som man talade om, och som tillmättes en mängd (positiva) egenskaper. Som ett resultat av detta möte föddes en ny sorts modifierade, "matematiserade", räkneläror, tillsammans med läroböcker i det nya ämnet algebra, och översättningar av Euklides *Elementa*. I de nya läroböckerna hade den vetenskapliga matematiken placerats i centrum, snarare än det borgerliga livets frågor. Böckerna syftade till att visa hur denna matematik kunde vara till nytta. Ett andra mål som fick större betydelse vid denna tid var dessutom att låta matematiken så att säga "verka" på den unge lärjungen. Arbete med matematik skulle, menade man, befrämja så väl förmågan att dra riktiga slutsatser, som förmågan att fatta moraliskt riktiga beslut.

Från och med 1700-talets andra hälft kan man se hur överväganden rörande lärjungen och undervisningen fick allt större betydelse vid utformandet av läroböcker i matematik. I och med detta avskiljdes ett särskilt "skolmatematiskt" stoff, speciellt avpassat för att ligga till grund för undervisning i grundläggande matematik. Detta stoff fick allt tydligare gränser i förhållande till såväl den matematiska vetenskapen som det praktiska (borgerliga) livet. Som en del av denna process delades matematiken upp i allt mer tydligt avgränsade "ämnen", vad gäller de mest grundläggande studierna: aritmetik, algebra och geometri. Dessa antog formen av "kurser", anpassade till institutionaliserade examina.

[1] Till exempel i titeln till Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-Konst*.

Kring sekelskiftet 1800 fick *övningsuppgifter* allt större utrymme i läroböckerna. Matematiken blev något man arbetade med praktiskt. Detta arbete var något som skedde i skolan, och läroböckerna blev allt tydligare utformade för att strukturera detta arbete. Matematiken i egenskap av undervisningsstoff fick karaktär av "väg" för eleverna att röra sig längst.

Från och med slutet av 1700-talet började man argumentera explicit för vikten av att såväl matematisk teori, som matematikens "tillämpningar", var ständigt närvarande i lärjungarnas arbete. Man menade att de matematiska kunskaperna bara kunde bli praktiska, i den mån även det arbete som ledde fram till dessa kunskaper var "praktiskt". Samtidigt som banden mellan det matematiska stoff lärjungarna tog sig an i skolorna, och det praktiska räknande som ägde rum inom andra samhällssfärer, i stor utsträckning hade klippts av, försökte man nu återknyta skolan till samhället utanför skolan – fast på ett nytt sätt. De matematiska studierna skulle nu vara en sorts "simulering" av livet utanför skolan. Det borgerliga liv som räknelärorna beskrev i löpande text och med hjälp av kommenterade exempel och tabeller, hade nu flyttat in i skolan och gjorts till föremål för ett sorts pseudo-arbete, där såväl den vetenskapliga matematiken som det praktiska livet utanför skolan hade strukturerats om med utgångspunkt från undervisningens villkor.

Nya tankar om uppfostran

Om jag i det förra kapitlet fokuserade på utvecklingslinjerna bakåt, mot den tidigare svenska skolmatematiken, skall jag här istället beskriva ny idéer som tog plats i diskussionen, och som pekar mot skolmatematikens framtid. Jag syftar här på två idékomplex som jag här förenklat kommer att tala om i termer som "växelundervisningssystemet" respektive "bildningstänkandet".

Växelundervisningssystemet importerades till Sverige från England, där de två britterna Andrew Bell och Joseph Lancaster, relativt oberoende av varandra, givit det en konkret utformning. Systemets viktigaste särdrag var att barnen i stor utsträckning undervisade varandra, snarare än att alla undervisades av en vuxen lärare. Detta möjliggjordes genom att undervisningen var organiserad enligt ett noga uttänkt system av ordningsregler, kombinerade med reglementen för såväl belöningar för studieflit som bestraffningar för olika typer av störande beteenden. De undervisande eleverna kallades *monitörer*, och varje monitör brukade ha något tiotal elever att undervisa i vad som kallades en *cirkel* eller en *klass*. Studierna inom varje ämne delades in i en hierarkiskt ordnad mängd av sådana klasser. Vad gäller räkning förekom i vissa varianter 12 klasser i andra så mycket som 23 klasser. Mellan dessa klasser flyttades eleverna individuellt. Undervisningen gick till så att en monitör, med utgångspunkt från en tabell, eller i vissa fall en bok, läste upp frågor till barnen i cirkeln. Enligt en noga reglerad ordning fick eleverna sedan försöka svara på frågorna, vilket resulterade i en sorts strukturerad dialog mellan monitören och eleverna. Av denna dialog framgick vilka elever som behärskade stoffet (enligt de rådande kriterierna av "behärska", vilket åtminstone i vissa fall innebar att ha lärt sig svaren utantill). Denna kontinuerliga prestationsmätning utnyttjades inom växelundervisningssystemet för att individuellt flytta eleverna mellan de hierarkiskt ordnade klasserna. Praktiskt kunde detta gå till så att monitörerna noterade vilka elever som borde flyttas (uppåt eller nedåt), och den ensamme lärare som övervakade systemet verkställde dessa flyttar under sina regelbundna "ronder" i undervisningslokalen. Man talade därför om *fri flyttning* som ytterligare ett av systemets särdrag.

Bildningstänkandet har sitt huvudsakliga ursprung i Tyskland, men vad gäller utbildning, och i synnerhet den svenska skolmatematiken, kom det till Sverige i första hand genom schweizaren Heinrich Pestalozzi. Det implicerade inte en praktiskt ordning på samma detaljerade sätt som växelundervisningssystemet. Dess särdrag befann sig istället på idéernas plan. Nyckelordet var *bildning*. Man menade att barnundervisningens högsta mål inte borde vara att förmedla "kunskaper" till barnen, till exempel genom att låta dem läsa i böcker eller låta dem lyssna på en berättande eller förklarande lärare. Istället borde målet vara att få deras inneboende förmågor att utvecklas på ett bra sätt, kort sagt att man skulle göra dem till bra människor. Detta tänkesätt förenade man emellertid med en rad föreställningar om vad som utgjorde den bra människans kännetecknande drag, och hur dessa drag kunde *bildas*. Dessa föreställningar hängde samman i vad som kan kallas ett trossystem eller en metafysik, i vilket människan, naturen, Gud och matematiken ställdes i en alldeles särskild relation till varandra. Slutligen kan sägas att ett av bildningstänkandets kännetecknande drag är övertygelsen om att människan kan bildas bara genom att hennes undervisning ordnas enligt en riktig *metod*.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Dessa två idékomplex fick växande betydelse i Sverige från och med 1820-talet, då intresset för frågan om anordnande av offentlig folkundervisning blev mer livligt.[1] Blickar vändes mot England och Tyskland för att utröna vilka av de två metoderna som skulle passa bäst för svenska förhållanden. Frågan om hur de två idékomplexen sedan kom att bestämma utvecklingen av den svenska offentliga skolan i allmänhet, och skolmatematikens utveckling i synnerhet, är emellertid komplicerad.

En första komplicerande faktor utgörs av att frågan om folkundervisning inte kan skiljas från diskussionen rörande de realbildande ämnenas plats i läroverket. I båda dessa diskussioner hänvisade man till växelundervisningssystemet som en lämplig undervisningsmetod, och växelundervisning introducerades samtidigt i folkskolor, med sina syftesmål, och i skolor som Nya Elementarskolan i Stockholm, som tvärtom var förknippade med reformsträvanden knutna till läroverket. Detta innebär att det inte går att knyta växelundervisningssystemet som sådant till något entydigt syfte, eller till undervisning riktad till något särskilt socialt skikt. I Sverige utformades tvärtom en mängd olika växelundervisningssystem, vart och ett med sina respektive särdrag.

En andra komplicerande faktor är att växelundervisningssystemet förändrades under sin resa till Sverige – i inte obetydligt utsträckning under inflytande av bildningstänkandet. Om växelundervisningssystemet var specifikt knutet till undervisning, och i synnerhet undervisning av *barn*, utgjorde Pestalozzis bildningstänkande en del av en ganska mångfacetterad tysk idétradition som hade ett stort *allmänt* inflytande i Sverige under merparten av 1800-talet. De växelundervisningssystem som utformades i Sverige var därmed inte "rena" importer från England, utan måste snarare förstås i termer av ett möte mellan å ena sidan det engelska och tyska, och å andra sidan specifikt svenska idémässiga och praktiska omständigheter.

En tredje komplicerande faktor är mer specifikt knuten till de respektive idékomplexens inflytande på den svenska skolmatematiken. Idéer som brukar förknippas med Pestalozzi kom nämligen så småningom att fullständigt omdefiniera skolmatematikens såväl mål som medel. Detta skedde dock inte förrän under 1900-talets första decennier, det vill säga ungefär 100 år efter den period som står i fokus här. I och med detta kan bildningstänkandet, vad gäller utvecklingen under 1800-talet, förstås som den punkt skolmatematiken så att säga rör sig mot. Till att börja med var emellertid inflytandet från växelundervisningssystemet så mycket mer påtagligt. De första svenska folkskolorna var växelundervisningsskolor, och de praktiska omständigheter för undervisningen som detta system implicerade, hade avgörande betydelse för det sätt på vilket bildningstänkandet så småningom kom att slå igenom. Samtidigt var – som sagt ovan – redan växelundervisningssystemet i betydande utsträckning influerat av bildningstänkandet.

Till saken hör slutligen att såväl bildningstänkandet som växelundervisningssystemet i ett sociologiskt perspektiv kan förstås som svar på liknande samhälleliga "problem", vilket gör de i sina praktiska konsekvenser faktiskt inte är alls så olika som de "diskursiva" skillnaderna ger sken av. Båda tar form i samhällen präglade av begynnande industrialisering och urbanisering. Som en aspekt av dessa fenomen började den sociala kategorin "arbetare" att ta form, och båda metoderna riktar sig mer eller mindre explicit, och mer eller mindre uteslutande, till dessa arbetares *barn*.

Förloppets komplexitet gör det nödvändigt att sätta ganska snäva gränser för min redogörelse. Jag kommer inte att redogöra för de respektive idéernas ursprung, och har inte heller någon ambition att ge en heltäckande bild av deras så att säga inre logik. Vad gäller växelundervisningssystemet kommer jag att utgå från en bok av filosofie magistern och skolläraren C. O. Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*, publicerad 1830.[2] Denna får i stor utsträckning exemplifiera växelundervisningssystemets särdrag, vilket innebär att jag i första hand kommer att fokusera på växelundervisning som metod för undervisning av "folket", samhällets lägre skikt. Lars Petterson skriver att den "kom att fungera som den viktigaste metodhandboken också efter folkskolestadgans tillkomst 1842".[3] Vad gäller bildningstänkandet kommer jag att i första hand utgå från två texter av Henrich Pestalozzi: *Hur Gertrud undervisar sina barn* (1801) och *Enslingens aftonstund* (1780).[4]

---

[1] Thor Nordin, *Växelundervisningens allmänna utveckling och dess utformning i Sverige till omkring 1830: The general development of the monitorial method and its form in Sweden to about 1830, Årsböcker i svensk undervisningshistoria, 53(1973); 130* (Stockholm: 1973), 228-29, not 5.

[2] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*.

[3] Lars Petterson, *Frihet, jämlikhet, egendom och Bentham* (Uppsala: Almqvist & Wiksell International, 1992), 293.

[4] Johann Heinrich Pestalozzi, *Enslingens aftonstund, Pedagogiska skrifter, 17* (Lund: Lindstedts univ.-bokh., 1901); Johann Heinrich Pestalozzi, *Lienhard och Gertrud: en bok för folket, Skrifter af uppfostringskonstens stormän; 5* (Göteborg: Wettergren & Kerber, 1890); Johann Heinrich Pestalozzi, Carl Adolph Agardh, och Magnus Bruzelius, *Pestalozzi's Elementar-böcker* (Lund: 1808); Johann Heinrich Pestalozzi och Otto Salomon, *Huru Gertrud undervisar sina barn: ett försök att gifva mödrarna ledning att sjelfva undervisa sina barn, i bref, Skrifter af uppfostringskonstens stormän; 8* (Göteborg: Wettergren & Kerber, 1895).

Inte heller kommer jag att beskriva de respektive idékomplexens allmänna idémässiga inflytande i Sverige, eller hur detta inflytande kan spåras i de transformationer av svenska undervisningspraktiker som ägde rum under 1800-talet. Analyser av dessa förlopp finns i Thor Nordins *Växelundervisningens allmänna utveckling och dess utformning i Sverige till omkring 1830* och Lars Pettersons *Frihet, jämlikhet, egendom och Bentham*.[1]

Jag utgår från skolmatematiken, och mitt syfte är att visa vilka konsekvenser växelundervisningssystemet respektive bildningstänkandet – framför allt på längre sikt – fick för den svenska skolmatematiken. Det handlar här inte om att påvisa praktiska förändringar som kan knytas till en viss plats eller en viss tidpunkt. Analysen kommer här att röra sig på ett ganska abstrakt plan, där jag fokuserar på det nya i de två idékomplexens sätt att tänka kring de matematiska studiernas mål och de medel med vars hjälp dessa mål ansågs kunna nås. Först tar jag upp ett antal avgörande likheter mellan de två tänkesätten, för att sedan redogöra för några fundamentala skillnader. Syftet är att ge en bild av den i stor utsträckning nya idémässiga rymd som den svenska skolmatematiken från mitten av 1800-talet kom att befinna sig inom.

6.1. Undervisningens mål

Man kan särskilja tre olika, men givetvis sammanhängande, likheter mellan växelundervisningssystemet respektive bildningstänkandet, rörande studiernas mål. *För det första* att barnen som skulle undervisas inte ansågs själva vara förmögna att avgöra mot vad undervisningen skulle syfta. Detta hänger givetvis samman med själva termen "barn", och åtminstone vad gäller matematiska studier är det just nu som denna term tar plats i diskussionen. Man kan kontrastera denna relation till undervisningens mottagare med den som kommer till uttryck i räknelärorna. Dessa böcker presenterade, kan man säga, räknekonsten som en möjlighet, ett sätt att besvara det borgerliga livets frågor, och det stod läsaren fritt att välja över huvud taget om, och mer specifikt vilka delar och hur noga denna räknekonst skulle studeras. I och för sig användes dessa böcker i undervisning, men böckerna uttrycker inte hur denna undervisning skall gå till. Böckerna placeras in i det sammanhang som undervisningen utgör, och representerar i detta sammanhang undervisningens mål, det stoff som eleverna skall behärska. De böcker i vilka såväl växelundervisningssystemet som bildningstänkandet kommer till uttryck, innehåller istället explicita beskrivningar av hur undervisningens mottagare skall förändras, och denna förändring rör inte minst deras föreställningar om vad de behöver.

För det andra finns en överensstämmelse rörande att undervisningens högsta mål är att barnen, genom undervisningen, skall fås att själva, av egen "fri" vilja, välja en viss uppsättning högre värden (som skiljer sig åt mellan de olika systemen). Det räcker alltså inte med att forma eleverna till någon sorts "mekanisk" anpassning. Målet är att åstadkomma en känslomässig identifikation med de värden som systemet förmedlar.

För det tredje finns en överensstämmelse rörande "kunskapernas", eller "kunskapsstoffets" behandling i undervisningen. Förenklat kan man säga att båda vill undvika att ett kunskapsstoff framträder för barnen som möjligt att reflektera kring. Barn skall kort sagt aldrig tänka: "detta skall jag lära mig". Istället skall de omärkligt *ledas* mot det som i växelundervisningssystemet framträder som större kunskaper, och som inom bildningstänkandet beskrivs som *bildning*.

Växelundervisningssystemet

Typiskt för växelundervisningssystemet är att dess mål explicit konstitueras som socialt bestämt. Växelundervisning, i synnerhet så som den framträder i relation till folkundervisning, var utformad för att positionera eleverna i en större social ordning. Detta innebär att de kunskaper som förmedlades explicit framställdes som begränsade. De var helt enkelt utformade för att stå i harmoni med den position eleverna genom växelundervisningssystemet skulle ledas mot. En följd av detta är att de kunskaper som förmedlades framställdes som mindre värdefulla än andra, möjliga kunskaper, som förmedlades genom andra undervisningssystem, utformade för andra elever.

Fineman inleder sin *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisningsmethoden* med att identifiera ett samtida problem, nämligen tendensen att "det sunda omdömes förvändes hos mängden", bort från "religiös hållning, sedlighet och sann upplysning", vilket enligt Fineman riskerar

[1] Petterson, *Frihet, jämlikhet, egendom och Bentham*.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

att medföra "djurisk förnedring" och "trottsande sjelfviskhet".[1] Han konstaterar sedan att denna tendens, "det af tidens kraf väckta frihetssinnet", inte låter sig dämpas med våldsamma metoder. Det är här som växelundervisningsmetoden kommer in. Den utgör ett sätt att "förekomma vådan, och gifva verksamheten en ändamålsenlig riktning".[2] Den skall låta själsförmögenheterna "välgörande utbilda sig", ett mål som inte kan skiljas från att "medvetande vinnas af frihetens och nödvändighetens samband såsom en *condition sine qua non* för allmänt och enskilt väl".[3] Växelundervisningsmetoden skall alltså undertrycka det väckta "frihetssinnet" genom att utbilda själsförmögenheterna på ett sådant sätt att "mängden" inser sambandet mellan frihet och tvång (nödvändighet). Detta skall vara undervisningens övergripande mål.

Här är det alltså uppenbarligen fråga om undervisning i disciplinerande syfte. Fineman beskriver emellertid inte folkskolans syfte som att hålla människor på mattan. Istället talar han om *frihet*, och han beskriver ganska exakt vad han menar med denna term. Närmare bestämt särskiljer han tre frihetsnivåer.

Den första nivån innebär *lydnad*. Eleverna är för detta ändamål "jämnt bevakade af Monitörerna, hvilka med sitt pligtmässiga allvar i början ersätta Läraren (Fadren – Lagen)". Man kan här se hur "egenviljan" hos eleverna visar sig "i kamp mot den fria (goda) viljan, den revolutionära (egoistiska) principen mot den evolutionlära". Här fordras "Lärarens stränga, allvarliga anlete" för att "hindra dess fientliga öfvervigt". På denna nivå är det väsentligt att eleverna med "fri bestämning underkasta sig, och sålunda vänjas vid den undergifvenhet, som nödvändigt fordras äfven för all sann mensklig ordning. Den inbördes ädla täflan, uttryckt genom ned och uppflyttningen, sätter dem därjämnte i nödvändighet att respektera andras rätt".[4] Här blir det tydligt att "fri" för Fineman inte i först hand – eller alls – har någonting att göra med, säg, möjligheter att realisera något slags personligt begär. Frihet är för något intimt sammanvävt med en religiös föreställning om att människan föds syndig, och behöver hjälp – socialt förmedlad hjälp – att frigöra sig från denna syndighet. Att lyda är därmed ett första steg bort från de individuella – och därmed nödvändigtvis syndiga – begären.

Den andra nivån beskriver Fineman i termer av "fri nödvändighet", pliktkänsla, dygd och hopp. Det handlar här om monitörernas position inom växelundervisningssystemet, det vill säga de elever som fungerar som ställföreträdande lärare. De har "vida mera, än Eleverna, tillfälle att pröfva sig sjelve, och lära känna så väl sina redan vunna stadga som sin svaghet, sina mer eller mindre vådliga anlag". Denna större frihet leder till "oegennyttigt nit" och väcker också "erkänslan af tacksamhet, emedan äldre kamrater på samma sätt varit och äro behjelplige att befordra deras eget fortgående till målet". Att eleverna har chansen att bli, och faktiskt *blir* monitörer, gör dem tacksamma och får dem att ta sig själva på allvar. Hela tiden inom växelundervisningen som system; befordran är i själva verket en form av belöning, som eleverna får tillkämpa sig och sedan vårda, med ständig risk att igen bli nedflyttade till elevens position.

Den tredje nivån utgör "nödvändig, d. v. s. verklig frihet". Detta är ordningsmännens roll.

> De behöfva, så vida Christlig frihet är det helas syfte, ej mera, såsom uti 1:sta Momentet, med lock eller hotande stränghet erinras om skyldigheternas kraf. Enfalden upphöjes till en medvetandet, samvetet och det inre sinnet vårdande oskuld (mens conscia veri, boni et recti), och lagens inneboende ande gör dem af hjertat lydagtige, samt tvingar till oegennyttig, stilla verksamhet för gemensamt bästa. De få en blick på det hela, hvarigenom sjelfva det mechaniska bestyret eller ledningen, hvilken till en stor del är dem uppdragen, *såsom vigtig erkännes* [min kursivering], samt med omsorg och nit verkställes.[5]

Fineman sammanfattar: målet är "Själsförmögenheternas fria utveckling", vilken "betingas och åstadkommes genom en ohämmad vexelsidig (organisk) verksamhet".[6] Sådan "fri" utveckling nås inte då människor lämnas åt sig själva. Synden, som är "revolutionär (excentrisk – desorienterande – egoistisk)" måste bekämpas och ersättas av "characters-fasthet"; skolan skall få barnen att utbilda ett "rättmätigt *jag* – en sann sjelfständighet eller personlighet". Detta mål är nått då hon "tillbedjande erkänner ett Högre *öfver* sig, samt är vaksam och väpnad mot det lägres retelser *under* sig".[7]

Jag citerade ovan Finemans inledande konstaterande att "det af tidens kraf väckta frihetssinnet" inte kan hanteras med "våldsamma metoder". Det är av denna anledning som man istället fångar in barnen (ibland bokstavligt talat) till just de människor som bär på det hotande frihetssinnet. Man bör lägga märke

[1] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*, s. vii-viii.
[2] Ibid., s. vi.
[3] Ibid.
[4] Ibid., s. xxix.
[5] Ibid., s. xxxi.
[6] Ibid., s. xxxii.
[7] Ibid., s. xxxiii.

till att det är fråga om ett ganska sofistikerat sätt att "förekomma vådan". Man nöjer sig inte med att fostra de blivande arbetarna till underkastelse. Målet är istället att de skall *känna sig fria*, och fritt *välja* just den underkastelse som de, om de fått en annan uppfostran, kanske skulle uppfattat som, säg, orättvis. Det system som Fineman målar upp tycks i det närmaste kunna användas som definition på *symboliskt våld*, så som bland andra Bourdieu förstår denna term.

Kunskap som ledtråd

I sin redogörelse för vilken typ av kunskaper han tänkt sig skall förmedlas i sin skola hänvisar Fineman till Geijers distinktion mellan "lärdas och olärdas" bildning. Han menar att denna skillnad å en sida är rent kvantitativ – de lärdas kunskapsomfång "kan aldrig blifva nog stort medan de olärdas "måste skarpt begränsas och i möjligaste mått inskränkas". Det finns emellertid också, menar Fineman, en annan skillnad, nämligen den att då man "på lärda banan måste gå abstraherande och urskiljande tillväga för att kuna systematiskt förena, och likasom uppenbara mångfalden i enheten; så bör den olärde städse vara enfalden trogen, hafva till syfte att kunna enande urskilja, och sålunda reda sig ur mångfaldens labyrinth".[1]

Eftersom växelundervisningens lärjungar är – och bör förbli – "olärda" skall de därför kort sagt få kunskaper *utan att behöva abstrahera*. De skall inte behöva lyftas, eller lyfta sig, över praktiken som de är en del av; undervisningen skall vara dem till *ledning*, den skall bli elevernas "*vade mecum*".[2] Lärokurserna måste "vara concreta, genetiskt förenande Theori och Practik, så att Lärjungen, utan genomgången abstractionsprocess, kan fatta det hela, oafbrutet likasom lefva i detsamma".[3]

Man kan notera hur nära denna tanke om teori förenad med praktik tycks ligger den syn på "praktiska kunskaper" som jag berättade om i det förra kapitlet. Det gemensamma draget är avlägsnandet av det diskursivt uttryckta budskapet – läsandet, lyssnandet – och därmed, hoppas man, lärjungarnas reflekterande verksamhet. Det är som om man ville förhindra att kunskaperna framträdde för dem som just kunskaper. Man vill, tycks det mig, undvika att eleverna får möta något som de själva inte behärskar, säg, en bok, utan istället omärkligt skall föras mot nytt kunnande.

Fineman ägnar några stycken åt att diskutera just böckernas roll i växelundervisningssystemet. I de engelska växelundervisningsskolor som utgjorde de svenska systemens förebilder, utgick undervisningen (skriver åtminstone Fineman) uteslutande från "tabeller". Detta är Fineman kritisk mot. Tabeller är bra, skriver han, för den "sinnliga åskådningen och (local)minnet", som "undervisningen alltid först måste vänta sig". Men när ytterligare något steg skall tas mot "ett lägre moment af en sann utveckling", vid "förståndets småningom inträdande urskiljning och inre sinnets vaknande fattning", då har *böcker* fördelar jämfört med tabellerna. De får kunskapsämnena att "framstå mera fullständigt utvecklade, och bättre i sin helhet sammanhållne", kunskaperna kan i denna form bättre "upptagas i Elevens sköte" och han kan sålunda "efter småningom vunnen uppmärksamhet på sig sjelf och saken, allt mera fattas af intresset att finna den rätta Ariadnestråden för sitt begär och sträfvande efter kunskap och vetande".[4]

Det är emellertid inte fråga om vilka böcker som helst. Fineman är kritisk mot de, som han skriver, "Encyclopedistiska så kallade Läseböcker, där allehanda af lärdom, vitterhet, abstracta moral- och fromhets-lexor är chaotiskt eller plockvis framkastadt", till upplysning för eleven. Nej, "likasom Catechesen begagnas som Läse- och Lärobok tillika; så böra äfven alla öfriga, i Folkscholan med skäl förekommande Läroämnen, vara i möjligaste mått gemensamma och deras Theori medelst Cursläsning förberedelsevis meddelas".[5] Vad Fineman säger är att det i växelundervisningsskolan bara skall förekomma ett fåtal böcker; dessa skall innehålla ett väl avgränsat stoff, och de skall läsas i "*Curser"*, vilket innebär att de inte skall ges åt eleverna att själva söka sig fram i – de skall läsas gemensamt, enligt en förutbestämd plan. Detta skapar ett medvetande hos eleverna om ett gemensamt mål, samtidigt som det underlättar för lärarna, som får ett begränsat stoff att överblicka.

Finemans resonemang sprider ljus över den utveckling av läroböckernas disposition och innehåll som jag beskrev i förra kapitlet – i synnerhet Almqvists matematikläroboksförfattarskap. Han skrev för Nya Elementarskolan i Stockholm (där han var rektor), som bildades bland annat för att pröva om växelundervisningsmetoden kunde användas för undervisning även i läroverket. Fördelen som han framhåller med sin bok är att den innehåller *både* regler och tabeller – vilket gör det möjligt att man i undervisningen inte

[1] Ibid., s. vii.
[2] Ibid., s. viii.
[3] Ibid.
[4] Ibid., s. xv.
[5] Ibid., s. xvi.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

behöver leta efter reglerna i någon särskild lärobok vid sidan av, förstår vi nu, de tabeller med tal att räkna som användes i växelundervisningen.

Bildningstänkandet

Karaktäristiskt för bildningstänkandet är att målet – *bildning* – inte som i Finemans växelundervisningssystem framstår som begränsat, utan tvärtom som ett idealt högre mål, inte för någon särskild klass, utan för hela mänskligheten. Barnen skall här inte ledas mot någon särskild social position. Istället talar man om att göra människorna *till människor*. Den bristfällighet som Fineman knyter till religiös förtappelse och, indirekt, för samhället farliga frihetstankar, knyts inom bildningstänkandet till människans (i och för sig religiösa) *natur*. Det ligger i människans natur, menar man, att ha något inom sig – en möjlig mänsklighet – och det är uppfostrans uppgift att göra denna möjliga människa verklig. Inom bildningstänkandet ser man inte förmedling av kunskaper som ett av uppfostrans mål. Förmedling av kunskaper bör, menar man, ersättas av bildning. Man menar att allt det en människa behöver, redan från början finns inom henne. Inte desto mindre skall givetvis barnen förändras. Men idén om bildning innebär att förändringen inte får några synliga gränser. Den pekar mot ett oändligt mål.

Som sagt ovan talar jag här om "bildningstänkandet" i en vid bemärkelse. Jag skall hämta illustrerande exempel i första hand från några texter av Pestalozzi, men jag tar även upp Fichtes *Tal til tyska nationen* och Fröbels *Människans fostran* för att sprida ytterligare ljus över de centrala idéerna.[1]

På ett liknande sätt som Fineman skriver Fichte att hans mål inte kan nås "genom strafftal till det redan försummade, uppvuxna släktet" utan "blott genom uppfostran av den ännu ofördärvade ungdomen".[2] Han skriver också:

> Målet är att lärjungen skall gripas av "en [så] brinnande kärlek för en dylik tingens ordning, att det för honom blir absolut omöjligt, när han sluppit uppfostrans ledning och blir självständigt placerad, att ej vilja denna ordning och ej av alla sina krafter arbeta för dess främjande [...]".[3]

Det finns uppenbara likheter mellan det Fichte och det Fineman skriver om uppfostrans mål, och det är inte otroligt (kanske till och med troligt?) att Fineman hade tagit del av Fichtes ståndpunkter. En skillnad ligger dock i att Fichte ville forma en helt ny sorts *människa* – och alltså inte som Fineman endast stävja oroande tendenser i samhällets lägre skikt.

Förmodligen efter att ha lyssnat på, eller på annat sätt tagit del av Fichtes tal, gjorde Carl Adolph Agardh och Magnus Bruzelius en översättning av Pestalozzis *Elementar-böcker*, vilken publicerades 1808.[4] De skriver redan i sin boks första mening att Pestalozzis metod är en "utvecklingsmetod" snarare än en metod för undervisning.[5] De hoppades att denna kunde användas för en behövlig "nationalundervisning", som skulle lyfta folket från ett allt mer utbrett fördärv. De skriver att

> Tidehwarfwets karakter är medwetandet af att wara nästan öfwer allt på willowägar, och famlandet i mörker efter rätta stigen. Filosofien är ett bilderspråk; Poesien lewer ej i Skaldernas sånger. Religionen har förswunnit tillika med öfwertygelsen om menskliga naturens högre wärde. Den fysiska kraften har domnat. De fordna Jättarne hafwa sammankrumpit till Dwergar och kunna ej lyfta sina Förfäders wapen. Menniskoslägtet känner att det är sjukt, och griper med begärlighet efter det af Charlatanen räckta botemedlet.[6]

Det handlar här alltså inte om att förmedla kunskaper i någon enkel bemärkelse. Agardh och Bruzelius menar nämligen att människor behöver väsentligen olika kunskaper, beroende på vad de gör, beroende på "stånd och klasser". En undervisning syftandes till kunskaper kan därför inte vara gemensam för hela det uppväxande släktet. Det kan däremot den metod de, genom Pestalozzi, förespråkar. Den kan bli en "national-underwisning". De skriver att dess mål är "upphöjandet af en blott möjligt menniska till en werklig", och vidare: "Barnet nyss framträdt i werlden har ej mer än möjligheten eller anlaget af mensklighet. Genom uppfostran skall detta anlag utbildas".[7]

---

[1] Johann Gottlieb Fichte, *Tal till tyska nationen* (Stockholm: Albert Bonniers förlag, 1914 [1807/1808]). Friedrich Fröbel och Jan-Erik Johansson, *Människans fostran* (Lund: Studentlitteratur, 1995).
[2] Fichte, *Tal till tyska nationen*, 111.
[3] Ibid., 35.
[4] Pestalozzi, Agardh, och Bruzelius, *Pestalozzi's Elementar-böcker*.
[5] Ibid., s. I.
[6] Ibid., s. 23.
[7] Ibid., s. 25.

För att ytterligare betona det storslagna i uppfostringsmetodernas mål vill jag igen citera Fichte. Genom uppfostran ville han införa "en art av människor, fullkomligt skild från de hittillsvarande vanliga människorna". Tanken var att människosläktet, genom att ta kontrollen över det uppväxande släktets fostran kunde så att säga "skapa sig själv". Han talade om detta i termer av "sig-själv-görande" (*sichselbstmachen* på tyska). Typiskt för bildningsdiskursen är att denna "nya" människa enkelt identifierades med att vara *människa*. Fichte skriver att målet är "att helt och hållet och fullständigt bilda hela människan till människa".[1] Att en viktig aspekt av detta synsätt alltså är att människor som inte blivit uppfostrade på rätt sätt inte är människor i ordets fulla bemärkelse är något jag skall återkomma till nedan.

Vad jag vill fästa uppmärksamheten på här är metodens stora anspråk. Det må vara tröttande, men igen vill jag påminna om räknelärornas ambition att visa hur man räknar. Här handlar det istället om att förändra människosläktet. Det är projekt inte helt olika detta som de matematiska studierna under 1800-talets lopp blir en del av.

Kunskap som fara

Inom bildningsdiskursen gick man på flera punkter längre i fråga om synen på kunskapernas värde än vad till exempel Fineman gjorde. Man gjorde en skarp skillnad mellan å ena sidan *bildning* som kommer inifrån, och å andra sidan "kunskaper" som man får sig till del till exempel genom att läsa en bok eller höra någon berätta. Pestalozzis grundsats är att allt som är av värde måste växa fram, och att uppfostrans uppgift är att skapa förutsättningar för detta växande. Han skriver: "Den, som icke är människa, den, hvars väsens inre krafter icke äro utdanade till sann mänsklighet, honom fattas den rätta grundvalen för utbildningen till lefnadskallet [...]".[2] En viktig tanke är med andra ord att man måste bli människa *först*, och att detta första steg är det självklart viktigaste.

Det kan noteras att Pestalozzi även mer specifikt distanserar sig i förhållande till "lärd" undervisning. Han skriver att han vill undvika att barnen skall bli "eländiga kraft- och åskådningslösa ord- och pratmänniskor".[3] Här kan man se en tydlig parallell till Finemans resonemang – "ord- och pratmänniskor" kan nog tänkas vara tämligen lagda även för "skryt och sjelfklokhet".[4] I följande citat är skillnaden väldigt tydlig mellan Pestalozzis ambitioner och mer praktiskt inriktade studier:

> Jag förnekar visserligen icke, att ej även en sådan metod [dvs en annan än Pestalozzis egen] kan frambringa goda skräddare, skomakare, köpmän och soldater, men jag bestrider, att den kan frambringa en skräddare eller en köpman, som är *människa* i ordets höga betydelse.[5]

Här framgår att undervisningens resultat, så som Pestalozzi förstår dem, inte kan så att säga "mätas" med utgångspunkt från hur väl eleverna senare lär sig behärska ett eller annat yrke. Det går nämligen utmärkt att behärska ett yrke, utan att vara människa – i det Pestalozzi förstår som ordets "höga" betydelse.[6]

Ett tydigt inflytande från dessa idéer syns i 1820-års skolordning. Den är proppfull med bildningsrelaterade idéer. Bland annat kan man läsa att "ändamålet med Uppfostran i allmänhet och Underwisningen i synnerhet, är utwecklingen af menniskans naturskrafter".[7] Undervisningen i läroverket skulle alltså inte leda till bibringande av (praktiskt nyttiga) kunskaper, utan den skulle leda till *bildning* av lärjungarna. Agardh och Bruzelius skriver, angående Pestalozzis metod, att:

> om werkliga kunskaper och färdigheter genom Pestalozziska methoden erhållas, är det endast tillfälligt, och en följd deraf, att öfning af en förmögenhet måste nödwändigt anwända sig på et föremål: att Pestalozziska methoden långt ifrån att wilja såsom hufwud-ändamål inplanta kunskaper i wanlig mening (främmande erfarenheter), endast wänjer lärlingen att sjelf igenom sig sjelf skaffa sig kunskaper, i deras högsta mening (egen sjelfförwärwad erfarenhet); och att i stället för att alla andra uppfostrings-methoder syfta att gifwa kryckor åt menskliga förmögenheterna, den Pestalozziska i synnerhet arbetar på att göra dessa kryckor onödiga.[8]

---

[1] Fichte, *Tal till tyska nationen*, 44.
[2] Pestalozzi, *Enslingens aftonstund*, 12.
[3] Pestalozzi och Salomon, *Huru Gertrud undervisar sina barn: ett försök att gifva mödrarna ledning att sjelfva undervisa sina barn, i bref*, 97.
[4] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*, s. xiii.
[5] Pestalozzi och Salomon, *Huru Gertrud undervisar sina barn: ett försök att gifva mödrarna ledning att sjelfva undervisa sina barn, i bref*, 107.
[6] Ibid.
[7] Kungl. Maj:t, *Kongl. maj:ts förnyade nådiga skol-ordning; gifwen Stockholms slott den 16. december 1820. Cum gratia & privilegio s:ae r:ae maj:tis. Stockholm, tryckt i kongl. tryckeriet, 1821* (Stockholm: 1821), 4.
[8] Pestalozzi, Agardh, och Bruzelius, *Pestalozzi's Elementar-böcker*, III-IIII.

Kunskaper framställs här som "kryckor", med andra ord en sorts hjälpmedel som man, med rätt uppfostran, kan klara sig utan. Väsentligt för Agardh och Bruzelius poäng är att kunskaperna är "främmande erfarenheter", och att det är därför de inte behövs. Tanken är att människan inom sig själv bär en potential till fulländning, och att det enda som behövs är en sorts ledning – en sorts själens näring – som gör det möjligt för denna potential att realiseras. Uppfostran behöver inte tillföra något – allt som behövs finns redan där.

Ett något mer alldagligt uttryck för samma tanke – att energi inte bör läggas på förmedling av "kunskaper och färdigheter" – är nedanstående citat från 1820 års skolordning, som följer efter en anvisning om att man bör gå långsamt fram i studierna:

> Att framstegen wid denna långsammare method i början synas små och ringa, skall framdeles ersättas genom redighet i begreppen och framför allt genom arbetswana och förmågan att öfwerwinna swårigheter. Man må i alla fall aldrig glömma, att hwad gossen wid 12 eller 15 års ålder hunnit lära, är af ringa wärde, betraktadt såsom kunskap. Det glömmes fort wid minsta afbrott i studierna. Det läres något senare på hälften eller fjerdedelen så lång tid, som dertil för nämnde ålder blifwit anwänd. Men betraktad såsom öfning för själskrafterne, är den första underqwisningen dyrbar, då den utvecklar förmågan, att fästa uppmärksamheten wid intellectuella föremål, upöfwat minnet, gifwit wana wid ihärdigt arbete och wäckt hågen för kunskaper genom ett slags erfarenhet af det nöje sjelfwerksamheten skänker hwarje rätt afpassad Läroöfning.[1]

Här sägs rakt ut att de kunskaper som förmedlats till ungdomarna i skolan är "af ringa wärde", och mer specifikt av lägre värde än den övning av "själskrafterne" som undervisningen istället borde fokusera på. I en artikel om Pestalozzi publicerad 1849 skriver man angående matematikundervisningen: "Aritmetiska reglor äro för räkning, hvad linial äro för teckning. Genom dessa medel kan man hvarken räkna eller teckna".[2] Citatet är karaktäristiskt för den svenska skolmatematiken vid denna tid. Pestalozzi argumenterar även för att merparten av de kunskaper som förmedlas i skolorna faktiskt är *onödiga*. Han skriver:

> Du har i din ställning i lifvet icke behof af alla sanningar. Området för det vetande, af hvilket hvarje människa efter sin andliga ståndpunkt och på sin plats skall kunna njuta sann tillfredsställelse och verklig välsignelse, omfattar att börja med allenast det, som är henne allra närmast, hennes eget väsen och närmaste förhållanden, vidgar därifrån ut sig, men vid hvarje utvidgning måste denna medelpunkt icke lämnas ur sikte, om det nya vetandet skall verka med hela sanningskraftens välsignelse.[3]

Man blir alltså inte tillfredsställd och inte välsignad av de spridda kunskaper som allmänt brukar förmedlas i skolorna. Sann tillfredsställelse når man istället genom ett fokus på det som ligger närmast, och ett långsamt utvidgande av kunskapernas omfång. Skolordningen ansluter sig till detta resonemang i anknytning till de matematiska studierna. Lärarna bör, skriver man, uppmärksamma

> orimligheten, att detta yrke skall blifwa hwarje Lärjunges hufwudsak. Blott ett grundligare studium af den del som läres, anses såsom det enda bildande medel till winnande af sådane färdigheter, hwilka alltid och allestädes gagna sina ägare, samt äro uti alla stånd och wilkor anwändbare, men hwilkas saknad hos Embetsmän torde i allmänhet medföra skadligare följder, än wid en hastig öfwersigt lätteligen märkes.[4]

Man bör alltså notera att läroverkets lärjungar, enligt 1820-års stadga, inte skulle ägna sig åt matematiska studier för att lära sig matematik. De matematiska studierna förtjänar sin plats i egenskap av "bildande medel", och med detta som utgångpunkt bör ingen större vikt fästas vid hur långt man i en matematiska mening når i dessa studier. Det viktiga är att "den del som läres", läres grundligt.

På ett liknande sätt som Fineman menade Pestalozzi att barn inte bör få kunskaper för tidigt, eftersom de då uttalar sig om saker de ändå inte känner till. Pestalozzi skriver helt kort att: "Omdömets tid inträder, när lärdomen är fulländad".[5] Slutligen kan nämnas att man inom bildningsdiskursen tillmätte ett skyndande efter kunskaper ett påtagligt negativt värde:

---

[1] Kungl. Maj:t, *Kongl. maj:ts förnyade nådiga skol-ordning; gifwen Stockholms slott den 16. december 1820. Cum gratia & privilegio s:ae r:ae maj:tis. Stockholm, tryckt i kongl. tryckeriet, 1821*, 9-10.

[2] "J. H. Pestaozzi och hans uppfostrings-grundsatser," *Tidskrift för Folkskolelärare och Folkskolebildningens vänner* (1849).

[3] Pestalozzi, *Enslingens aftonstund*, 15-16.

[4] Kungl. Maj:t, *Kongl. maj:ts förnyade nådiga skol-ordning; gifwen Stockholms slott den 16. december 1820. Cum gratia & privilegio s:ae r:ae maj:tis. Stockholm, tryckt i kongl. tryckeriet, 1821*, 31.

[5] Pestalozzi och Salomon, *Huru Gertrud undervisar sina barn: ett försök att gifva mödrarna ledning att sjelfva undervisa sina barn, i bref*, 20.

> När mäniskorna skynda denna ordning i förväg, så förstöra de hos sig själfva sina inre krafter och beröfva sitt väsens innersta dess hugnad, ro och jämvikt.[1]

Om man inte går långsamt fram, som metoden föreskriver, riskerar man alltså inte bara att de inre krafterna utvecklas på ett mindre gynnsamt sätt, de riskerar även att "förstöras". Det är helt enkelt inte nyttigt att veta för mycket, eller fel saker.

> Den människa, som med lätta vingar fladdrar kring hvarje kunskapsgren utan att genom ordnade, trägna öfningar inprägla och stärka, det hon inhämtat, förlorar under tiden den klara, fasta, uppmärksamma blick och den fina sanningskänsla, som förstår uppskatta och njuta sanna och rena fröjder.[2]

Kunskaper som man får för tidigt, eller vid fel tidpunkt, och kunskaper som inte passar den plats man befinner sig på, gör att man förlorar "sanningskänslan". Det förtjänar att noteras att Pestalozzi framställer kunskaperna i termer av luft och rymd – den som lärt sig kan fladdra runt kunskapens grenar – och att han använder denna metafor för att illustrera att kunskaper *inte* är något gott. Han ideal är marken, det fast förankrade, det enkla och stilla. Där finns, menar Pestalozzi, sanningen.

Perspektiv på kunskaper

Av det ovanstående framgår att den metod Pestalozzi föreslog knappast kunde leda till att lärjungarna fick sig till godo särskilt stort mått av praktiskt användbara kunskaper. Detta var ju uppenbarligen inte metodens syfte. Varför denna motvilja mot att lära sig *något* snarare än att bara utvecklas och växa? Som vi sett ovan finns uppenbara likheter mellan den syn på kunskaper som kom till uttryck hos till exempel Fineman, specifikt i anslutning till disciplinering av samhällets lägre skikt, och de som Pestalozzi ger uttryck för i sina texter. Men är inte Pestalozzis mål i det närmast motsatt Finemans? Där Fineman vill kuva och underordna, vill ju Pestalozzi att människan skall växa och utvecklas.

Jag förstår skillnaden som huvudsakligen en skillnad i "perspektiv" på två snarlika praktiska anordningar. Fineman betraktar de så att säga "jordnära" kunskaperna ovanifrån och framställer dem därmed som väsentligen begränsade. Pestalozzi ser istället dessa kunskaper så att säga inifrån, och ger dem därför ett helt annat värde. Pestalozzi skriver följande om hur han upptäckte sin metod:

> Min fullkomliga okunnighet i allt lät mig länge kvarstå vid utgångspunkterna. Detta förde mig till erfarenhet av, vilken ökad inre kraft uppnås, när utgångspunkternas fulländning uppnås.[3]

Pestalozzi visste helt enkelt inte så mycket. Med denna utgångspunkt försökte han utforma en bra metod för undervisning av andra, som givetvis inte heller visste så mycket, och inte heller förväntades lära sig särskilt mycket. Vad kunde ha passat den framväxande sociala ordningen bättre? I Pestalozzis system existerade helt enkelt inte den sortens kunskaper som Fineman tog som sin uppgift att utesluta. Det är ur detta perspektiv fullt begripligt att Pestalozzis metoder kom att hyllas som ideala för folkets upplysning – i alla delar av samhället. Han satte upp ett mål som var möjligt att sträva mot, och hjälpa andra att sträva mot, utan något större mått av egna kunskaper. Han tillmätte detta mål ett närmast oändligt värde. Och precis som Finemans växelundervisningsskola skulle hans metod leda till en *bildning* helt ofarlig för de grupper i samhället som bar på den *kunskap* Pestalozzi försökte lära folket att förakta.

Vad kan man med utgångspunkt från denna allmänna skillnad i perspektiv säga om de de specifikt matematiska kunskaper som skulle förmedlas i de respektive skolsystemen? Finemans begränsande perspektiv avspeglas i de tabeller som användes i växelundervisningsskolorna. Dessa utgjorde en tydlig övre gräns för vad man kunde lära sig. Men detta begränsade pensa – en mängd tabeller med tal, men även sorter och i viss mån Regula de Tri – lärde man sig å andra sidan väl. Pestalozzis matematiska kunskaper hade ingen övre gräns – istället strävade man uppåt från en så låg utgångspunkt, och så långsamt, att man knappast ens nådde till växelundervisningsskolornas matematiska slutpunkt. Mer om detta nedan.

[1] Pestalozzi, *Enslingens aftonstund*, 14.
[2] Ibid., 17.
[3] Pestalozzi och Salomon, *Huru Gertrud undervisar sina barn: ett försök att gifva mödrarna ledning att sjelfva undervisa sina barn, i bref*, 6.

6.2. Undervisningens medel

En påtaglig likhet mellan de två systemen är att de presenterar praktiska metoder med vars hjälp de högre målen skall nås. Vi har i tidigare kapitel kunnat följa en successiv förskjutning från böcker som presenterar ett "stoff" strukturerat med utgångpunkt från en inre logik (den borgerliga räknekonsten, den matematiska vetenskapen) till böcker som allt mer disponerats med utgångspunkt från deras användning i en viss undervisningspraktik. De böcker som jag utgår från i det här kapitlet utgör en naturlig fortsättning på denna tendens. De handlar huvudsakligen om hur undervisningen bör gå till – medan stoffet givits en mer underordnad plats.

Såväl Fineman som Pestalozzi uttrycker en övertygelse om att sättet att nå de högre målen är att placera barnen i en noga reglerad praktisk verksamhet. Det är bara genom att bestämma barnens handlingsmönster under en längre tid, som det är möjligt att forma deras "fria" vilja.

Det finns även en stor likhet mellan systemen vad gäller den relation som de upprättar mellan barnen och det som undervisningen handlar om, det som utgör föremålet för barnens verksamhet. Dessa föremål är genomgående strukturerade som en följd av moment, som så att säga speglar elevens successiva rörelse mot undervisningens mål. Typisk i detta avseende är matematiken, vilken som vi sett redan tidigare, i läroböckerna allt mer kom att anta formen av en väg från det lättare till det svårare. Genom anknytningen till dessa objekt kunde växelundervisningssystemets lärogång framstå som en succesiv tillägnelse av kunskaper, medan den bildande metoden kunde framstå som en väg mot allt mer fullkomlig bildning.

Växelundervisningssystemet

På samma sätt som när det gäller undervisningens mål, är ett av växelundervisningens karaktäristiska drag att metoden för att nå målen motiverades med hänvisning till sociala praktiska omständigheter – till exempel att den var billig och effektiv. Att undervisningen innefattade religion motiverades med att detta gjorde eleverna sedliga, medan undervisningen i språk och matematik kunde motiveras med dessa ämnens allmänna nytta. Väsentligt i förhållande till bildningstänkandet är att dessa argument är så att säga externa i förhållande till själva systemet. Systemet framstår som ett resultat av beslut och överväganden som inte kan härledas från dess inre logik, vilket får till följd att systemet framstår som *avgränsat* i en mängd avseenden. Det är avgränsat till en viss plats (växelundervisningsskolorna), en viss tid (när man gått igenom alla klasserna, vilket kunde gå tämligen snabbt för duktiga elever, är man klar) och ett visst mål (bestämning av den fria viljan, förmedling av lämpliga kunskaper).

Det var också systemets *sociala ordning* som man menade skulle forma eleverna. Växelundervisningssystemet var utformat som ett slags idealsamhällen i miniatyr, och det var genom att vara och verka i detta samhälle som eleverna skulle fås att även tycka om det och "vilja det".

I förhållande till detta sociala system framstår matematiken som ett i stor utsträckning godtyckligt objekt. Det sätt på vilket det behandlas i undervisningen kan inte förklaras med utgångspunkt från vad matematiken är. Växelundervisningssystemet knyter kort sagt bara i liten utsträckning an till de (filosofiska och religiösa) tankesystem som matematiken (vilket jag beskrev i kapitel 3) vid denna tid gjorts till en del av. Thor Nordin skriver att:

> För såväl Bell som Lancaster har skolans centrala uppgift framstått som moralisk-religiös fostarn av eleverna. De båda skolmännen var därvid övertygade om att skolverksamhetens maskinmässiga gång liksom elevernas självverksamhet och personliga ansvar skulle frambringa detta mål. Genom att ersätta kaos med minutiös ordning, elevernas sysslolöshet med ständig och samfälld sysselsättning och den i samtida skolor ofta råa kroppsbestraffningen med olika belöningar ansåg de sig vidare ha funnit de erforderliga medlen härför.[1]

Den grundläggande idén i växelundervisningsskolorna var alltså att den sociala ordning som rådde i skolan skulle verka som en formande kraft på eleverna. Fineman, som utgör min återkommande referenspunkt vad gäller växelundervisningen, beskriver ganska ingående de mekanismer som han tänkte sig skulle bidra till att forma eleverna.

För det första "rummets för särskilda ändamål och platser beräknade inredning och material, öfvningarnes fortgående i sträng series och deras på bestämda tider skeende förändringar, samt alla rörelsers taktmässiga verkställande". Denna mekanism, skriver Fineman, "gifver ett för barnaåldern särdeles pas-

[1] Nordin, *Växelundervisningens allmänna utveckling och dess utformning i Sverige till omkring 1830: The general development of the monitorial method and its form in Sweden to about 1830,* 118.

sande ledband", och den är en nödvändig motvikt mot det "annars oundvikligt öfverhandtagande sjelfvsvåldet".[1]

För det andra "En underhållande Läseordning", där "alla ämnen harmoniskt sammankedjas". Kunskaperna är indelade i ett antal "Läro-Curser" som i sin tur en är indelad i hierarkiskt ordnade "afdelningar", vilka "tjena till närmare bestämda gradmätare för Elevernas framsteg". Den yttre fysiska ordningen; den systematiska indelningen av tiden, speglas med andra ord av en ordning på kunskapsobjektets nivå; när eleven flyttar från en bänk till en annan, flyttar han också från en kurs till en annan; en ny position i rummet motsvarar en ny position i förhållande till kunskapsobjektet; växelundervisningssystemet konstituerar här *två* väl avgränsade parallella system: ett organisatoriskt, ett som ligger på kunskapsobjektets nivå. Angående kunskapsordningen och den fysiska ordningen i växelundervisningsskolorna mer allmänt skriver Nordin:

> Enligt såväl Bells som Lancasters skolplaner har flyttningen varit fri mellan olika klasser. Inget speciellt datum eller viss period har med andra ord existerat som egentlig examenstid. Bestämmande faktorn var, att eleverna behärskade respektive klassers kunskapspensa. Vid flyttningen mellan klasserna placerades den uppflyttade eleven i mitten av den näst högre klassen. Den elev, som 2-3 veckor efter uppflyttningen icke lyckats förbättra sin placering i den nya klassen, återfick sin tidigare klasstillhörighet. En liknande degradering till klassen näst under förkom inte vid lancasterskolorna. Samtidigt – detta gällde såväl Bells som Lancasters skolplaner – förekom en ständig rangordning av elevernas inom respektive klasser. Elevernas rang inom varje klass utvisades konkret genom deras placeringar inom fyrkanter respektive halvcirklar.[2]

Man kan i detta avseende dra en tydlig parallell mellan växelundervisningssystemet och det meritokratiska systemet, och det förefaller mycket naturligt att det var just inom den militära sfären som växelundervisningsmetoden först kom i bruk i Sverige (nämligen vid krigsakademin på Karlberg). Den analys jag gjorde i kapitel 6 av det meritokratiska rangordnandet av elever med utgångspunkt från prestationer är i allra högst grad tillämpbar även på växelundervisningssystemet, det vill säga: det ständiga mätandet av prestationer fungerar inte bara som incitament till identifikation och känslomässig involvering, det "avleder" även uppmärksamheten från studiernas innehåll, vilket gör att detta innehåll – teori förenad med praktik – kan framstå som en slags extern nödvändighet – precis som Fineman ville, något man tar för givet och inte tar till föremål för reflektion, eftersom man redan "vet" varför man gör allt för att lära sig.

För det tredje kommer till detta ett system av bestraffningar, ty "Som nu ungdom och visdom högst sällan följas åt, och man ännu mindre af barn kan vänta något med urskiljning skeende val, hvilken obestämdhet utgör barndomens character; så måste Bestraffningsmethoden för skyldigheters erinrande vara en bland Scholans mest magtpåliggande åtgärder", och "det onda, redan genom slägtets allmänna fall, har en, i anseende till naturliga födelsen, afgjord öfvervigt".[3] Målet är här att eleven *själv* skall erkänna sitt fel, och *själv* ta på sig det nödvändiga straffet. Straffens karaktär följer brottet: "t. ex. att iterera försummade tecken, att hålla handen för mun, då obehöriga ord blifvit fälda, att hålla för ögat till erkännande af dess missbruk", etc. Kroppslig aga är, sina negativa egenskaper till trots, "ej heller fördömd. Denna kan nämligen, använd i rättan tid och med faderligt allvar, bättre än något annat bryta egenviljan (fria viljans fängelse-tillstånd – syndens primitiva orsak)".[4] En viktig funktion hos straffen är att medföra "vanan af sjelfförsakelsen, som är ett nödvändigt offer på den sanna frihetens altare".[5]

För det fjärde blir man inom systemet belönad om man gör det man skall. I och för sig är, skriver Fineman, alla elever *skyldiga* att "uppbjuda alla sina krafter för nämnda belönings ernående, samt efter förmåga tjena hvarannan inbördes, och sålunda rättfärdiga hvar och en sin plats inom det lilla samfundet".[6] Växelundervisningsmetoden konstituerar ett system genom vilket eleverna strävan efter bildning samtidigt kan ge dem en känsla för och insikt om deras rätta plats; den är ett samhälle i miniatyr, ett litet samfund, där var och en har sin plats.[7] Tyvärr är barnen emellertid knappast mottagliga för denna typ av lockelser, de räcker inte för att "väcka hogen och underhålla uppmärksamheten". Därför innehåller systemet även andra belöningar. Fineman inleder med en beskrivning av de risker belöningar för med sig. De kan

[1] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*, s. xviii-xix.
[2] Nordin, *Växelundervisningens allmänna utveckling och dess utformning i Sverige till omkring 1830: The general development of the monitorial method and its form in Sweden to about 1830,* 119, not 6.
[3] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden,* s. xxii.
[4] Ibid., s. xxiv.
[5] Ibid., s. xxv.
[6] Ibid.
[7] Man kan här se en parallell till Fichtes idé om "ministater" där det uppväxande släktet skulle fostras, befriande från de förtappade vuxnas skadliga inflytande Fichte, *Tal till tyska nationen*, 168-74.

få till följd att "det rätta målet lemnas [..] ur sigte eller anticiperas uti phantasien. Charlataneri, falsk liberalism och phariseism, hvilka öfvertäcka sin ihålighet med en glitrande, stolt (stollig) och skenhelig yta, äro de enda frukter man sålunda rimligen har att förvänta sig", det kan leda till "omättlig vinningslystnad".[1] Dessa risker till trots har emellertid även Fineman sådana belöningar i sitt system. Belöningarna "verka [för] erkännandet af en högre, controllerande magt öfver det hela; och äro i synnerhet af stor vigt för Läraren, hvilken genom dem kan draga Eleverna till sig, väcka nödig uppmärksamhet och vinna förtroende".[2] Fineman vet att dessa belöningar väckt kritik, att man menar att de kan grundlägga "slafsinne genom Elevernas ödmjuka framträdande för att få Kortena[3]". Detta vore emellertid, menar Fineman, att misskänna "vigten af Lärarens personliga, uppfostrande inflytelse". Bara genom denna är "sinnets fria lyftning möjlig". Sålunda, avslutar Fineman, "sluta sig skyldigheter och rättigheter till hvarandra, samt mötas fridsamt uti deras yttersta mål: *bildning till frihet*".[4]

Mitt tema är skolmatematikens utveckling, och jag vill inte att vi förlorar detta ur sikte. Syftet med denna ganska grundliga redogörelse för hur Fineman tänkte sig att hans disciplinerande undervisningssystem skulle fungera – och hur det förmodligen också i viss mån fungerade – är att visa vilket sammanhang de matematiska studierna blev en del av i och med inrättandet av växelundervisningsskolor. Vi är idag så vana vid matematik som skolämne att det är svårt att föreställa sig att det vid denna tidpunkt var en nyhet att människor från samhällets lägre skikt skulle ägna sig åt matematiska studier, och att det var en nyhet att barn över huvud skulle ägna sig åt matematik.

Räkneundervisning med läsundervisning som förebild

Den räkneundervisning Fineman beskriver är uppenbarligen modellerad med undervisning i läsning som förebild. Således är "Tälja", i betydelsen utläsa, ett moment inom räkeundervisningen som Fineman menar fått allt för liten uppmärksamhet. Han räknekurs börjar med "Vetenskapens bokstäfver (Siffrorna), Stafvelser (Siffrornas sammansättning till Tal och deras värde efter rummen), samt Ord (Tals utnämnande) hvarjämte öfvergången till Renläsa (Räkna) förmedlas genom urskiljandet af Tior och Enheter, samt Additions- och Subtraktions-Tabulan".[5] Det handlar här om att *läsa talen*, och man kan å ena sidan notera överensstämmelsen med lärknelärornas inledning ("Numeratio") och å andra sidan den förskjutning som här inträder i och med att talen betraktas som *ord*, och därmed också underställs samma behandling som orden i läsundervisningen.

Fineman menade att man, för att kunna lära sig läsa, först måste lära sig urskilja och rätt förstå ordens delar. Således delades orden upp, i bokstäver och stavelser, vilka barnen fick lära sig att känna igen och benämna. Samma sak skedde nu med talen. De plockades isär, dess delar identifierades och utnämndes, sattes samman, och manipulerades sedan enligt samma typ av strikta regler som gällde för behandlingen av språket. Fineman skriver att i den lärda skolan "kunna Elever, med lyckliga anlag, sjelfve omsider ersätta" den *brist* frånvaron av Täljnings-undervisning nödvändigtvis leder till. Det kan emellertid inte folkskolans elever, vilka "risquera att stanna på ytan, förledda af sin mechaniska minneskunskap till skryt och sjelfklokhet". Vad som krävs i folkskolan är därför en metod utan "hopp eller luckor i ämnenas framställning".[6] Detta betonande av faran med "luckor" kom att bli ett av skolmatematikens kännetecken, och det förtjänar att läggas på minnet att det tar plats i skolmatematiken som ett medel att förhindra inte bara – som det senare var fråga om – att kunskaperna skulle bli ytliga och mekaniska, utan också som ett medel att förhindra skryt och självklokhet.

Matematiken blir här en del av ett undervisningssystem som tagit form i anknytning till undervisning i läsning. Man kan förstå det som en rekontextualisering. Matematiken framställs och analyseras med utgångspunkt från principer som är varken den matematiska vetenskapens eller räknekonstens. Systemet är utformat för att fokusera barnens uppmärksamhet på matematiken. Men det är inte fråga om ett fokus så att säga på matematikens villkor. Tvärtom lär sig barnen att betrakta matematiken utifrån ett mycket speciellt perspektiv, nämligen just som föremål för "språklika" manipulationer.

---

[1] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*, s. xxvi.
[2] Ibid., s. xxvii.
[3] Som belöning användes "kort" av olika slag, vilket utgjorde en sorts intern ekonomi. Straff kunde innebära att eleven fick "betala" med kort av vissa valörer. Korten hade ett reellt värde genom att de kunde växlas inom mot riktiga pengar. I England utgjorde dessa belöningar under vissa tider en betydande del av kostanden för skolornas drivande (Nordin [??]).
[4] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*, s. xxviii.
[5] Ibid., s. xiii.
[6] Ibid.

Räkning i klasser

På flera punkter utgjorde växelundervisningssystemets behandling av matematiken ett steg i riktning mot senare tiders skolmatematik. Framför allt gäller detta på ett praktiskt plan. Ett sådant steg rör de matematiska studiernas uppdelning i "klasser". Nordin skriver att Lancaster delade in räkneundervisningen i 12 olika klasser som ledde från den första klassens "Sifferskrivning" till de sista klassernas behandling av sorter och Regula de Tri. I Danmark utformade P. H. Mönster och J. Abrahamsson ett växelundervisningssystem med hela 23 räkneklasser.[1] Följande tabell visar vad dessa klasser bestod i:

Table 9. De 23 räkneklasserna i de växelundervisningssystem som P. H. Mönster och J. Abrahamsson beskriver i *Om den indbyrdes Underviisnings väsen och värd.*[2]

Klass	Vad barnen gör
a) Första sandklassen	Barnen lär sig skriva talen 1, 4 och 7 i sand
b) Andra sandklassen	Barnen lär sig skriva de övriga talen i sand
c) Första talklassen	Barnen lär sig skriva taltecknen på tavla.
d) Andra talklassen	Barnen lär sig skriva talen mindre
e) Läsklassen	Barnen skriver tal som läraren läser
f) Additionsklassen,	
g) Subtraktionsklassen	
h) Multiplikationsklassen	
i) Divisionsklassen	
k) Examinationsklassen	Stående genomgång av de 72 tabeller som används i de följande 5 klasserna.
l) Additionsklassen i obenämnda tal	
m) Subtraktionsklassen i obenämnda tal	
n) Multiplikationsklassen i obenämnda tal	
o) Divisionsklassen i obenämnda tal	
p) Benämnelseklassen	Genomgång av sorter
q) Additionsklassen i benämnda tal	
r) Substraktionsklassen i benämnda tal	
s) Multiplikationsklassen i benämnda tal	
t) Divisionsklassen i benämdna tal	
u) Additions- och subtraktionsklassen i obenämnda tal	
v) Multiplikations- och Divisionsklassen i obenämnda tal	
x) Additions- och Subtraktionsklassern i benämnda tal	
y) Multiplikations- och Divisionsklassen i benämnda tal	

Denna klassordning har ungefär samma disposition som tidens läroböcker i matematik. Den väsentliga skillnaden ligger här i att denna disposition genom växelundervisningsmetoden ges en *social* form. Eleverna fördelar sig fysiskt, i rummet, i enlighet med denna skolmatematikens hierarkiska struktur. Rörelsen i läroboken, rörelsen mot större matematiska kunskaper, motsvaras här av materiella rörelser. Eleverna kan i och med detta i en nästan bokstavlig bemärkelse sägas vara *i* matematiken.

Man bör också notera att denna klassindelning utgör en fortsättning på trenden av att undervisningen sträcker sig över en allt mindre del av såväl den vetenskapliga matematiken som räknekonsten. När eleverna tagit sig igenom alla 23 klasserna har de inte nått längre än motsvarande de första kapitlen i till exempel Agrelius, Roloff Anderssons, eller för den delen Forssells räkneläror. Räknekonstens många knep och praktiska detaljer hade ingen självklar plats i växelundervisningssystemet (här måste man dock vara försiktig, eftersom växelundervisning användes i en så disparat uppsättning olika sammanhang).

Växelundervisningssystemet var uppbyggt så, att eleverna stod under kontinuerlig övervakning. Detta möjliggjordes tack vare att elever som kommit längre i progressionen fick bistå med övervakning av de som befann sig längre ned. Undervisningen bestod i en strukturerad dialog mellan eleverna och monitörerna, där monitörerna oftast utgick från en tabell, som elevernas svar jämfördes med. En central aspekt av systemet var den "fria flyttningen", det vill säga att elevernas svar, deras prestationer, omedelbart åter-

[1] P. H.;Abrahamsson Mönster, J., *Om den indbyrdes Underviisnings väsen och värd* (Köpenhamn: 1821).
[2] Ibid.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

verkade på deras position inom systemet. Svarade man rätt flyttades man strax upp till en högre klass, svarade man fel fick man bli kvar eller – om det gick allt för dåligt – flyttas ned till den föregående klassen. Genom att denna reglering utgick från tabellerna snarare än monitörernas personliga omdöme, kan man säga att elevernas position i systemet i det närmaste reglerades av matematiken själv – i den form den fått för att passa detta system.

I sin *Praktisk handbok i pedagogik och methodik för swenska folkundervisningen* från 1846, ger Anders Oldberg en levande bild av hur han föreställer sig att undervisningen borde gå till i de svenska växelundervisningsskolorna.[1] Han skriver: En monitör pekar på den första siffran (på en tavla som i det system Oldberg beskriver sätts upp på väggen) och säger "Ett". Barnen säger efter: "Ett", under det att de "hålla ögonen uppmärksamt fästade på siffran 1, till dess monifören säger 'Skrif ett!'". Undervisningen fortgår sedan i form av en sorts dialog där monitören omväxlande uppmanar de barn som undervisas att säga något, och att göra något; ibland alla tillsammans, ibland enskilt.

För att barnen skulle lära sig addition och subtraktion krävs, menar Oldberg, "åskådningsövningar". Åskådningsövningar hör till bildningstänkandet, och vi ser här ett exempel på det jag talade om inledningvis – att även växelundervisningen var influerad av detta tänkande. Jag skall strax redogöra för det sammanhang inom vilket dessa övningar tog form. I detta sammanhang innebar de användande av kulram. Med hjälp av denna kan, skriver Oldberg, barnen *se* additionen utföras framför sina ögon, samtidigt som de uppmanas att säga vad som sker: Sedan monitören "fört alla kulorna till sig, pekar han på trådens andra ända, der inga kulor finnas, sägande: 'Noll!' (dvs. ingen kula)", barnen säger efter: "Noll!", monitören säger: "Noll till Noll", barnen svarar: "Noll!", monitören fortsätter: "Ett till Noll", barnen svarar, "Ett", och så vidare. I nästa steg får barnen utföra additionen *innan* kulorna läggs samman, för att först efter det att de svarat, se om svaret var det rätta. "Sedan barnen börjar reda sig någorlunda med att addera eller subtrahera åskådliga föremål inom tjugu", skriver Oldberg, "öfvergår man till samma exempels uträknande utan att hafva något för ögonen". Här föreslår han att man, för att hjälpa barnen, skall låta dem "i sin fantasi" föreställa sig små saker som de känner till, som "äpplen, karameller, knäckar, slantar", osv. På så sätt kan övningen göras "liflig och lekande". Oldberg menar att räkneundervisningen skall inledas med räkning av konkreta föremål som barnen ser framför sig. Sedan skall den övergå till att kretsa kring föremål som de föreställer sig i sin fantasi. På så sätt blir, skriver han, undervisningen livlig och lekande.

Linearteckning

Ett ämne som bara i relativt liten utsträckning tycks ha blivit en del av de tidiga växelundervisningsskolorna var linearteckning. Detta ämne har sitt ursprung i det system för utbildning inom den militära sfären som växte fram i Frankrike under andra halvan av 1700-talet. I Sverige kom det dock, åtminstone från 1800-talets mitt, att förknippas med Pestalozzi och den roll han tillmätte den "praktiska geometrin" som en del av den bildande undervisningen. I sin *Inledning till geometrien* nämner dock Fineman inte Pestalozzi, utan anger att han utgått från en bok av en viss Guichard.[2] Man kan jämföra inledningen till Finemans bok med inledningen till Euklides *Elementa*. De abstrakta definitionerna, postulaten och axiomen, har här ersatts av synnerligen praktiska anvisningar. Fineman skriver:

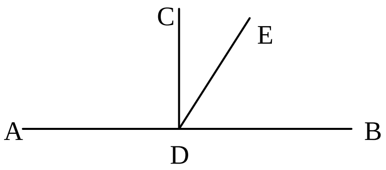
> 1. Linierna böra dragas långsamt och utan afbrott, tydliga, fina och rena.
> 2. Vid öfningarna efter de fyra första figurrna, böra linierna dragas öfver taflans eller papperets hela bredd, alla lika långt ifrån hvarandra. Afstånden pröfvas med en bestämd cirkelöppning, t. ex. $\frac{1}{8}$ af liniernas längd.[3]

De abstrakta sanningskriterier som karaktäriserar den euklidiska geometrin – bland annat att det *inte spelar någon roll* huruvida linjerna *i praktiken* är raka eller inte, eftersom de ändå till sin natur bara är representationer av den "verkliga" (!) linjen, vilken bara existerar i tankens värld – har här bytts ut av en sorts praktiska kvalitetskriterier. Man kan se framför sig eleverna som får bannor för att deras linjer är kladdigt ritade och på ojämnt avstånd från varandra.

Finemans bok innehåller nio övningar, och dessa konstituerar en sorts linearteckningens lärogång. De leder från "Att draga räta linjer", via "Att upprita räta och sneda vinklar" till slutmålet: "Att upprita cirklar". Tillspetsat kan man säga att det man når fram till är den euklidiska geometrins själva förutsättning – förmågan att rita de geometriska figurrna. Från Euklides har Fineman lånat bokens *form*. Övningarna är

[1] Oldberg. Den följande redogörelsen är baserad på kapitel 8 i denna bok.
[2] Carl Olof Fineman, *Inledning till geometrien jemnte linear-tecknings öfningar för folkscholor* (Stockholm: P. A. Norstedt & söner, 1832), 24.
[3] Ibid., 5.

uppställda på samma sätt som Euklides problem, med en figur och en "upplösning". Den avgörande skillnaden är givetvis att då figurn i Euklides *Elementa* är en illustration av ett abstrakt deduktivt resonemang, så är Finemans upplösningar beskrivningar av hur figurrna rent praktiskt, med hjälp av de ritverktyg som finns till hands, kan ritas upp. Till exempel:

> 2. Att draga horisontala, vinkelräta och sneda linier.
>
> 
>
>
> Drag från venster till höger en rät linie AB, efter behag; drag vidare ofvanifrån en rät linie CD, som råkar AB i puncten D, så att vinklarne å begge sidor om henne inträffa med vinkelhaken; drag slutligen ofvan AB till höger om CD, en annan rät linie ED, som råkar den förra i samma punct D; så är den dragna räta linien AB horisontal, CD vinkelrät och ED sned.[1]

Den första bok i linearteckning som fick stor spridning tycks ha varit Lagerhamns *Geometri, i förening med linearteckning* från 1843. Denna bok är snarlik Finemans. Den är dock tjockare och kommer närmare något som liknar den euklidiska geometrins bevis. Men det är inte riktigt som i Euklides Elementa, vilket framgår av nedanstående exempel:

> **2 §. Att pröfva en Lineal, om han gör räta linier.**
>
> Drag en linie efter hela den kant af Linealen, som skall pröfvas. Omhvälf sedan Linealen, under det den ifrågavarande kanten fortfar att ligga utefter linien. Tillse, att samma kants ändpunkter äfven nu träffa in med liniens och drag i denna ställning åter en linie efter honom. Faller den nya linien fullkomligt in med den föresta, så gör Linealen räta linier; men i annat fall icke. (§. 1.)

Geometrin har här blivit en praktisk verksamhet, motiverad med utgångpsunkt från nyttokriterier. När linearteckningen på allvar började ta plats som en del av den svenska skolmatematiken, hade den dock ändrat skepnad – inte vad gäller det som eleverna i praktiken ägnade sig åt, utan vad gäller hur den motiverades. Pestalozzi gjorde den nämligen till en central del av sin bildande metod, något jag strax skall berätta mer om.

Bildningstänkandet

Typiskt för bildningstänkandet är att den bildande verksamheten motiveras med utgångspunkt från sig själv. Den framstår därmed inte som en socialt betingad social verksamhet, utan som något som inte kunde vara annorlunda. Bildningstänkandet är inte minst en metafysik som ger den bildande praktiken mening. Väsentligt är att det inte var den sociala verklighet som organiserades kring barnen som skulle bilda dem. Istället såg man som metodens uppgift att arrangera ett möte mellan *barnet* och *naturen*. Man menade inte att naturen i en enkel mening skulle "verka" på barnet. Metoden gick istället ut på att träna barnet i att uppmärksamma naturens väsentliga drag, för att på så sätt öva upp dess åskådningskrafter.[2]

I förhållande till detta mål gavs matematiken en särställning. Man menade nämligen att den verklighetens essens som den bildande verksamheten skulle ställa barnet i relation till, var matematisk. Den kombination av teori och praktik som jag berättade om i förra kapitlet, och som vi ovan sett att till exempel Fineman ansåg var lämplig för undervisning av samhällets lägre skikt, fick därmed en alldeles speciell betydelse inom bildningstänkandet. Det var nämligen just genom att om och om igen, med bistånd av en lärare, öva sig på att *se matematiken i verkligheten*, eller, med andra ord, se verkligheten som matematisk, som åskådningskrafterna kunde stärkas. Inom bildningstänkandet framstod denna verksamhet som en övning i att se verkligheten så som den egentligen är.

En avgörande skillnad mellan bildningstänkandet och växelundervisningssystemet är i och med detta att matematiken utgjorde en integrerad och central del av bildningstänkandet, och att den matematiska

[1] Ibid., 8.
[2] Pestalozzi talar om många olika "krafter" som skall bildas. Viktigare än Pestalozzis egen tyska terminologi är i detta sammanhang den roll termernas översättningar kom att spela i den svenska diskussionen. I denna diskussion förekommer bland annat åskådningskraft, omdömeskraft, själskraft, inbillningskraft, sanningskraft och föreställningskraft.

undervisningen i detta sammanhang motiverades med hänvisning till ett inre samband mellan undervisningens mål och matematikens egenskaper.[1]

Eftersom förmedling av kunskaper inte har någon plats inom bildningstänkandet kan denna undervisningsmetod på ett helt annat sätt än växelundervisningssystemet framstå som *obegränsad*. Den bildande verksamheten framstår som ett idogt strävande mot ett mål som bara kan nås genom oändliga mängder övning. Gränserna är, kan man säga, immanenta i den bildande metoden, vilken i sin tur framstår som en oundviklig följd av bildningstänkandets metafysiska utgångspunkter.

Metod spelade en central roll i den bildande metod som Pestalozzi föreslog. Man kan se en parallell till den betydelse som ofta tillskrivits den vetenskapliga metoden, nämligen som en möjlighet för människor att nå resultat som ligger bortom deras egen begränsade subjektiva kapacitet. Pestalozzi skriver:

> Jag tror ej, att det är värt att tänka på att komma ett steg vidare med folkundervisningen, så länge man inte funnit undervisningsformer, vilka gör läraren, åtminstone till dess elementarkunskaperna är bibragta, till ett blott och bart mekaniskt verktyg för en metod, vars resultat genom naturen av dess former och ej genom den dem ledande mannens konst måste framträda.[2]

Av citatet framgår för övrigt att det råder en grundläggande assymetri mellan läraren och elevens roller i den bildande undervisningen. Läraren skall fungera som metodens "mekaniska" verktyg, men genom att göra detta så gör han det möjlig för eleven att växa, utvecklas och *bildas*.

Bildningens första förutsättning är övning. Målet är, som vi såg ovan, en grundlig förändring av hela människan, ett görande-verkligt av något som finns i blott potentiell form i människans inre. Pestalozzi talar ofta om detta inre som krafter, eller mer bestämt åskådningskrafter. Detta är krafter med vars hjälp människan kan ställa sig själv i relation till naturen, så som den är, det vill säga så som Gud skapat den. Åskådningskraft är förmågan att klart och tydligt uppfatta naturens väsen. Det är denna kraft som måste *bildas,* och detta kan bara ske genom övning. Övning, skriver Agardh och Bruzelius, "är ökandet af kraft genom den redan gifna kraftens anwändande".[3] Det handlar inte om att lära sig "uppfatta" de yttre tingen, utan om "det självverksamma uppfattandet eller uppsökandet af det wäsentliga i föremålen". Det är denna förmåga som en endast en "kraft-utwecklings-method" förstår att utveckla.[4]

Människan har, menar man, inneboende krafter, och dessa skall utvecklas. Naturen bär i sin tur på en potential att locka fram, eller som Pestalozzi skriver "avtäcka" dessa krafter.[5] Det som krävs för att detta skall ske är ett riktigt arrangerat möte mellan den ännu ej färdigutvecklade människan och naturen. Mötet sker genom att människan övar sig på att, så att säga, känna igen naturen för vad den egentligen är, bortom de vanföreställningar den mänskliga kulturen placerat som förment givna framför hennes ögon: "Redan medan barnet ligger i vaggan, måste man börja med att undanrycka vårt släktes ledning från den i blindo lekande naturens händer".[6] Barnets utveckling måste överlåtas åt bättre krafter – en metod med vars hjälp barnets inre potential tas till vara. Fichte poängterar vikten av "att lärjungen redan från början oavbrutet och fullkomligt står under inflytande från denna uppfostran och att han fullkomligt isoleras från det allmänna och skyddas från all beröring därmed".[7]

Lika klart som att den mänskliga kulturen är till skada för barnets utveckling, är att riktig bildning inte kan bli resultatet av ett blott "överlåtande" av uppfostran till naturen. Pestalozzi skriver:

> När du sorglöst åt naturen övelämnar jorden, bär den ogräs och tistlar [...] För att på den kortaste tiden föra ditt barn till undervisningens mål, till tydliga begrepp, måste du med största omsorg inom varje kunskapsområde först ställa det för ögonen sådana föremål, vilka hos sig innesluta de väsentligaste kännetecknen för det

[1] Den som är bekant med det Humboldtska bildningsideal som hade en hegemoniska ställning såväl i Tyskland som Sverige vid denna tid kanske tycker det är märkligt att Pestalozzi såg matematiken, snarare än de klassiska språken, som det främsta bland bildningsmedel. Vad gäller Svenska förhållanden kan sägas att Pestalozzis idéer rörande matematik inte väckte någon entusiasm vid universitetet förrän alldeles mot slutet av 1800-talet, i samma skede som bildningstänkandet över huvud förlorade mark. Idén om matematik som bildning fick i och för sig allt fler talesmän i takt med att matematikens betydelse som undervisningsämne vid läroverken växte. Inom bildningstänkandet som helhet förblev den emellertid alltid underordnad de klassiska språken.

[2] Pestalozzi och Salomon, *Huru Gertrud undervisar sina barn: ett försök att gifva mödrarna ledning att sjelfva undervisa sina barn, i bref*, 24.

[3] Pestalozzi, Agardh, och Bruzelius, *Pestalozzi's Elementar-böcker*, s. 25.

[4] Ibid., s. 29, not.

[5] Pestalozzi, *Enslingens aftonstund*, 13.

[6] Pestalozzi och Salomon, *Huru Gertrud undervisar sina barn: ett försök att gifva mödrarna ledning att sjelfva undervisa sina barn, i bref*, 109.

[7] Fichte, *Tal till tyska nationen*, 34.

> ämne, vartill dessa föremål höra. Detta måste ske på ett synbart och utmärkande sätt, så att de äro särskilt lämpade för att föremålets *väsen*, till åtskillnad från dess växlande beskaffenhet, särskilt faller i ögonen.[1]

Problemet, åtminstone så som det framträder i Fichtes *Tal till tyska nationen*, är att naturen – eller mer allmänt själva verkligheten som sådan – över huvud taget inte existerar som något på förhand givet, möjligt att överlåta barnet till. Verkligheten är väsentligen en följd av åskådning. Åskådningskraft är inte en kraft att assimilera intryck, utan en kraft att med utgångspunkt från sitt inre, skapa harmoni mellan det skådande subjektet och den åskådade verkligheten. Det är förmåga att skapa sådan harmoni som uppfostringsmetoden skall leda till. Det är denna förmåga som bara kan utbildas genom övning.

Matematik som bildningsmedel

En bidragande orsak till Pestalozzis stora inflytande på skolmatematikens område är den centrala plats han gav matematiken i egenskap av bildningsmedel. Han såg matematiken som en aspekt av den sanna verklighet som människan behövde lära sig uppfatta, och utformade sina metoder med detta som utgångspunkt.

Det är oerhört viktigt att man uppfattar den avgörande skillnaden mellan matematikens roll som sådant bildningsmedel, och matematik som föremål för studier med syfte att leda till, säg, praktiskt nyttiga kunskaper. Vi har tidigare sett hur matematiska studier tillmättes en förmåga att förbättra den studerandes förmåga att tänka. Det är, kan man säga, denna matematik – i egenskap av en på människan verkande kraft – som spelar en av huvudrollerna i Pestalozzis uppfostringsmetod. Med den viktiga skillnaden jämfört med upplysningstänkandet, att den nu inte är verksam så att säga i sig själv – som logiskt deduktivt system – utan som en aspekt av naturen, som en väg mot naturens väsen.

Låt mig försöka sätta in Pestalozzis förhållande till matematiken i ett historiskt sammanhang. Under 1600-talet blev matematik allt mer något man *talade* om – de egenskaper den redan tidigare hade tillskrivits av specialister på matematik, övergick successivt till bli naturfilosofins doxa, samtidigt som matematisk formalism blev en integrerad del av "vetenskapliga" studier av naturen. Som en aspekt av denna rörelse skedde under 1700-talet en uppsplittring av naturfilosofin – det vill säga det som till exempel Descartes, Boyle och Newton ägnade sig åt – i å ena sidan matematiserad naturvetenskap och å andra sidan "metafysik" eller det vi idag kallar filosofi. Detta innebar emellertid inte att matematik därmed blev till något uteslutande för "forskare" i matematik eller naturvetenskap. Tvärtom kom matematikens starka ställning inom naturvetenskapen att leda till att den gavs en central plats även i tankesystem med andra syftesmål än att beskriva och förstå naturen. Typiska i detta avseende är både Christian Wolff och Immanuel Kant – ingen av dem gjorde anspråk på att skapa (eller upptäcka) ny matematik. Tvärtom gjorde de matematiken, så som den konstituerats inom naturfilosofin, till en av sina utgångspunkter. De tog matematiken för given som en självklar del av verkligheten, och försökte i sina system förstå och precisera vilken roll den spelade, och klargöra vad dess centrala roll borde få för konsekvenser inom andra områden än naturfilosofin. Pestalozzi var kort sagt en av dem som försökte härleda matematikens betydelse för uppfostran.

Således särskiljer Pestalozzi tre olika moment i förmågan till riktigt "åskådande" av naturen:

> 1) Kraften att uppfatta olika föremåls form och att för sig tydliggöra deras innehåll.
> 2) Kraften att bedöma dessa föremål med hänsyn till deras antal och att bestämt förtydliggöra sig dem såsom enhet eller flertal.
> 3) Och, för att ännu mer för sig tydliggöra föremål, sedan detta skett genom form och antal, även kunna använda språket, och därigenom fasthålla föremålet, till det blir henne omöjligt att glömma det.[2]

Det är i de två första momenten som matematiken kommer in i bilden. Att klart uppfatta olika föremåls form var för Pestalozzi liktydigt med att uppfatta dem i geometriska termer. Att bedöma föremål med hänsyn till antal innebär givetvis att kunna räkna dem.

Aritmetik som bildningsmedel

Följande citat ger en bild av Pestalozzis syn på räknandets funktion:

---

[1] Pestalozzi och Salomon, *Huru Gertrud undervisar sina barn: ett försök att gifva mödrarna ledning att sjelfva undervisa sina barn, i bref*, 109.
[2] Ibid., 57.

Räknekonsten uppstår från den enkla sammansättningen och delningen av flera enheter. Dess grundform är, som jag redan sagt, väsentligen denna: *ett och ett är två, och ett från två är ett*. Också är varje tal, hur det än låter, i och för sig inget annat än ett förkortningsmedel av denna väsentliga urform för all räkning. Det är emellertid viktigt, att kännedomen om urformen för talförhållandena genom räknekonstens förkortningsmedel ej försvagas hos människan. Tvärtom bör den i de former, medelst vilka denna konst inläres, djupt och omsorgsfullt inpräglas, och allt framskridande i denna konst byggas på det fast åtrådda målet, nämligen det hos människan djupt grundade medvetandet om de realförhållanden, vilka ligga till grund för all räkning. Om detta ej sker, bleve t. o. m. det första medlet i och för uppnåendet av tydliga begrepp endast förnedrat till ett lekverk för vårt sinne och vår inbillningskraft och skulle därigenom göras kraftlöst för sitt väsentliga ändamål.

Det kan ej vara annorlunda. När vi t. ex. endast lära oss utantill att tre och fyra är sju, så bedraga vi oss själva. Ty den inre sanningen av dessa sju är ej i oss, i det vi ej hafva kännedom om den församinnligade bakgrund, som enbart kan göra dessa tomma ord till sanning.[1]

Pestalozzis resonemang kretsar hela tiden kring relationen mellan räknandet och det som räknandet så att säga "hänvisar" till. Han inför en skarp distinktion mellan, som han skriver, att lära sig "utantill att tre och fyra är sju", och att förstå den "inre sanningen" i detta förhållande. Räknandet bör, menar han, vara ett sätt att ställa sig själv i relation till en väsentligt egenskap hos verkligheten – att ting har antal. För att räknande skall *vara detta* krävs att den så att säga *tänks* som sådan. Faran är att talen framträder för människan som blott tecken, som "tomma ord", frikopplade från sitt verkliga ursprung. Detta skulle, skriver Pestalozzi ovan, innebära att till och med matematiken – "det första medlet" för bildning – blev "förnedrat till ett lekverk för vårt sinne". Uppfattad på detta felaktiga sätt riskerar matematiken till och med, menade Pestalozzi, att *förstöra* vår inbillningskraft.

För att detta skall undvikas måste räkekonsten "djupt och omsorgsfullt inpräglas", och mer specifikt krävs ett inpräglande av *relationen* mellan å ena sidan talen och räknesätten och å andra sidan den verklighet de hänvisar till. Barnen måste se, eller snarare *aktivt åskåda*, det vill säga genom sin egen aktiva kärleksfulla och intresserade handling *frambringa*, talen och räknandets resultat. Först sedan talens innebörd "inpräglats" hos barnen, kan man försiktigt introducera "räkningsförkortningsmedlen" och deras användande.[2] Han skriver:

När barnen blivit övade att räkna med föremål och dessas ställföreträdare: streck och punkter, så vidt som dessa tavlor, vilka helt och hållet äro grundade på åskådning, gå, så blir kännedomen om de verkliga talförhållandena hos barnen så stark, att förkortningsmetoden medelst vanliga siffror, även utan åskådning, blir otroligt lätt för dem.[3]

Man kan här se begynnelsen till den hårda dom som skolmatematiken skulle fälla över räknelärorna och deras räknekonst. Där framträder talen som sammanställningar av siffror som knappast kan sägas ha haft någon egen betydelse. Betydelse fick talen i det sammanhanget genom sina *sorter*. De handlade om skålpund, riksdaler och runstenar, och de var som delar av en social kontext som de fick sin mening. Ett sådant förhållande till talen framstår som djupt förkastligt utifrån det perpektiv Pestalozzi representerar, eftersom det inte förstår att värdesätta talens *egen* betydelse. Det är denna betydelse som Pestalozzi tar fasta på i sin räkneundervisning. Talen utgjorde för honom ett redskap för "seende" av verklighetens grundläggande struktur. Räknesätten måste introduceras otroligt långsamt, eftersom utgångspunkten inte får lämnas ur sikte:

När barnet sålunda genom denna bestämda och ofta upprepade räkning af indelningarna kommit till ytlig kännedom om, hur många enheter som finnas i de första talen, ändrar man frågan ånyo och frågar vid den ännu en gång likformiga uppställningen av plattorna: Hur många gånger en är två? Hur många gånger en är tre? o. s. v. Först då, när barnet lärt känna de enklaste begynnelseformerna av addition, multiplikation och division, och man fullkomligt medelst åskådning gjort det förtroligt med dessa räkneformers väsen, försöker man på samma sätt genom åskådning bibringa barnet en fullständig kännedom om subtraktion.[4]

Man skall notera att det som övas först är multiplikation med *ett*, en operation som med utgångspunkt från räknekonsten givetvis är fullständigt meningslös. Här får den tvärtom en central betydelse som den

[1] Ibid., 90.
[2] Ibid., 93.
[3] Ibid., 94.
[4] Ibid., 93.

allra enklaste formen av multiplikation, en form som man måste blir förtrogen med innan man kan gå vidare.

För att ytterligare illustrera skillnaden mellan att se matematiken som något man *använder* och som bildningsmedel skall jag ge några exempel på vad Friedrich Fröbel, skrev om matematikens betydelse för uppfostran.[1] Fröbels idéer ter sig ganska märkliga, men de ligger inte desto mindre i linje med den allmänna hållning i förhållande till matematiken som även Pestalozzi ger uttryck för. Fröbel kan, menar jag, användas som ett sorts förstoringsglas, som tydliggör hur matematiken i 1800-talets skolmatematiska diskussion måste förstås som en del av ett i grunden religiöst metafysiska system. Följande tre citat är hämtade från *Människans fostran*:

> Människan söker en fast punkt att utgå från, då hon vill komma till insikt om det inre sammanhanget mellan naturens mångfaldiga former. Ingenstädes finner hon en sådan punkt säkrare än i matematiken, som i sig innesluter all mångfald och som utgör det synliga uttrycket av all lagbundenhet.[2]

> Matematiken är den synliga avbilden av tänkandet i människan, den är uttrycket för lagbundenheten i det rent andligas värld. Därför är den i detta avseende en helhet av liv i och för sig, ett alster av nödvändighet och frihet. Matematiken är därför inte främmande för det verkliga livet, men ej heller härledd ur detsamma. Den är ett uttryck för livet i och för sig. Därför är matematikens väsen uppfattbart i livet, och livet självt möjligt att uppfatta genom dess väsen.[3]

> En uppfostran av människan utan matematik och i synnerhet utan grundlig kunskap om talen, vartill sluter sig kunskapen om form och storlek, blir därför ett lappverk utan någon enhetlighet. En sådan uppfostran skapar svårigheter för den bildning och utveckling, för vilken människan och mänskligheten är bestämd och kallad: Det är svårigheter som är oöverstigliga, men som människan då hon inte kan döda sin sökande ande, försöker komma över. Eller också söker hon förlama sina krafter, trött av sin andes fruktlösa arbete. Människans förstånd och matematiken står i samma förhållande till varandra som hennes känsloliv och religionen.[4]

Fröbel betraktade matematiken som en förenande länk mellan människan, Gud och naturen. Matematiken är, skriver han "den synliga avbilden av tänkandet i människan", och om detta tänkande är riktigt, det vill säga följer matematikens lagar, står det därmed också i samklang med naturen, som också den är till sitt väsen matematisk. Det var av denna anledning som matematik måste utgöra en central del av uppfostran.

Den matematiska lagbundenhet som barnen skulle formas av för att uppnå harmoni med Gud och naturen, kom i hans uppfostringsmetod att anta formen av en sorts elementär talteori. Han ställde således upp en mängd "naturlagar" för hela tal, till exempel följande:

> På varandra följande tal, som tas ett udda antal gånger, ger udda eller jämna tal.
>
> Om man tar ett jämnt tal, ett jämnt eller udda antal gånger, får man alltid ett jämnt tal.
>
> Om man tar ett udda tal, ett jämnt antal gånger, får man ett jämnt tal.
>
> Om man tar ett udda tal, ett udda antal gånger, får man ett udda tal. [etc.] [5]

Dessa representerade för Fröbel tänkandets och naturens gemensamma lagar – åtminstone den del av dessa lagar som kunde användas som bildningsmedel för barn. De utgjorde därför det mål Fröbels räkneundervisning strävade mot. Givetvis handlade det inte om att lära sig dessa naturlagar "utantill". Insikten om deras sanning skulle växa fram, genom övning.[6]

[1] Det är inte klart i vilken mån Fröbel påverkade svensk matematikundervisning under 1800-talet. Hans fokus var små barn. Lina Morgensterns bok om Fröbels idéer översattes till svenska 1867, men annars tycks inte mycket ha skrivits om Fröbel i Sverige under 1800-talet. Lina Morgenstern, *Barndomens paradis: praktisk och utförlig handbok för mödrar och lärarinnor i småbarnskolorna: efter Fredik Fröbels grunder* (Örebro N. M. Lindh: 1867).

[2] Fröbel och Johansson, *Människans fostran*, s. 138.

[3] Ibid., s.?

[4] [fröbel]

[5] Fröbel och Johansson, *Människans fostran*, s. 214-24..

[6] I relation till den betydelse som Jean Piaget fick för skolmatematikens utveckling under 1900-talet kan det vara värt att notera att både Pestalozzi och Fröbel fäste stor betydelse vid hur talen successivt övergår från att vara knutna till fysiska objekt (vilket de enligt dem måste vara i början) till att istället så att säga få en egen mening.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Geometri som bildningsmedel

Vid sidan om räknandet utgjorde geometrin ett av Pestalozzis viktigaste bildningsmedel. Det handlade nu inte om euklidisk geometri så som vi sett detta ämne framträda i tidigare kapitel. För Pestalozzi handlade geometri om att nå en sorts förtrogenhet med de geometriska formerna och den geometriska terminologin. Målet var att verkligheten skulle framträda för barnen som sammansättningar av elementära geometriska former, linjer, vinklar, bågar, kvadrater, cirklar, och vidare. Det handlade inte bara om att passivt uppfatta verkligheten som sådan, utan om att aktivt "frambringa" dessa drag hos verkligheten, en förmåga man kunde man nå "genom övning att dra linjer, vinklar och bågar".[1]

Den första geometriska form barnen borde göras förtrogna med var, menade Pestalozzi, *linjen*, och den särskilda form av grundläggande geometriundervisning som han utformade kom därmed att på ett förnämligt sätt passa den "linearteckning" vilken som vi sett ovan redan tagit form i ett helt annat sammanhang (nämligen i Frankrike under 1700-talet). Pestalozzi skriver:

> Man framstället för barnet beskaffenheten av den räta linjen så till vida som den är obunden och består för sig själv, i dess mångfaldiga läge efter flera villkorliga riktningar och låter barnet få en klar kännedom om dess flerfaldiga utseende utan hänsyn till dess vidare användning. Så börjar man sätta namn på de räta linjerna, såsom vågrät, lodrät och lutande, de lutande först såsom stigande eller fallande, sedan till högre eller vänster stigande, eller till höger eller vänster fallande; sedan ger man dem efter parallellernas olika utseende namn såsom vågräta, lodräta och lutande parallellinjer. Sedan nämner man för barnen huvudvinkeln, som uppstår genom föreningen av dessa för dem bekanta linjer, därigenom att man kalla dem räta, spetsiga eller trubbiga vinklar. På samma sätt lär man barnet och låter det benämna urformen för all mätningskonst, den liksidiga fyrhörningen, vilken uppstått genom föreningen av två vinklar, jämte kvadratens bestämda avdelningar i halv, fjärdedels, sextondels kvadrat o.s.v.[2]

Vad det handlar är en sorts rekonstruktion av verkligheten, med geometrin som utgångspunkt. Att börja med linjen var för Pestalozzi att börja med verklighetens mest grundläggande och enkla form. Första steget mot bildning var att bli förtrogen med denna form *i sig själv*, fri från alla sammanhang. Först när man till fullo behärskade detta moment, var tiden inne att gå vidare med mer komplicerade former, så som bågen, eller sammansatta former, som vinklar, trianglar och kvadrater. Man inser att vägen från geometrins enkla former till ett riktigt skådande av världen som den framträder utanför den pedagogiska praktiken måste blivit tämligen lång och svår.

6.3. Analys

Pestalozzis bildningstänkande skapade ett antal sammanhängande *dilemman* för skolmatematiken. De utgör alla aspekter av distinktionen mellan bildning, som man menade var något positivt, och "minneskunskaper", eller som det ofta kallades "mekaniska kunskaper", vilka man menade var meningslösa eller till och med skadliga. Det grundläggande problemet var, kan man säga, att samtidigt som man utformade de matematiska studierna med utgångspunkt från bildningstänkandet, så ville man inte desto mindre att eleverna skulle *prestera* enligt kriterier som hade sin grund i ett mer alldagligt kunskapstänkande. Man ville nå praktiskt användbara kunskaper genom bildande undervisning. Även Pestalozzi menade i och för sig att detta borde vara fullt möjligt. Tanken var att kunskaperna skulle läras "otroligt lätt", efter det att åskådningskrafterna bildats till fulländning. Det var bara det att detta visade sig betydligt lättare sagt än gjort.

Konsekvensen blev att man på olika sätt så att säga "smugglade" in kunskaperna i den bildande undervisningen. Minns att Agardh och Bruzelius skrev att det väl i och för sig kunde hända att även kunskaper förmedlades genom Pestalozzis metod, men att detta hur som helst var oväsentligt i sammanhanget. Denna "oväsentliga" aspekt av undervisningen, kom nu att få väldigt stor betydelse i förhållande till de prestationsmätningar som kom att utgöra en allt viktigare del av de skolmatematiska undervisningspraktikerna.

Kunskapsförmedling tillmättes ju å andra sidan, som vi sett, ett negativt värde av Pestalozzi. Den beskrevs rent av som en fara för (vad vi idag skulle kalla) elevernas mentala hälsa. Den märkliga följden av detta blev, att när man i skolmatematiska sammanhang konstaterade att eleverna hade allt för dåliga "kunskaper" (i termer av förmåga att lösa vissa skoluppgifter), så tolkade man detta som en följd av att "kun-

[1] Pestalozzi och Salomon, *Huru Gertrud undervisar sina barn: ett försök att gifva mödrarna ledning att sjelfva undervisa sina barn, i bref*, 31.
[2] Ibid., 80.

skaper" tagit *för stor* plats i undervisningen snarare än att de fått för lite plats. Det låter märkligt, men typiskt för skolmatematiken, särskilt från och med mitten av 1800-talet, är att man tror att barnen lär sig *mer*, i ju större utsträckning man begränsar deras möjlighet att under sina studier möta det stoff som de faktiskt skall lära sig. Det diskursivt förmedlade budskapet blev tabu.

Detta grundläggande dilemma tog sig en rad mer specifika uttryck. Minns att bildning är ett resultat av att om och om igen ställas i en riktig relation till naturen. Denna aspekt av bildningstänkandet anammades inom skolmatematiken, och eleverna kom under 1800-talets lopp att få ägna sig åt att lösa allt längre rader av övningsuppgifter. Men i takt med att övandets kvantitet ökade, växte också vad man uppfattade som faran att övandet inte alls var bildande, utan något helt annat – något *mekaniskt*. Varje gång man tvingades observera att övandet inte hade haft önskad effekt misstänkte man därför att detta var vad som i själva verket hade ägt rum; övandet hade inte varit bildande, det hade varit mekaniskt. Det visade sig vara oerhört svårt – för att inte säga omöjligt – att skilja den bildande övningen, från den mekaniska, och när skolmatematik under 1800-talets andra hälft blev ett föremål för diskussion, kom denna diskussion att i stor utsträckning utgöras av å ena sidan kritik mot felaktiga metoder – som ledde till "mekanisk räkning" – och å andra sidan förslag till nya metoder, som tvärtom skulle göra verklighet av bildningstänkandets idéer. Och de nya metoderna innebar oftast mer övning, inte mindre.

Ett annat uttryck för de dilemman som bildningstänkandet introducerade i skolmatematiken rörde skillnaden mellan å ena sidan siffrorna och den matematiska formalismen, och å andra sidan det som dessa symboler syftade på, själva talen. Pestalozzi menade, som vi såg, att orden – de tomma orden, liksom tal och räkneregler utan anknytning till sin "inre sanning" – utgjorde en stor fara för den bildande verksamheten. Inte desto mindre var det givetvis bemästrande av just siffror och räkneregler som i en instrumentell mening utgjorde de matematiska studiernas mål. Det var fortfarande samma räkneuppgifter som vi sett i såväl Agrelius, som Celsius, Palmqvists, Beckmarcks, Forssells och nu senast Zweigbergks läroböcker som utgjorde måttet på elevernas kunskaper. Den märkliga konsekvensen på denna punkt blev, att när man upptäckte att eleverna inte behärskade räknekonstens regler eller den matematiska vetenskapens formalism, så drog man inte slutsatsen att reglerna och formalismen fått för lite plats i studierna, utan att den fått för mycket plats. Det var, tänkte man sig, på grund av att de introducerats för tidigt, innan elevernas förmåga utvecklats i tillräckligt hög utsträckning, som de blev blott mekaniska minneskunskaper och inte en organisk del av den bildning man eftersträvade. Sålunda kom ett av skolmatematikens kännetecknande drag bli ett successivt allt längre *uppskjutande* av introduktionen i studierna av såväl siffror, som räknekonstens regler och matematisk formalism. Man ville, enkelt uttryckt, att elevens möte med verkligheten genom övning (mycket övning) skulle resultera i ett inre matematiskt begrepp – ett "talbegrepp" – som sedan, när det var färdigbildat, kunde knytas till det i sammanhanget oväsentliga tecknet – aritmetikens siffror och algebrans bokstäver.

Matematiken och barnet

Min beskrivning av skolmatematikens genes är lika mycket en beskrivning av de betydelser som utifrån skolmatematiken tillskrivits matematiken. Vad matematiken ansetts vara, på vilka sätt den ansetts kunna vara människor till nytta, har som vi sett skiftat mellan olika tidsperioder. Den borgerliga räknekonsten var knappast något mer än en praktiskt nyttig uppsättning tekniker. Upplysningens matematik kunde tjäna som verktyg för träning av tänkandet. För Pestalozzi utgjorde matematiken det främsta bland bildningsmedel. Långt senare, under första halvan av 1900-talet kom matematiska kunskaper att förknippas normalitet och "intelligens", medan oförmåga att ta till sig matematiken sågs som ett symptom pockande på förklaring och behandling. Under 1960-talet började matematiken att förknippas med ekonomisk tillväxt och demokrati på det sätt som jag exemplifierade i avhandlingens inledande två citat.

När Pestalozzi gjorde matematik till något för folkets barn togs ett stort steg mot den innebörd som matematiken tillmäts utifrån dagens skolmatematik. Jag skall därför ta den förändring av matematikens innebörd som Pestalozzis bildningstänkande förde med sig som utgångspunkt för en närmare beskrivning av hur jag förstår den process genom vilken matematikens egenskaper successivt förändras. Först skall jag säga något om hur det går till när egenskaperna förändras, sedan skall jag säga något om hur själva det faktum att matematiken har egenskaper kan tolkas.

De stora likheter som jag observerat ovan, rörande Pestalozzis respektive Finemans undervisningsmetoder, har troligtvis sitt huvudsakliga ursprung i att de båda utgjorde ett försök att möta samma sociala behov, nämligen av att hantera växande skaror med fattiga barn. Mer specifikt kan man här särskilja tre bestämmande faktorer: det som skulle hanteras var *barn*, de var *många* och de var *fattiga*. Detta satte

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

ramarna både för vilka undervisningsmetoder som var praktiskt möjliga, och för vilka undervisningsmetoder som kunde anses ändamålsenliga.

Metodernas särdrag måste sedan förstås mot bakgrund av de idéer som fanns till hands i England respektive Schweiz vid denna tid – vad man ansåg att fattiga barn behövde lära sig, hur man kunde tänkas kontrollera en stor grupp barn, liksom mer allmänt vad man tyckte var lämpligt att fattiga barn ägnade sig åt på dagarna. Det rörde sig här inte heller uteslutande av idéer, utan även om vilka praktiker det var möjligt att knyta an till – så måste man till exempel förstå Pestalozzis linearteckning, som hämtades ur en fransk kontext där den tillskrevs en fundamentalt annan innebörd än den gavs av Pestalozzi.

De undervisningspraktiker som växte fram kan med dessa som utgångspunkt förstås som resultatet av ett sorts möte, mellan sociala "behov" – svåra eller omöjliga att förklara – och en uppsättning "resurser" med vars hjälp dessa behov kunde mötas. I synnerhet vad gäller Pestalozzi är det tydligt att den nya praktik han gav form åt också förde med sig en förskjutning av de betydelser han så att säga lånat från andra håll för att tala om denna praktik på ett meningsfullt sätt. På ett allmänt plan är detta hur jag förstår "orsaken" till den förkjutning av matematikens betydelse som Pestalozzis bildningstänkande resulterade i.

De två viktigaste skillnaderna jämfört med tidigare var, menar jag, för det första att matematik nu blev något för barn – inte bara något barn "kan lära sig", utan något alla barn behöver. För det andra blev den något som bara kan komma barnen till godo genom en innötning som, menar man inom detta sätt att tänka, resulterar i matematisk bildning. Viktigt att observera är nu att dessa två aspekter av de matematiska studiernas väsen för Pestalozzi utgjorde delar av den "bildningsmetafysik" jag beskrivit ovan. Han såg form och antal som fundamentala aspekter av verklighetens väsen. Han såg ett riktigt skådande av detta väsen som uppfostrans främsta uppgift. Han trodde att en förmåga till sådant skådande bara kunde uppnås genom stora mått av träning. Och slutligen såg han en viss typ av elementär aritmetik och geometri som just det man borde träna på.

Till saken hör att det inte bara var matematiken som fick nya egenskaper under 1800-talet. Inte minst utgör termen "barn" en viktig del av det sammanhang som Pestalozzis skolmatematik kom att konstituera. Det är "barn" som måste möta matematiken för att utvecklas, det är barnet som måste bildas genom innötning, och det framstår dessutom som uppenbart att "barnet", när det tog plats i den skolmatematiska diskursen, inte kan skiljas från sin sociala bestämning som "blivande arbetare" eller blivande del av samhällets lägre skikt.

Min poäng är nu att de betydelser som genom Pestalozzis metafysik tillskrevs matematiken och barnet kom att leva vidare, även sedan själva metafysiken blivit bortglömd. De kom att bli "objektiva" egenskaper hos matematiken och barnet. I och med detta kom den undervisningsmetod som på Pestalozzis tid var förankrad i ett specifikt tänkande om bildning som uppfostrans mål, att istället framstå som en nödvändig följd av hur den objektiva verkligheten är.

Min tes är att barnet och matematiken utgör så att säga komplementära diskursiva element, vilka spelar en central roll i det "borgerliga" samhällets sätt att förstå den grundläggande undervisningens mål och medel, två element som tog form i europa kring sekelskiftet 1800, och som kom till Sverige under 1800-talets lopp. "Barn" behöver möta matematiken tidigt; "matematik" är något som alla barn behöver och som bara kan komma dem till godo genom oändliga mängder helst glädjefyllt arbete, under en stor del av deras uppväxt.

Det är intressant att jämföra detta sätt att tala om grundläggande undervisning med hur Fineman beskrev syftet med sin växelundervisningsskola. Som jag påpekat många gånger präglades växelundervisningsdiskursen av en påtaglig uppriktighet rörande denna undervisnings mål. Dem syftade först och främst till att göra de blivande arbetarna laglydiga. Fineman talade om att tillbedjande erkänna något högre över sig som "sann frihet".[1] Matematiken och barnet erbjöd, kan man säga, ett sätt att tala om i grunden samma sociala formningsprocess på ett mer tilltalande sätt. Istället för att säga att blivande arbetare behöver disciplinerande uppfostran, kunde man säga: barn behöver undervisning i matematik.

En skolmatematik i periferin

[Här skall infogas en sammanfattande avslutning av den historiska redogörelsens första del, där jag knyter an till de tre frågorna i avhandlingens inledning. Poängen är att de praktiker som nu tagit from, ännu tillhörde samhällets periferi, men att de objekt de kretsade kring i stor utsträckning var "färdiga", fyllda med egenskaper, vilka kom att i stor utsträckning ligga fast och sätta viktiga gränser för sättet att

[1] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*, s. xxxiii.

tänka, tala och handla under den följande process genom vilken skolmatematiken fick en allt mer betydelsefull roll i samhället.]

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Del 2: Skolmatematiken breder ut sig

7. Matematiken tar plats i folkskola och läroverk

Det här kapitlet handlar om den svenska skolmatematiken decennierna efter 1850, med fokus på den skolmatematik som kretsade kring undervisning av barn. Efter en inledning, där jag diskuterar det faktum att matematik vid denna tid höll på att ett "stort" skolämne, följer en redogörelse av den specifikt skolmatematiska diskurs vilken som en följd av denna kvantitativ expansion nu började ta form. Först beskriver jag hur man talade om de mål man hoppades att skolmatematiken skulle leda till. Dessa kontrasterar jag sedan mot den vid denna tid allt mer utbredda uppfattningen att skolmatematiken i praktiken i väldigt liten utsträckning motsvarade de högt ställda förväntningarna. Jag går sedan igenom den rika uppsättning undervisningsmetoder med vars hjälp man menade sig kunna övervinna allt det som tidigare hade hindrat skolmatematikens framgång. Som vanligt avslutas kapitlet med en sammanfattande analys.

Under denna period började en diskussion komma igång rörande kvinnors plats i samhället. En i och för sig perifer del av denna diskussion rörde huruvida det var lämpligt att kvinnor fick undervisning i matematik. I förhållande till mina syften är detta huvudsakligen ett stickspår. Vad som sägs sprider å andra sidan extra ljus över synen på matematik och skola. Jag tar upp detta ämne sist i avsnittet om skolmatematikens mål, och fokuserar där på vad man i min terminologi kan kalla matematikens potential att bilda kvinnan.

Matematiken bereder ut sig

Kring mitten av 1800-talet började matematik ta allt större plats i den svenska offentliga skolan. Sverige fick sin första folkskolestadga 1842, och den markerade att idéer om folkundervisning nu allt mer började omsättas i praktisk verklighet. "[D]e fyra Räknesätten i hela tal" var en av de saker folkskoleeleverna skulle lära sig.[1] Ämnet räkning ansågs vida mindre betydelsefullt än ämnena kristendom och modersmålet, men bara genom att vara en föreskriven obligatorisk del av undervisningen kom räkneundervisningen, genom folkskolans successiva expansion, att få en kraftigt ökande betydelse i det svenska samhället. Parellellt med detta händelseförlopp i folkskolan tog matematiken, genom en följd av förordningar (1849, 1856 och 1859), plats som ett tämligen "stort" ämne i läroverket, vid sidan om de klassiska språken. Ett par år senare, 1862, togs matematiken upp i den mogenhetsexamen som då utgjorde läroverksstudiernas slutpunkt, vilket resulterade i att realämnena togs på större allvar.[2]

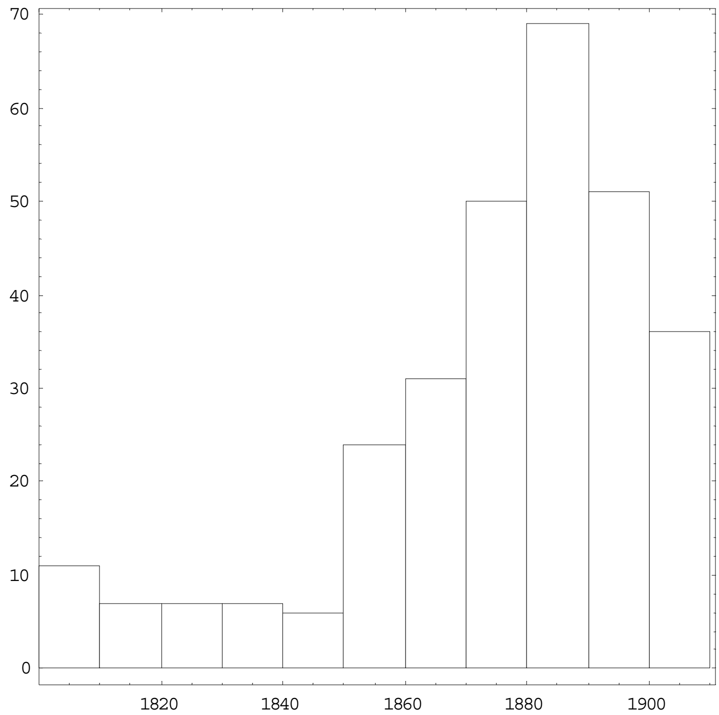
En bild av den kvantitativa expansion som dessa två sammanhängande förändringar innebar ges av diagrammet nedan, som visar antalet nya läroböcker med ordet "aritmetik" eller "räkning" i titeln som publicerades under varje decennium under 1800-talet.

---

[1] *Kongl. Maj:ts Nådiga Stadga angående folk-underwisningen i Riket; Gifwen Stockholms Slott den 18 Junii 1842,* (Falun: J. S. Åkerbloms Boktryckeri, 1844), 10.

[2] Axel Theodor Bergius, "Om skolundervisningen i Matematik," *Pedagogisk Tidskrift* (1868): 221; *Kongl. Maj:ts nådiga Stadga angående Afgångs-examen wid Rikets högre Elementar-lärowerk; Gifwen Stockholms Slott den 11 April 1862, Swensk författnings-Samling* (1862).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf



Figur 6. Antalet nya läroböcker i aritmetik och räkning som kom ut under varje decennium under 1800-talet, med utgångspunkt från poster registrerade i Libris. Varje ny titel har räknats en gång. Tillbakagången kring sekelskiftet 1900 visar på en tilltagande centralisering och kontroll av läromedelsproduktionen.

Man ser att läroboksförfattandet inte kom igång förrän på 1850-talet, och det är precis kring 1850 som redogörelsen i det här kapitlet tar sin början. Vad som står i fokus för det här kapitlet är den offentliga diskussion rörande skolmatematik vars omfång växte från 1850-talet till slutet av 1880-talet. Denna diskussion fördes i stor utsträckning genom läroböcker i matematik, och mot slutet av perioden även i stor utsträckning i de då nystartade lärartidningarna. Under denna period vad det genom läroböcker som nyheter introducerades i den svenska skolmatematiken.

Man ser i diagrammet att antalet olika titlar per decennium går ner efter 1880-talet. Detta är ett uttryck för en tilltagande centralisering, och ökande byråkratisk kontroll av vilka läroböcker som användes i såväl folkskola som läroverk. I och med detta förändrades villkoren för den skolmatematiska diskussionen. Att skriva en lärobok innebar från denna tid inte längre att ge ett förslag till hur undervisningen borde gå till, utan att implementera en centralt framtagen kursplan. Rörelsen mot en allt mer centraliserad svensk skolmatematik blir påtaglig från slutet av 1880-talet, och pågår sedan fram till omkring 1970.

Fokus i det här kapitlet ligger emellertid på perioden från omkring 1850 till början av 1880-talet, vilken tvärtom präglas av en frånvaro av central styrning, och därmed en stor mångfald av ståndpunkter rörande skolmatematiken.

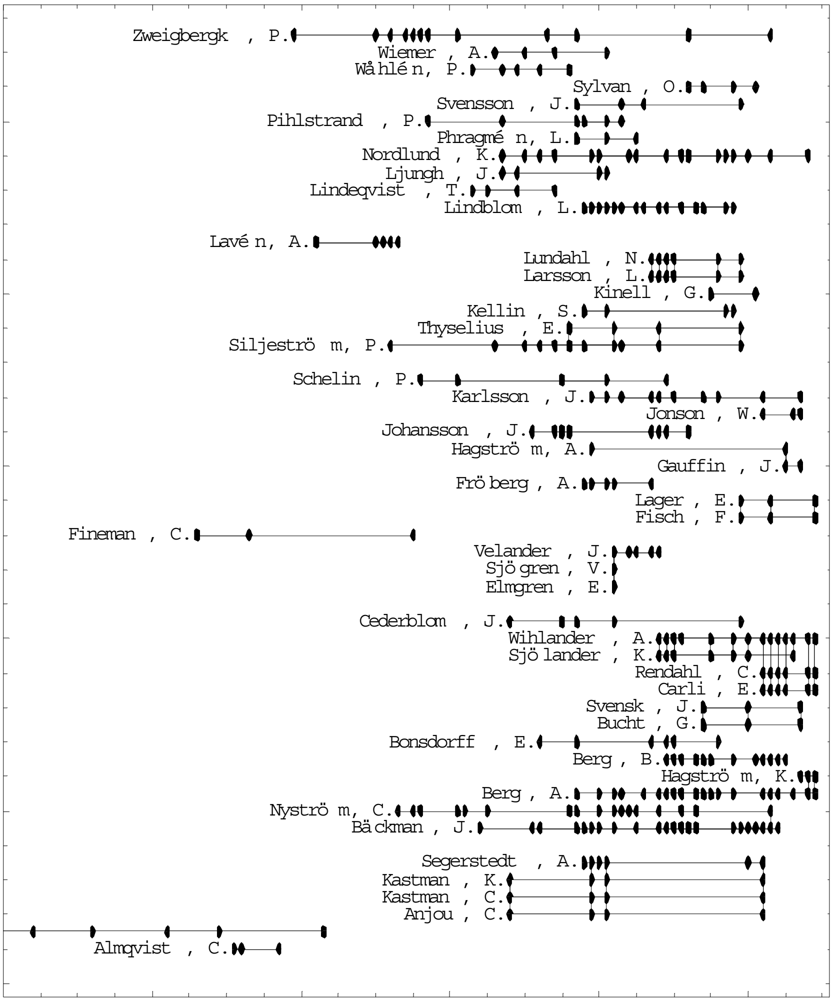
En skolmatematisk diskurs tar form

Ett påtagligt faktum är att det i diskussionen knuten till grundläggande matematikutbildning aldrig fanns någon skarp gräns mellan läroverk och folkskola. Jag kan se två sammanhängande förklaringar till detta. För det första förknippades räknekonsten sedan tidigare med det praktiska livet och därmed också med samhällets lägre skikt. Den rörde sig därmed så att säga underifrån in i läroverket, en rörelseriktning som kontrasterade skarpt mot de klassiska språken, vars kännetecken var just deras distans till det låga och praktiska. En andra förklaring till frånvaron av skarpa gränser kan dessutom hittas i att motståndet mot matematiken och de realbildande ämnena var som starkast just i läroverket. En av de realbildande ämnenas talesmän, matematiklektorn vid Nya Elementarskolan i Stockholm Axel Theodor Bergius, påpekade 1849 det konstiga att realbildningen introducerades i "[d]en lägre folkbildningens skola", medan den nekades eleverna i "den högre lärdomsskolan".[1] Införandet av realbildande ämnen i folkskolan krävde inget övervinnande av institutionaliserade maktstrukturer på det sätt som var fallet i läroverket. På ett karaktäristiskt sätt riktade Bergius i samma artikel skarp kritik mot studiet av klassiska språk. Han skriver:

[1] Anders Theodor Bergius, "Är tiden inne, att åt naturvetenskaperna anvisa deras rätta plats inom skolan?" *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1849): 78.

> Vi äro deremot fullt öfvertygade, att i detta pinsamma inlärandet af de latinska och grekiska paradigmerna, i detta förvända sätt att tvinga gossen att läsa ett så fremmande språk som något af dessa båda, förrän han fullt ledigt kan läsa och förstå sitt eget modersmål, bör sökas rätta anledningen till den bäfvan och skuggrädsla, hvarmed gossen betraktar skolväggarna, och hvaraf vi ännu efter mer än 20 års förlopp behålla ett friskt minne.[1]

Då matematiken successivt fick allt större betydelse kom därför snarare folkskolan än läroverket att driva på denna rörelse. Samtidigt var givetvis de materiella och praktiska förutsättningarna för undervisning gynnsammare i läroverken, vilket gjorde att läroverket och folkskolan kom att på ett i och för sig ganska komplicerat sätt bli "likvärdiga" i den skolmatematiska diskussionen. Böcker skrevs ibland för särskilda skolformer, men de böcker som blev populära tycks ha funnit vägar såväl från läroverk till folkskola, som i motsatt riktning. Detta var en tid då många lärare tog chansen att skriva en egen lärobok. Resultatet blev en tämligen mångfacetterad läroboksflora, inom vilken även tämligen udda läroböcker hittade en (mer eller mindre lokal) publik. Nedanstående figur visar några av de mer populära författarna av läroböcker i aritmetik under 1800-talet.



Figur 7. Översiktskarta som visar de författare med minst tre publicerade läroböcker i aritmetik eller räkning från 1800 till 1910, registrerade i Libris. Varje linje representerar en författare. Varje punkt representerar en titel.

Varje linje representerar en författare. Varje punkt representerar antingen en ny upplaga av en tidigare bok, eller en helt ny bok. Till exempel känner vi från tidigare kapitel igen C. O. Fineman. De två första punkterna på hans linje (i mitten av figurn) visar upplagorna 1826 och 1833 av hans *Lärobok uti räknekonsten, lämpad efter vexelundervisnings-methoden.*[2] Punkten längst till höger på hans linje representerar

[1] Ibid.: 80.
[2] Carl Olof Fineman, *Lärobok uti räknekonsten, lämpad efter vexelundervisnings-methoden* (Stockholm: 1826); Carl Olof Fineman, *Lärobok uti räknekonsten, lämpad efter vexelundervisnings-methoden.: 1:a - 3: cursen. 2:a uppl* (Stockholm: 1833).

hans *Tabula och förberedande öfningar till de fyra allmänna räknesätten, reduction af mått, vigt och mynt samt bråk, så väl vanliga, som decimaler* som publicerades 1855. Alla uppgifter är hämtade från den nationella bibliotekskatalogen LIBRIS, vilket gör att kartan inte nödvändigtvis är fullständig. Figurns syfte är att ge en översikt.

Det är egentligen bara under den period som står i fokus för det här och det följande kapitlet, det vill säga ungefär från 1850-1890, som man kan tala om den svenska skolmatematiska diskussionen i termer av ett "rum av ståndpunkter" i en Bourdieusk mening. Den matematiska undervisningen i läroverk och folkskola utgjorde diskussionens gemensamma referenspunkt. Erfarenhet från, eller åtminstone ambitioner rörande denna undervisning utgjorde det relativt blygsamma villkoret för att kunna delta i diskussionen. Den mångfald av betydelser som vi i tidigare kapitel sett tillmätas såväl matematiken, undervisningen, och det barn som utgjorde undervisningens föremål, skapade utrymme för en å ena sidan mångdimensionell, men å andra sidan i viss mån enhetlig, diskussion. Det var uppenbarligen ganska lätt att skaffa medel till att få ett läroboksförsök i tryck, och många visade intresse för att markera sina egna läroböckers förtjänster i förhållande till de böcker som fått mer allmän spridning, vilket gör att man kan tala om det Bourdieu kallar "fälteffekter".

Den specifikt skolmatematiska diskurs som vid denna tid började ta form hade några karaktäristiska drag som jag tror kan knytas just till att skolmatematiken vid denna tid nått en relativt säker ställning i det svenska samhället. Från denna tid blev det nämligen mycket vanligt att inleda ståndpunkter rörande skolmatematiken med en beskrivning av dess tidigare och samtida brister, för att med detta som utgångspunkt presentera sina förslag till hur den skulle kunna förbättras. Min poäng är att denna kritiska hållning knappast kan ha utgjort någon framgångsrik strategi i ett samhälle i vilket det var en öppen fråga om matematiken över huvud taget skulle ha någon plats i skolan. Skolmatematikernas sätt att tala pekar därför mot att denna grundläggande fråga vid denna tid hade avgjorts till de matematiska studiernas fördel. Det var det faktum att matematikens plats i skolan nu kunde tas för given, som skapade förutsättningar för den kritiska diskussion jag strax skall redogöra för.[1]

Låt mig tydliggöra hur detta sätt att tala – vilket jag alltså kommer att ge många exempel på nedan – kan tolkas med utgångspunkt från mitt teoretiska ramverk. En central roll i diskussionen spelar föreställningen att det är något som *hindrar* skolmatematikens framgång. Tydligt framgår att det som hindras är matematiken. Detta innebär att man tillmäter matematiken en sorts *potential*, vilken så att säga "av sig själv" skulle leda till skolmatematikens högre mål om bara ingenting stod i vägen. Med mitt teoretiska ramverk kan man förstå detta som att matematiken i diskussionen fungerar som ett sorts sublimt objekt eller en nodpunkt, genom vilken de högre målen så att säga knyts till den praktiska verkligheten.

I och med detta upprättas en tydlig, och från denna tid för skolmatematiken typisk, skillnad mellan å ena sidan matematiken och å andra sidan skolan. Matematiken förknippas genom sin sublimitet med de högre mål som skolmatematiken skall leda till. I och med att matematiken antas i själv bära på en potential att leda till dessa mål, framträder skolan därmed som något ganska entydigt negativt. Den framträder som det som hindrar matematikens potential att komma eleverna till godo. Hindret förknippas med en felaktig metod, vilket gör att diskussionen kan kretsa kring de nya metoder med vars hjälp hindren skall undanröjas.

Med utgångspunkt från mitt teoretiska ramverk kan man säga att detta sätt att uppfatta skolmatematikens problem motsvarar en symbolisk identifikation med skolmatematiken, vilken implicerar en imaginär identifikation av matematiken som det (sublima) objekt skolmatematiken kretsar kring.

7.1. Skolmatematikens mål

Låt mig som en inledning till min redogörelse för de mål man hoppades att skolmatematiken skulle leda till under perioden 1850-1880, presentera några citat ur häftet *Pedagogik* i rektorerna Anjou och bröderna Kastmans *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare* som gavs ut i en mängd upplagor från

[1] Stöd för detta resonemang ges bland annat av att det gjordes försök att utesluta denna typ av "intern" kritik i takt med att matematikens plats i skolan blev (i en relativ mening) mer osäker under första halvan av 1900-talet. Månandet om en enhetlig positiv hållning från skolmatematikens sida framgår i många av de artiklar av C. E. Sjöstedt som från och med 1933 publicerades i *Tidning för Sveriges Läroverk*, tex. C. E. Sjöstedt, ""Matematikherravälder"," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1933); C. E. Sjöstedt, "Studentuppgifterna i matematik," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1949). C. E. Sjöstedt, "Den "orimligt svåra" matematikskrivningen," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1950).

1868. Denna text är, som titeln anger, knuten till folkskolan, vars undervisning först och främst syftade till religiös uppfostran. Så här uttryckte man det:

> Menniskan är icke vid sin födelse, hvad hon kan och bör vara [...] hon är missrigtad, syndig. [...] Menniskan har dock af Gud undfått anlag [...] men dessa äro till en början helt outvecklade och ligga i ett slags dvala. De måste utifrån väckas och lifvas, för att komma till någon utveckling. [...] Sammanfattningen af all den inflytelse, den ledning och hjelp, hvarigenom en menniska föres fram till sin höga bestämmelse, kallas uppfostran.[1]

Denna beskrivning passar bra med tolkningsmodellen ovan där jag beskrev skolmatematiken i termer av potential och hinder. Barnet konstitueras som något som inte är vad det borde vara, men som å andra sidan bär på "anlag". En följd av detta synsätt är att uppfostran måste rikta sig bemästrande och formande mot barnet så som det är, det vill säga "syndigt", men vårdande och närande till något som antas finnas förborgat "i" barnet, nämligen anlagen som skall utbildas. Man kan här se hur bland annat de egenskaper som tillmättes matematiken får en tämligen specifik metafysisk inramning. Angående våra olika "förmågor" skriver Anjou och bröderna Kastman:

> den förmåga, genom hvilken vi kunna bruka dessa trenne inre sinnen rättskänsla, skönhetssinne, sanningskänsla till att omedelbart uppfatta, eller varseblifva, godt, skönt och sant i deras motsats till ondt, fult och falskt, kallas förnuftet. [...] Men för att förnuftet skall verkligen uppfatta det öfversinliga, behöfves uppfostran. [Gud] öfvar denna uppfostrande inverkan antingen omedelbart (tex. ingifvelsen) eller medelst sådana förnuftiga varelser, hvilka sjelfva erfarit kraften af hans helgande inflytelse: d.v.s. isynnerhet genom fromma, goda och sedliga menniskor. Och en sådan inflytelse är det just, som vi kalla uppfostran.[2]

Även om citatet inte handlar om matematik, är det lätt att se hur detta synsätt passar både med 1700-talets föreställningar om matematiken som redskap för att göra tänkandet logiskt och rationellt, och Pestalozzis idéer om hur matematiken, så att säga genom naturen, kan forma människan till en harmonisk varelse. Väldigt tydligt syns här hur barnet inte tillmäts någon förmåga, eller för den delen rätt, att själv bedöma och uttala sig om sina omständigheter. Denna rätt har tvärtom läraren, som explicit framställs som Guds företrädare. I sin förlängning blir därmed såväl matematiken som lärarens Guds redskap att rena barnet från synd. Relationen mellan detta allmänna mål, och "förmedling av kunskaper" kommer att spela en central roll i det följande, och det kan därför nämnas att man också talar om den

> fara, som ligger i ett omåttligt uppdrivande af dessa kunskapsfordringar. I flere länder begynner man redan med oro varseblifva de hotande följderna af en osund öfverbildning, som naturligtvis framkallats af ett ensidigt uppdrifvande af det intellektuella lifvet utan ett lika sorgfälligt sträfvande för det ännu vigtigare sedliga lifvet.[3]

Vad gäller folkskolan ser man alltså en strävande efter balans mellan två olika mål: den sedliga bildningen, och förmedlandet av kunskaper. Diskussionen rörande läroverket var snarlik, med den huvudsakliga skillnaden att man inte talade om bildning i lika explicit religiösa termer.

Bildning

På ett övergripande plan kan man säga att man ville att de matematiska studierna skulle leda till å ena sidan bildning och å andra sidan praktiskt nyttiga kunskaper. Mer specifikt kan man dock skilja mellan en mängd olika varianter av dessa högre mål. Vanligt vid denna tid var att snarare knyta an till 1700-talets idéer om rationalitet och logiskt tänkande än till Pestalozzi. Matematiklektorn F. W. Hultman skrev uppskattande om Per Adam Siljeströms *Lärobok i geometrien till folkskolornas tjenst*, främst syftande på just det faktum att Siljeström, i motsats till andra författare, inkluderat en mängd bevis i sin bok. "Genom geometriens införande i [folkskolorna]", skrev Hultman,

> blir efterhand hela massan av vårt folk i tid öfvadt att tänka följdriktigt. Då man pedagogiskt studerar geometrien, förvärfvar man sig inom kort en viss färdighet att lösa problemer. Denna förmåga alstrar förtroende till

[1] Christofer Ludvig Anjou, Carl Kastman, och Knut Arvid Kastman, *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Pedagogik.*, 4. uppl. utg. (Karlstad: 1876), s. 3-4.
[2] Ibid., s. 14.
[3] Ibid., s. 45.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

> ens eget förstånd, så att man dels granskar noga hvad man hör och ser, innan man dömer och handlar, dels ej fruktar att höra sina egna åsigter och påståenden diskuteras, och att gifva med sig, om man ser sig öfverbevisad. Så stort inflytande på charakteren har förmågan att se hvad som är sannt och hvad som icke är sannt. När härtill kommer geometriens praktiska nytta, kan man ej nog uppskatta vigten af denna vetenskaps upptagande såsom läroämne i våra skolor.[1]

Typiskt är här att Hultman nämner både vad man, trots att Hultman inte använder detta ord, kan kalla ett bildningsmål, och målet praktisk nytta. Geometrin får fungera både som redskap att i undervisningen verka bildande på människan och som människans praktiska redskap. Siljeströms lärobok i geometri för folkskolorna var inte alls, som Finemans eller Lagerhamns, begränsad till blott praktiskt ritande. Tvärtom innehåller den en rad euklidiska bevis. Han skriver själv i sitt förord:

> Det skall kanhända förefalla en och annan nog sangviniskt att hoppas få se någonting sådant infördt i folkskolan. Men för det första är alldeles påtagligt, att det är ett sjelfskrifvet läroämne i den *högre folkskolan*; och för det andra finner förf. för sin del icke det ringaste hinder för att äfven i en vanlig folkskola meddela detta pensum, eller någon del deraf, åtminstone åt en eller annan af de äldre och mera försigkomne lärjungarne. Det är verkligen högst angeläget att så sker. Den stränga geometrin är i allmänhet den bästa *logik*, och, särskilt i fråga om folkbildningen, såsom sådan af stor betydelse; och förf. tror fullt och fast att blott några få propositioner, väl och såsom sig bör genomgångne, skola gifva mer tankeodling än mycket hvarpå man nu lägger högsta vigt. Man måste komma ifrån den föreställningen, att i folkskolan endast är fråga om att meddela, såsom lexa, några "resultater" af vetande i allehanda ämnen. Det är nödigt, om folkbildningen skall utveckla sig till hvad den bör blifva, att folket lär sig de vägar – empiriens och reflexionens vägar – på hvilka man kommit till de ifrågavarande resultaterna.[2]

Det är här och i allmänhet tydligt att Siljeström betraktar folkundervisningen "ovanifrån" när han till exempel talar om arbetarnas särskilda behov. Inte desto mindre har Siljeström höga ambitioner med folkundervisningen – mycket högre än folkskolans egna talesmän! Han vill att även arbetarna skall få ta del av vetenskapen. Det finns en sorts uppriktighet i hans sätt att förhålla sig. Angående geometrin skriver han även:

> jemte tanken öfvar den äfven handlaget, ögonmåttet, iakttagelseförmågan och inbillningskraften. Man lär sig att med uppmärksamhet betrakta de yttre tingen, uppfatta deras former och kännetecken, upptäcka likheter och olikheter samt med noggrannhet och tydlighet uttrycka i ord, hvad man förnummit.[3]

Fredrik Sandberg (1833-1895) var filosofie kandidat och bland annat verksam som folkskoleinspektör och som rektor för folkskollärarinneseminariet i Stockholm. Hans *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan* ger ytterligare en bild av hur man inom folkundervisningen såg på geometriundervisningens syftesmål. Han skriver att geometrin

> väcker [...] formsinnet, stärker blicken för symmetri och regelbundenhet, hindrar det tanklösa och likgiltiga åskådandet af tingen; den uppklarar anden, skärper förståndet, väcker eftertanken, bildar sinnet för sanning, grundlighet och ordning meddelar säkerhet i omdömen och slutsatser, samt gifver åt hela tankeverksamheten en viss sjelfständig och säker hållning.[4]

Det var inte bara geometrin som man menade hade förståndsbildande egenskaper. Sandberg skriver att räkneundervisningens mål "icke allenast består uti att förbereda till det praktiska lifvet, utan derjemte och hufvudsakligast att utveckla och utbilda lärjungens andliga anlag och krafter".[5] Räkningen är, skriver han, "ett af de förnämsta medlen till menniskosjälens bildning", och att den har synnerligt stor betydelse för "förståndsutvecklingen".[6] För att precisera vad som är förståndsbildande beskriver han först ett induktivt arbete där lärjungen med utgångspunkt från exempel "måste uppsöka den regel, för hvilken exemplen äro bevis", och sedan hur man i det praktiska livet måste "koncentrera sina tankar" och "afskilja allt tillfälligt eller underordnadt" för att genom logiska resonemang dra allmänna slutsatser. Det är detta arbete som,

[1] F.W. Hultman, "P. A. Siljeströms Lärobok i geometrin till folkskolornas tjenst. Stockholm 1867," *Pedagogisk Tidskrift* (1867).
[2] Per Adam Siljeström, *Lärobok i geometrien, till folkskolornas tjenst* (Stockholm: Norstedt, 1867), förord.
[3] Siljeström, "Geometri för nybegynnare, af P. N. Ekman, Lektor i Matematiken vid Wexjö Gymnasium."
[4] Fredrik Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan* (Stockholm: P. Palmqvists förlag, 1870), 149.
[5] Ibid., 130.
[6] Ibid., 131.

menar han "måste utbilda tankens noggranhet, omdömets skärpa, öfverläggningens grundlighet och andens klarhet".[1]

Denna beskrivning utgör ett tydligt exempel på hur de egenskaper som tidigare uteslutande förknippades med geometrin nu så att säga förts över på räkneundervisningen. Till saken hör att de som författade 1842 års folkskolestadga inte säger ett ord om räkning som bildningsmedel. De talar helt enkelt om att lära sig räkna. Inte desto mindre kom folkskolan ganska omgående att omtolka sitt syftesmål, även vad gällde räkneundervisningen, i bildningstänkandets termer.

Vad gäller läroverket kan ytterligare exempel på framställningar av räkneundervisningens högre mål hämtas från Anders Wiemer, en av den matematiska vetenskapens företrädare i den skolmatematiska diskussionen kring mitten av 1800-talet och tillika läroboksförfattare. Angående Axel Theodor Bergius *Elementarkurs i Räknekonsten, jemte öfningar i Hufvudräkning* (1850) skrev han uppskattande: "[Bergius] ser i aritmetiken icke blott ett sätt, att bibringa mekanisk räknefärdighet, utan han betraktar den såsom ett uppfostringsmedel, hvilket den, rätt behandlad, onekligen är så väl, som hvarje annat undervisningsämne".[2] Det är, skriver Wiemer, "icke blott för att lära oss räkna, utan i främsta rummet för att lära oss tänka, som vi från de första skolåren sysselsätta oss med aritmetik".[3]

Axel Theodor Bergius föddes 1817 och var från 1847 lektor vid Nya Elementarskolan i Stockholm. Han skrev läroböcker i aritmetik, algebra och geometri kring 1850.[4] Han var en av realbildningens och matematikens mer vältaliga företrädare. Bergius inlägg i diskussionen är särskilt intressanta på grund av att man kan se en tydlig förändring av hans ståndpunkt framför allt rörande geometrin från ett par artiklar författade kring 1850, och en senare artikel från 1868.

I en av de tidigare artiklarna skriver han, helt i linje med Pestalozzi, hur geometrin lär människor att "uppfatta kropparna" och övar människans "inre åskådningsförmåga" – explicit med hänvisning till den euklidiska geometrin.[5] 1868 hade Bergius hunnit bli 51 år och den erfarenhet han samlat på sig tycks ha satt spår i hans syn på de matematiska studiernas mål och medel. Matematiken hade vid denna tid tillskansat sig en säker ställning i läroverket och det verkar som att det fanns tämligen allmänt stöd för uppfattningen att matematiken utgjorde ett bildningsmedel lika väl som de klassiska språken. Åtminstone var detta Bergius' ståndpunkt. Inledningen till hans artikel "Om skolundervisningen i Matematik" är värd ett långt citat:

> Matematiken ansågs redan hos Grekerna på den tid, då deras kultur stod i sin skönaste blomstring, såsom en nödvändig förberedelse för verldsvisheten, och har väl sedermera i alla tider betaktats såsom det undervisningsämne, som företrädesvis är egnadt att befordra den förståndsutveckling, som hvarje skola vill meddela den bildningssökande lärjungen. Liksom för all skolundervisning denna utveckling af förståndet eller af förmågan att med säkerhet bilda begrepp och slutledningar bör utgöra den hufvudsynpunkt, dit alla bemödanden skola riktas, så bör äfven särskilt den matematiska skolundervisningen så ordnas, att den i första rummet afser befordrandet af den *bildning*, som den till följd av sina inneboende egenskaper i så hög grad förmår meddela.[6]

Ett av flera märkvärdiga drag hos denna artikel är emellertid att han, efter denna pompösa men utifrån det skolmatematiska perspektivet tämligen okontroversiella inledning, sätter ett synnerligen betydelsefullt *men*. Bergius hade nu i viss mån ändrat ståndpunkt i fråga om vilken sorts bildning som undervisningen i matematik borde leda till. Från Pestalozzis allmänna bildning hade Bergius rört sig mot en uppfattning om bildning som *matematisk* bildning, och i andra halvan av inledningen till artikeln från 1868 talar han om betydelsen av att skolornas matematikundervisning utvecklas i takt med den matematiska vetenskapen.[7] Han vill därför i artikeln besvara frågan "huruvida [den matematiska skolundervisningen] i allmänhet vunnit den utveckling, som betingas af de stora framsteg, som matematiken under det förflutna år-

---

[1] Ibid.

[2] W., "Elementarkurs i Räknekonsten, jemte öfningar i Hufvudräkning. Af. A. TH. Bergius. Särskilt häftade svar medfölja. Sthlm, 1850.," *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1850): 222.

[3] Ibid.: 223.

[4] Axel Theodor Bergius, *Elementarkurs i algebra, innefattande läran om 1:a och 2:a gradens eqvationer* (Stockholm: 1853); Axel Theodor Bergius, *Elementarkurs i räknekonsten. Förra afdelningen.* (Stockholm: 1850); Axel Theodor Bergius, *Geometri och lineartekningar, utur åskådningen utvecklad, och för den första undervisningen utarb* (Stockholm: 1850).

[5] Bergius nämner i detta sammanhang Kant, Axel Theodor Bergius, "Om elementarundervisningen i matematik," *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1850): 87, 89.

[6] Bergius, "Om skolundervisningen i Matematik," 212.

[7] Jag utgår här från att skillnaden mellan Bergius artiklar kring 1850 och den enstaka artikeln från 1868 speglar en förändring i hans ståndpunkter. Tänkbart är givetvis även att skillnaderna mellan artiklarna beror på något annat.

hundradet tagit".[1] Istället för Pestalozzis kvarhållande vid utgångspunkterna tror Bergius nu på det bildande värdet av att "vidga lärjungens synkrets" och visa honom så mycket som möjligt av den vetenskapliga matematiken. Detta, menar han,

> medför mycket större förråd af verklig och säker bildning, än det ändlösa räknandet af sins emellan likartade öfnings-exempel, hvaraf våra matematiska läroböcker till en förvånande mängd öfverflöda, och hvilka öfnings-exempel till en stor del äro framstälda under en form, som är ingenting mindre än klart och lättfattlig. Vi bestrida visserligen icke vigten af väl valda öfnings-exempel, men vi vilje på det bestämdaste motsätta oss det missbruk, som dermed dagligen bedrifves i våra skolor, der lärjungarna tvingas att göra många beräkningar, som aldrig under så invecklad form förekomma i det praktiska lifvet, eller, om de skulle i en framtid möta honom, af honom efter vunnen större insigt lösas på vida enklare och ändamålsenligare väg. Någon del af den tid, som användes för den all sjelfständig tankekraft dödande beräkningen af de tusentals siffer-exempel, hvarpå våra moderna räkneböcker öfverflöda, kan sannerligen bättre användas för lärjungens matematiska bildning.[2]

Vi kan här se att Bergius ståndpunkt har förskjutits från Pestalozzis bildningsideal mot en mer vetenskapsbejakande förställning om matematiken vilken mer liknar den som stod i diskussionens centrum under 1700-talet. Det är, menar Bergius, inte upprepandet av det enkla som leder till den önskvärda bildningen, utan arbetet med matematiken, och i synnerhet arbete med den vetenskapliga matematiken. Klart är emellertid, skriver han, att de flesta knappast har någon praktisk användning av denna matematik.[3] Bergius rörelse från bildning i allmänhet mot vetenskaplig matematik innebär alltså inte en rörelse bort mot själva bildningstänkandet i en allmännare bemärkelse. Han menar att även en människa som "i det praktiska lifvet aldrig kommit i tillfälle att tillämpa sina i skolan förvärfvade större insigter i matematik" och som dessutom "glömt största delen af hvad han i det afseendet inhemtat", ändå måste erkänna de matematiska studiernas stora värde, på grund av "den skärpa i omdömeskraft" och den "säkerhet i slutkonst" som de matematiska studierna fört med sig.[4]

Med det ovanstående hoppas jag ha visat att man i den skolmatematiska diskursen framställde både undervisning i geometri och undervisning i aritmetik som utmynnande i bildning, men att det samtidigt fanns en ganska stor spännvidd i hur man uppfattade denna bildning. Fler exempel kunde ha anförts för att belägga denna spännvidd, men kort sagt sträcker den sig från en uppfattning av matematik som ett redskap för tanketräning, via Pestalozzis "rena" bildningstänkande till en föreställning om bildning som *matematisk* bildning. Väsentligt är att man knappast diskuterade skillnaden mellan dessa olika sätt att tolka bildningsmålet. Kort sagt framstod bildning huvudsakligen som ett högre mål i allmänhet, konstituerat genom sin skillnad jämfört med de (blott) praktiskt nyttiga kunskaperna.

Nyttiga kunskaper

Som vi sett ovan knöts ambitionen att skolmatematiken skulle vara bildande ofta till praktiskt nyttiga kunskaper som en slags underordnad, men likväl viktig målsättning. Ibland ställdes emellertid förmedlandet av praktiskt nyttiga kunskaper i främsta rummet. Läroboksförfattaren och senare riksdagsledamoten Gullbrand Elowson var tämligen befriad från bildningsidéer. Han skrev:

> Det mål, som man vill vinna med undervisningen i Arithmetik, torde kunna angifva såsom en klar och tydlig uppfattning af lagarne för Arithmetikens räkneoperationer samt säkerhet och färdighet i dessa räkneoperationers användning i enskildt fall.[5]

Jag skall återkomma till Elowson i samband med min redogörelse för en av de metoder som ansågs befrämja just bildning, en metod han menade hade uppenbara begränsningar.[6]

I de anvisningar och råd som gavs ut i samband med 1859 års läroverksstadga kan man angående de matematiska studiernas mål läsa:

[1] Bergius, "Om skolundervisningen i Matematik," 213.
[2] Ibid.: 215. Samma argumentation finns i Kommissionen för behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor, *Underdånigt betänkande* (Stockholm: 1872), 6.
[3] Bergius, "Om skolundervisningen i Matematik," 215-16.
[4] Ibid.: 216.
[5] Gullbrand Elowsson, *Elementar-lärobok i aritmetik* (Uppsala: 1868), Företal.
[6] Den heuristiska metoden, vars karaktäristiska drag var att lärjungen skulle ledas att själv "upptäcka" matematiken. Man kan med utgångspunkt från citatet ana att Elowson inte kunde acceptera sådana idéer: det handlade för honom att "uppfatta" lagarna; inte att "uppfinna" eller "upptäcka" dem.

> Men då denna undervisning på ifrågavarande linie derjemte tidigt måste antaga en praktisk syftning och då största antalet af de lärjungar, om hvilka här är fråga, sannolikt kommer att välja lefnadsbanor, på hvilka matematikens tillämpningar blir behöflig, så får undervisningen icke heller lemna ur sigte nyttan och nödvändigheten af en flitig öfning i kunskapens användande, hvarigenom för öfrigt jemväl den teoretiska insigten vinner i klarhet och intresse.[1]

Här känner man igen argumentationen från kapitel 5 ovan, det vill säga att kunskaperna ansågs bli praktiska genom att de så att säga växte fram genom "övning på användning", en praktik som jag beskrev som en sorts "simulering" av det praktiska livet utanför skolan. Noteras bör också hur man återknyter denna övning på användning till det (rent) teoretiska, vilket utgör ett tydligt exempel på hur de bildningsmålet och det praktiska målet förbands med varandra på en mångfald olika sätt.

Ett exempel på hur de matematiska studierna förknippades med praktisk nytta i folkskolan kan hämtas från Sandberg. Han skriver:

> Vill t. ex. muraren eller grundläggaren uträkna, huru mycket sten som åtgår till en så och så stor mur; vill taktäckaren annorlunda än blott på höft bestämma massan af det material, som han behöfver använda för att täcka en så och så stor yta; vill tunnbindaren veta, huru stora de kärl, han är i begrepp att förfärdiga, bör vara för att rymma en bestämd qvantitet våtvaror – för hvar och en blir det nödvändigt att ega åtminstone någon kunskap i geometrien.[2]

Citatet är nästan som ett eko av Clavius och Vives retorik på 1500-talet om matematikens stora betydelse för det praktiska livets alla områden. Karaktäristiskt är hur det praktiska kunnandet konstitueras som i grunden geometriskt.

En mycket komplex ställning i diskussionen hade det som kallades "mekanisk" räkning. Ofta betraktades det mekaniska som något som borde undvikas. Samtidigt var man dock tämligen överens om att "mekanisk färdighet" – om den bara var förankrad i en riktig förståelse – var i viss mån nödvändig och önskvärd. Sandberg menade att lärjungarna behövde "lösa en mängd olika uppgifter" för att sedan kunna räkna "mekaniskt-ledigt". Han tillägger:

> En dylik mekanism är ingalunda förkastlig eller död, ty lärjungen är medveten om grunderna för sitt förfarande och kan alltså numera äfven tillåta sig åtskilliga genvägar för att dymedelst befordra snabbräkningen.[3]

Bergius skrev att man i och för sig måste förekomma lärjungarnas benägenhet att "söka förvärfva en blott mekanisk färdighet i räknekonsten".[4] Varje praktisk färdighet måste, menade han, nödvändigtvis vara förankrad i förståndet. Men när lärjungen väl förstått varför man gör på ett visst sätt, skriver han, "uppkommer den mekaniska färdigheten genom fortsatt öfning af sig sjelf, och en sådan färdighet bör ej föraktas, emedan den utgör ett nödvändigt och väsentligt hjelpmedel till befordrande af vidare framsteg".[5] Han skriver också:

> Under alla förhållanden i lifvet kan en större räknefärdighet nyttigt användas, och i många är den ovillkorligen nödvändig. För att blifva en skicklig räknare erfordras mycken öfning; och den tid, som inom skolan användes till dylika öfningar, kan derför anses väl använd.[6]

Positivt inställd till den mekaniska färdigheten var även telegrafdirektören C. A. Nyström som annars blev känd just för sina metoder för att bibringa lärjungarna "förståndsbildning". I förordet till sin *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran, med talrika öfningsexempel och särskildt häftad facitbok,* vilken vad gäller spridning är den lärobok under 1800-talet som kommer närmast Zweigbergks *Lärobok i räknekonsten*, skriver han att den mekaniska räknefärdigheten visserligen inte är att förakta utan att den tvärtom är "till en wiss grad önskwärd".[7] Typiskt för Nyström och den skolmatematiska diskussionen i allmänhet fram till slutet av 1870-talet, är för övrigt att han betraktar lärobokens exempel som medel att

---

[1] *Anvisningar och råd till Lärare, angående tillämpningen af de till Nådiga Stadgan för Rikets allmänna Elementarläroverk af den 29 januari 1859 hörande undervisningplaner,* (1859).
[2] Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, 149.
[3] Ibid., 137-38.
[4] Bergius, "Om elementarundervisningen i matematik," 341.
[5] Ibid.: 344.
[6] Ibid.: 83.
[7] C. A. Nyström, *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran, med talrika öfningsexempel och särskildt häftad facitbok*, 2:a förb.o.betydl.tillökta uppl. (äfven upptagande den nya indelningen af sorter) utg. (Stockholm: 1855 [1853]), förord.

nå just mekanisk färdighet, och att han av denna anledning ställer boken i ett motsatsförhållande till den muntliga undervisningen.

I häfte fem, *Räknekonsten i Folkskolan*, i *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare* kan man läsa att räkneundervisningens mål är att "sätta barnen i stånd att förstå och lösa de räkneuppgifter, som det praktiska lifvet förelägger hvar och en medborgare, hvad klass eller stånd han än må tillhöra".[1] Man kan notera en förskjutning jämfört med vad Agardh och Bruzelius 1808 i förordet till Pestalozzis *Elementar-böcker* skrev angående skillnaden mellan kunskap och bildning. De menade att behovet av kunskaper skiljde sig åt mellan olika klasser och stånd, och att därför endast en bildande undervisning kunde vara gemensam för alla. Nu kan man istället läsa att det finns räkneuppgifter som är gemensamma för alla. Fortsättningen pekar likväl mot det problematiska i detta påstående. Det står nämligen: "Skall lärjungen genom denna undervisning ledas till att förstå de uppgifter, praktiska lifvet erbjuder, så måste undervisningen vara *förståndsbildande*".[2]

Denna förening av de två målen bildning och nytta är karaktäristisk för skolmatematiken. Skolmatematiken syftade mot en mångfald av högre mål. Å ena sidan bildningsmål av olika slag, å andra sidan praktiskt nyttiga kunskaper. Både undervisningen i räkning och undervisningen i geometri ansågs leda till dessa mål. Låt mig nu säga något kort om hur dessa mål diskuterades i förhållande till undervisningen av flickor.

Matematik för flickor

Den första artikel jag hittat som specifikt behandlar matematik som undervisningsämne för kvinnor har titeln "En av dagens frågor" och var införd i *Tidskrift för hemmet* 1863. Pseudonymen St- skriver i denna artikel bland annat att:

> Geometrins värde i uppfostran är också ej blott det vetenskapliga, huru stort detta än må vara, utan det inflytande som den bör utöfva på vårt sätt att tänka och handla i det dagliga livet. Vi behöfva alla veta huruvida en sak, som underställes vårt bedömande är bevisad eller ej, samt hvari och hvarföre beviset är felaktigt. Vi behöfva alla lära oss att draga riktiga slutsatser från de facta och frågor, som förekomma inom kretsen af våra iakttagelser. Också skola vi i de flesta fall ej kunna handla rätt, om vi ej förmå att räsonnera riktigt, på samma sätt en blind man ej kan vandra säkert på en väg, hvilken han ej förut gått.
>
> Och har ett ämne af stor vigt mer än andra blifvit åsidosatt vid den qvinnliga ungdomens uppfostran, så har det väl just varit denna förmåga att reda begreppet och ordna tankeföljden. Också finner man äfven hos qvinnor med utmärktare anlag mycken oreda och oklarhet i begreppen, samt oförmåga att bibehålla ordning i tankeföljden och att i allmänhet länge fästa tankekraften vid ett ämne. Man måste derföre mången gång häpna öfver de snabba idéförbindelser, hvilka i ett nu leda samtalen till de mest olikartade ämnen.[3]

De argument som här anförs för införande av geometri i flickskolorna knyter an till det allmänna bildningstänkandet, men får intressant nog en extra knorr av vad som i citatet ovan beskrivs som en särskild oförmåga hos just kvinnor att "länge fästa tankekraften vid ett ämne".[4]

Det skrevs faktiskt flera läroböcker speciellt för flickor. Nyströms *Räknelära för fruntimmer* från 1853 var först.[5] I dess utformning kan man dock inte se några större spår av den särskilda målgruppen. Det kan man å andra sidan i P. Fr. Sievers *Räknebok för flickor* från 1871. Här handlar övningsuppgifterna om tyger, att handla mat, osv. Här är ett exempel ur introduktionen till allmänna bråk:

> 33. Fru Rosenqvist har 13 Rdr. Derutaf utgifver hon $\frac{19}{20}$:delar för kött. Huru många öre har hon då qvar?[6]

Den första kvinna som på allvar deltog i den skolmatematiska diskussionen var Anna Rönström. Hon gjorde entré under pseudonymen "Fr." genom en rad synnerligen välformulerade läroboksrecensioner

---

[1] Christofer Ludvig Anjou et al., *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Häftet V. Metodik: Räknekonsten i Folkskolan.* (Stockholm: Hjalmar Kinbergs förlagsexpedition, 1876), 3.
[2] Ibid.
[3] St-, "En av dagens frågor," *Tidskrift för Hemmet* (1863). Samma fråga tas upp av pseudonymen "en, ny" i samma tidskrift: ny en, "Om matematik såsom undervisningsämne för flickor, I och II," *Tidskrift för Hemmet* (1865). Se även Jenny Rossander, *Nya elementarskolan för flickor vid afslutningen af höstterminen 1871; Förberedande lärokursen för qvinliga elever; afhandling: om matematik och dess studium vid våra flickskolor* (Stockholm: 1871).
[4] St-, "En av dagens frågor."
[5] Carl Alfred Nyström, *Räknelära för fruntimmer: Omsl.: Med åtföljande särskildt häftad facitbok.* (Stockholm: 1853).
[6] Ibid.

publicerade i *Folkskolans vän* och *Svensk läraretidning* 1888-1890.[1] Givetvis trodde alla att "Fr." var en man och det väckte en hel del harm att "han" inte ville ge sig till känna. Rönström försvarade sin anonymitet med hänvisning till vikten av att "läsarne må tvingas att fästa sig uteslutande vid de skäl jag anför för mina påståenden", och fortsatte: "Sätter man ut ett namn, händer lätt, att med detta följer en del föreställningar, som icke höra till den ifrågavarande saken".[2] Vi har idag svårt att föreställa oss hur stor skillnad man vid denna tid gjorde mellan män och kvinnor, och hur svårt det därför hade varit för Rönström att få en läroboksrecension att bli tagen på allvar om hon undertecknat med sitt rätta namn.

Under eget namn skrev Rönström emellertid bara några år senare, 1893, i tidskriften *Verdandi*.[3] I artikeln "Geometrin såsom läroämne i flickskolan", vilken utgjorde ett referat från ett föredrag hon hållit vid femte allmänna flickolemötet i Lund, tar hon först upp problemet att den allmänna "opinionen" inte förstår att värdesätta geometrin som läroämne. Tydligen betraktades franska språket ett som lämpligare föremål för de unga kvinnornas studier. Rönström skriver:

> Man kunde väl förlåta franskan (jag väljer detta språk som exempel, därför, att det i de flesta skolorna upptager de flesta språktimmarna och frampressar de flesta tårarna), att den lägger beslag på så mycket af lärjungarnas tid; men hvad man däremot icke kan förlåta är, att kunskapen däri göres till en gradmätare på deras intelligens. Emellertid är det så, att ofta de bästa, de mest praktiska och originela flickorna stämplas såsom föga intelligenta, ja såsom "omöjliga", därför att de icke kunna lära sig franska.[4]

Det låter märkligt i våra öron, men tydligen intog vid denna tid studier av franska i flickskolorna en plats som sedan skulle bli karaktäristisk för matematiken.[5] Intressant är att Rönström låter geometrin representera en sorts välgörande svårighet. Med en typiskt poetisk formulering liknar hon den vid en "bärgsstig" som man måste vandra långsamt fram, under det att man "hinner att inprägla bilden af trakten i sitt sinne".[6] I och för sig tillstår hon – liksom de flesta andra i hennes samtid – att merparten av de svårigheter som är förknippade med geometriska studier är onödiga och har att göra med ämnets felaktiga behandling i skolan, inte desto mindre menar hon att ämnet som sådant *är svårt* och att det är som sådant det förtjänar sin plats i flickolan. Uppfostrarens uppgifter, skriver hon, "är väl dock icke att undanrödja alla svårigheter".[7] I linje med detta resonemang avslutar hon sin artikel på följande sätt:

> När den tiden kommer, då geometrin blir ett ämne, ej till prydnad blott, då tror jag, att den just skall hjälpa den unga flickan att förstå, att bildning är en allvarsam sak, är något, som skall tränga djupt och göra henne till en bättre och ädlare människa, och att den däremot icke är en mängd osammanhängande kunskapssmulor, samlade för att tagas fram emellanåt till andras skärskådande. Hon skall förstå, att vetandets skatter äro att förlikna vid de mäktiga ådror af ädla metaller, som rikta malmen, fastän de icke synas utanpå, icke vid det värdelösa glitterguld, som glänser i solljuset af andras bifall, men lemnar det inre tomt och kallt.[8]

[1] Fr., "Räknebok för folkskolan af L. T. Larsson, seminarieadjunkt, och N. Lundahl, folkskollärare. Tredje och fjärde årskurserna.," *Svensk Läraretidning* (1890); Fr., "Räknebok för folkskolorna af K. O. Sjölander och A. G. Vihlander. Häft. III och IV. Stockholm, P. A. Nordstedt söners förlag.," *Svensk Läraretidning* (1890); Fr., "Räknebok för folkskolorna utarbetad med ledning af folkskolelärobokskommitténs grundsatser af K. O. Sjölander och A. G. Vihlander. Häft. III och IV. Stockholm, P. A. Nordstedt söners förlag.," *Folkskolans vän* (1890); Fr., "Räknelära för folkskolan framstäld genom exempel enligt eqvationsmetoden af J. Thysell och P. Nordström. Första årskursen," *Svensk Läraretidning* (1888); Fr., "Räknelära för folkskolan, framstäld genom exempel enligt eqvationsmetoden af J. Thysell och P. Nordström. Första årskursen.," *Svensk Läraretidning* (1888); Fr., "Sjölander-Vilanders räknebok," *Svensk Läraretidning* (1890); Fr., "Svar [till K. O. Sjölander]," *Svensk Läraretidning* (1890); Fr., "Svar [till Thysell och Nordström]," *Svensk Läraretidning* (1889); Fr., "Thysell-Nordströms räknelära. Svar på "protester och medgifvanden"." *Svensk Läraretidning* (1889).
[2] Fr., "Sjölander-Vilanders räknebok."
[3] Där som många säkert känner till Anna Sandström gjorde pseudonymen "Uffe" känd för sina välformulerade kritiska samtidsreflektioner. Den intresserade hänvisas till Annika Ullman, *Stiftarinnegenerationen: Sofi Almquist, Anna Sandström, Anna Ahlström* (Stockholm: Stockholmia, 2004).
[4] Anna Rönström, "Geometrin såsom läroämne i flickskolan. Föredrag vid femte allmänna flickskolemötet i Lund.," *Verdandi* (1893): 153.
[5] Det måste sägas att Rönströms tal om "intelligens" hör till en senare period än den som står i fokus här. Att jag tar upp Rönströms artikel, som alltså är från 1890-talet, här och inte senare har att göra med att frågan om de matematiska studiernas relation till kvinnorfrågan är lite apart i förhållande till mina övergripande syften. Frågan om intelligens spelar en viktig roll i kapitel 9 och 10 nedan.
[6] Rönström, "Geometrin såsom läroämne i flickskolan. Föredrag vid femte allmänna flickskolemötet i Lund.," 147.
[7] Ibid.
[8] Ibid.: 158-59.

Geometrin har här fått en potential specifikt knuten till Rönströms kan man säga "romantiska" värden, den har blivit en osynlig ådra av ädel metall, som riktar den malm som de unga kvinnorna utgör, som gör henne till en "bättre och ädlare människa".[1]

En liknande bild av matematiken gav pseudonymen Robinson i en annan artikel i *Verdandi* samma år. Robinson menade att matematiken, i motsats till alla andra skolämnen, kunde förmedlas så att säga i sin "vetenskapliga form" även till riktigt små barn. I alla andra skolämnen, skriver hon "måste ju på detta tidiga utvecklingsskede in-magasinerandet af data samt dessas nödtorftiga ordnande medelst 'qvasi'-lagar förblifva hufvudsak".[2] Detta gäller dock inte matematiken, eftersom den "i sina elementer, aritmetik och geometri [är] på en gång ganska abstrakt och fullt åskådlig, åskådlig äfven för ett barns föga uppöfvade förmåga af ordnande åskådning.[3] Här tillmäts med andra ord matematiken en särställning i förhållande till till barnet.

I förbigående kan slutligen noteras vad Robinson skriver om lärarens betydelse för de matematiska studierna: "Redan i andra skolämnen är det hårdt att ha fått olämplig lärare; i matematik är det ett slags förståndsmord".[4] Denna mening utgör ett typiskt exempel på hur man allt oftare kom att beskriva den skolmatematiska verkligheten som något i det närmaste *hemskt*. Under 1900-talets första decennier tog allt fler kvinnor plats i den skolmatematiska diskussionen – typiskt nog just då denna diskussion var på väg att förlora sitt inflytande, i takt med att makten över skolmatematiken förskjöts från läroboksförfattare till internationellt bevandrade, givetvis nästan uteslutande manliga, "experter". I dessa texter kan man hitta en mängd målande och kraftfulla skildringar av just skolmatematikens mörkare sidor.[5] Jag skall strax komma till hur dessa kom till uttryck under den tid som står i fokus i detta kapitel. Jag skall dock som avslutning på detta avsnitt som skolmatematikens mål ge några exempel på de uppgifter som eleverna, efter avslutad lärogång i läroverket, förväntades kunna lösa. Till saken hör för övrigt att folkskolestudierna vid denna tid inte ledde fram till varken examen eller betyg. Man fick i och för sig betyg, men det var inte förrän långt senare på 1940 talet som dessa betyg blev mer allmänt erkända och kunde fungera som en form av symboliskt kapital.

En blick på mogenhetsexamen

Om man tittar på den "mogenhetsexamen" som de matematiska studierna i läroverket från 1862 skulle leda till får man en bild av skolmatematiken som kontrasterar ganska skarpt med de högre mål som beskrivits ovan.[6] Här syns på ett mycket tydligare sätt skolmatematikens band till sitt specifikt matematiska förflutna. Tabellen nedan visar tre av de uppgifter som gavs i mogenhetsexemen för latinlinjen 1867.

Tabell 10.Några av satserna gifna i skriftliga mogenhetsexamen h. t. 1867. För latinlinien.

6	Att i en gifven cirkel inskrifva 3 lika stora cirklar, som tangera hvarandra och den gifna cirkeln.
8	Af 2 silfverstänger, den ena innehållande 40 lod koppar och 60 lod rent silfver, den andra 20 lod koppar och 70 lod rent silfver, skall förfärdigas en bägare, som bör innehålla 10 lod koppar och 20 lod rent silfver, Hur många lod bör man taga af hvardera stången?
12	Ur ett med vatten fyldt kärl, som har form af en med spetsen nedåt vänd kon af 4 tums höjd och $1\frac{1}{2}$ tums basradie tömmes $\frac{3}{4}$ af innehållet på en cylindrisk flaska. Huru stor är hennes radie, om vattnet i henne efter påfyllningen står lika högt som återstoden af innehållet i det koniska kärlet?

Den första uppgiften tillhör den euklidiska geometrin, den andra är en tillämpning av det som i Roloff Anderssons räknelära kallas "beskickningsräkning" och som senare kallades alligations- eller blandningsräkning. Att det är metaller som blandas är alltså ingen slump, utan visar på "räknesättets" ursprung. Uppgift 12 visar att de matematiska studierna även lånade sina tillämpningar från naturvetenskapen. I nedanstående tabell visas tre av uppgifterna som gavs i samma examen fast för reallinjen.

Tabell 11. Några av satserna gifna i skriftliga mogenhetsexamen h. t. 1867. För reallinien

[1] Ibid.
[2] Robinson, "Mera om "Geometrin såsom läroämne i flickskolan," *Verdandi* (1893): 217.
[3] Ibid.: 218.
[4] Ibid.: 221.
[5] [referenser!]
[6] [förordningen från 1862]

17 Dela en gifven fyrsidig figur midt i tu medelst en rät linie, som går genom någon af figurns vinkelspetsar.

21 En köpmans handelvinst var årligen lika med $\frac{1}{4}$ af den förmögenhet, som han egde vid årets början; hans lefnadsomkostnader uppgingo årligen till $2,900$ r:dr. Efter tre år var han egare till $1\frac{1}{2}$ gång så stor förmögenhet, som då han började sin handel. Huru mycket egde han då?

28 Angif kortaste afståndet mellan cirkeln

$$4x^2 + 4y^2 - 24x - 16y = 0$$

och räta linien

$$y + 3x - 3 = 0$$

De tre uppgifterna exemplifierar tre viktiga områden som de matematiska studierna rörde sig inom: euklidisk geometri, borgerlig räknekonst och analys (vilken kan sägas förutsätta algebra, som också ägnades stort utrymme).

Vad jag vill att man noterar är det tämligen stora avståndet mellan dessa konkreta uppgifter, och de högre mål man menade att de matematiska studierna skulle leda till. I ett längre historiskt perspektiv kan man konstatera att skolmatematikens högre mål skiftat med i takt med vad som tillmätts högt värde i samhället. I början av 1900-talet börjar man tala om de matematiska studiernas betydelse för utvecklingen av elevernas skönhetssinne och deras kreativitet. Kring 1950-talet hade såväl dessa skönhetsideal som bildningsmålet blivit helt inaktuellt. Istället menade man att undervisningen i matematik skulle ge barnen en förmåga att uppfatta verkligheten "kvantitativt" och en förmåga att räkna "mekaniskt". Senare trädde värden som ekonomisk tillväxt in på den specifikt skolmatematiska scenen. Mot slutet av 1900-talet hamnade demokrati och aktivt medborgarskap i den skolmatematiska diskussionens centrum, liksom matematiken som redskap för kommunikation.

Dessa förskjutningar vad gäller de matematiska studiernas mål fick, som vi skall se i avhandlingens avslutande kapitel, tämligen marginella konsekvenser för vilken typ av prestationer man på ett praktiskt plan använde som mått på matematiska kunskaper. Om de diskursivt uttryckta mål jag refererade ovan utgjorde skolmatematikens sätt att framställa sig själv i förhållande till det omgivande samhället, så utgjorde examinationsuppgifterna skolmatematikens representation av den omgivande sociala och fysiska verkligheten. Det var denna "verklighet" som utgjorde skolmatematikens praktiska måttstock. Man bör ha det i minnet: allt tal om skolmatematikens framgång eller misslyckande handlar på ett praktiskt plan om elevernas prestationer i skolan.

7.2. Skolmatematikens hinder

Karaktäristiskt för den skolmatematiska diskussionen blev från 1850-talet en benägenhet att, ofta som inledning, ge en påtagligt negativ bild av skolmatematikens rådande tillstånd. Jag tolkar detta som ett uttryck för att skolmatematiken vid denna tidpunkt nått ett viss mått av autonomi och att dess ställning i samhället blivit i någon mening ohotad. Den negativa retoriken var säkert inte särskilt effektiv i förhållande till, säg, de klassiska språkens företrädare. Vad som krävdes för att beskrivningarna av skolmatematiken som misslyckad skulle framstå som ett argument *för* skolmatematik var nämligen ett uteslutande av vissa tankemöjligheter. Vad som krävdes var enkelt uttryckt att skolmatematiken i allmänhet togs för given som nödvändig.

Skolmatematikens ramar sattes av föreställningen att det ligger i matematikens natur att leda till de mål som skildrats ovan. Det vill säga att matematiken, såväl i egenskap av räkning som geometri, algebra och andra ämnen, till sin essens utgör något alla människan har nytta av och behöver, detta trots att de knappast hade någon nytta av *skolmatematiken* så som den i praktiken gestaltade sig.

Lika väsentligt som denna ofta förekommande inledning i skolmatematikernas diskussionsinlägg är hur de så att säga tog "nästa steg". I en retorisk mening var det givetvis nödvändigt att markera distans i förhållande till den "defekta" skolmatematiken. Temat för det här avsnittet är hur man gjorde detta.

Vad man gjorde kan beskrivas som två sammanhängande manövrar – vilket givetvis inte skall förstås som enbart "retoriska" utan tvärtom som i allra högsta grad knutna till den ontologi, grundad i symbolisk identifikation med skolmatematiken, som jag beskrivit ovan.

För det första skrev man att skolmatematikens misslyckande berodde på en felaktig metod, snarare än egenskaper hos de objekt (geometrin, räknekonsten) som skolmatematiken kretsar kring. *För det andra* skrev man att denna felaktiga metod hörde till det förflutna, ett skede i skolmatematikens historia som har passerats, och inte den samtida, aktuella, skolmatematiken.

Det märkliga är att man enkelt uttryckt kom att betrakta matematikens manifesta representation, siffrorna, symbolerna, formalismen, som just det som hindrade matematikens potential från att komma till sin rätt. Sist i detta avsnitt som skolmatematikens hinder skall jag redogöra för en diskussion mellan ovan nämnde Bergius och läroboksförfattaren Johan Otterström, vilken tydliggör den problematik som denna syn på matematiken ledde till.

Objektet och metoden

Jag skall här ge några exempel på hur man i den skolmatematiska diskussionen markerade en skillnad mellan å ena sidan matematiken – i egenskap av geometri, räkning eller mer specifikt euklidisk geometri – och å andra sidan skolan.

Geometrin

Det var framför allt geometrin som i den skolmatematiska diskussionen explicit tillmättes "inneboende" egenskaper. Bergius konstaterade att geometrin för lärjungarna ofta framstod som "en abstrakt och torr vetenskap". Men, skriver han,

> denna ungdomens obenägenhet för geometrien kan omöjligen härröra af annat, än en oriktig behandling af ämnet. Ty det vore eljest en högst besynnerlig företeelse, om en vetenskap, som företrädesvis sysselsätter sig med de i själen inneboende formerna, som lär att med klarhet och förstånd betrakta de yttre tingen, skulle vara främmande och oangenäm för menniskan.[1]

På ett karaktäristikt sätt inleder Bergius med en negativ karaktäristik av skolmatematikens tillstånd, som sedan leder över i en positiv karaktäristik av skolmatematikens objekt – här geometrin – och en konstitution av den felaktiga metoden som det negativa tillståndets orsak.

Samma figur återfinns hos Siljeström. Han skrev att geometrin är "en ibland de saker, som gossen först och lättast kan fatta och utöfva", och att "[o]m förhållandet visar sig annorlunda, så ligger felet ej i ämnets beskaffenhet, utan i behandlingssättet, som är för abstrakt och icke afpassat efter nybegynnarens fattningsförmåga".[2]

Även Sandberg gav uttryck för samma ståndpunkt: "Gifvet är, att i sjelfva det geometriska läroämnet, såsom sådant, kan misslyckandet icke ligga, ty i så fall skulle ju alla lärjungar utan undantag visa sig otillgängliga för detsamma".[3] Problemet ligger, skriver han, "i sättet, metoden för undervisningen".[4] I en recension av Jan Erik Johanssons *Folkskolans geometri* formulerar pseudonymen J. J-n problematiken på följande sätt:

> Geometrien är ett ämne, som på grund af såväl sin praktiska betydelse som sin förmåga att utveckla och skärpa tankeförmågan väl försvarar sin plats i skolan. Att detta ämne dock icke alltid förmår tillvinna sig något större intresse, beror nog till icke ringa del på en mekanisk behandling af detsamma. Det kan blifva 'dödande tråkigt', då undervisningen inskränker sig till meddelande af några torra, blott halft förstådda satser; men det kan ock blifva högeligen intressant och äfven för barn i folkskoleåldern njutbart, då det behandlas åskådligt, med ständigt vädjande till barnens erfarenhet och i egentlig mening praktiskt.[5]

Det finns här anledning om att påminna om redogörelsen ovan, framför allt i kapitel 3 och 6, om hur geometrin förknippades med sina positiva egenskaper. De tas här för givna, och får i det närmast ökad tyngd genom att kontrasteras mot de hindrande undervisningsmetoderna.

Räkning

Det var inte bara geometrin som gjordes till föremål för denna typ av retorik. Angående räkning kan man läsa följande:

---

[1] Bergius, "Om elementarundervisningen i matematik," 88.
[2] Siljeström, "Geometri för nybegynnare, af P. N. Ekman, Lektor i Matematiken vid Wexjö Gymnasium."
[3] Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, 149.
[4] Ibid., 150.
[5] J. J-n, "Folkskolans geometri af J. E. Johansson, folkskollärare.," *Folkskolans vän* (1890).

> Näppeligen gifves på det lägre undervisningsstadiet något bildningsmedel, hvilket är ägnadt att i lika hög grad som räkningen befrämja en allsidig utveckling. Den plats, räkningen för närvarande intaget bland barndomsskolans läroämnen, är också ganska förmånlig. Räkneundervisningen har likväl i allmänhet icke burit sådan frukt, man kunde vänta. Orsaken härtill måste sökas i en felaktig metod.[1]

Listan med exempel på denna retoriska figur kan göras mycket längre – den löper som en röd tråd genom skolmatematikens historia fram till våra dagar. I de ovanstående exemplen skymtar även mer exakt vilka aspekter av metoden man ansåg var geometrin till nackdel. Man talar om en undervisning som är allt för abstrakt, som består i meddelande av torra satser och mekaniska regler, och som framför allt inte är anpassad till barnens fattningsförmåga. Mot förmedling av satser och regler ställer man en undervisning som är åskådlig och praktisk.

Situationen är emellertid problematisk. Sandberg skriver om de två fel som måste undvikas. Å ena sidan "abstraktioner, som äro främmande för folkets sunda uppfattning", å andra sidan ensidigt fokus på den praktiska nyttan vilket leder till "andefattig mekanism [och] slentrianväsende".[2] Vad det handlade om var med andra ord att hitta en riktig medelväg – och just medelvägen kom att spela en central roll i den skolmatematiska diskussionen.

Euklides

Kritiken mot geometriundervisningen träffade i stor utsträckning Euklides *Elementa*. Jag har tidigare gett exempel på sådan kritik. Här följer ytterligare några exempel.

Det tillsattes 1869 en kommission för "behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor". I det betänkande kommissionens arbete resulterade i kan man läsa att Euklides *Elementa* är "behäftad med åtskilliga fel", att det i den "saknas viktiga satser" som borde tas upp i undervisningen, och slutligen att den är uppställd på ett sätt som ligger långt från "de grunder, enligt hvilka kommissionen [...] tänkt sig en lärobok i geometrien böra vara uppställd".[3] Siljeström ger en målande beskrivning av de resultat undervisning baserad på Euklides *Elementa* kunde leda till:

> Hvad resultatet är af deras användande såsom lärobok uti skolorna, det vet nog hvarje nybegynnare, som, fastän med god fattningsgåfva för öfrigt, likväl anser Euclides för skolans värsta buse; som i sitt anletes svett arbetar med dessa i sig sjelfva så förträffliga bevis, men hvilkas bevisande kraft och i synnerhet behöflighet han oftast icke inser, till dess han helt och hållet förlorar ur sigte sjelfva innehållet af hvad han läser; som till slut icke vet annat råd, än att inprägla alltsammans, satser och bevis, i minut, för att omsider möjligen lemna skolan, utan att af sina Euclideiska mödor medföra någon den ringaste vinst för sin bildning eller för det praktiska lifvets behof.[4]

I citaten ovan är det tydligt att kritiken mot Euklides inte tar sikte mot själva geometrin, eller ens mot Euklides framställning av geometrin. Utgångspunkten är framställningens relation till lärjungen och barnet. Det är som lärobok Euklides *Elementa* inte är lämplig. Med hänvisning till min tolkningsmodell kan man säga att kritiken konstituerar Euklides *Elementa* som en blott yttre representation, annan än det objekt som bär på geometrins potential.

Metoden och det förflutna

Konstitutionen av den felaktiga metoden som orsak till skolmatematikens misslyckande hängde ofta samman med ett förknippande av denna felaktiga metod med skolmatematikens förflutna. Man åstadkom så att säga en disidentifikation med det rådande tillståndet i två steg: först skiljde man misslyckandet från objektet, genom att förlägga det i en "tillfällig", i förhållande till objektet extern, metod; sedan förde man denna felaktiga metod till skolmatematikens förflutna. Detta argumentationssätt blev karaktäristiskt för skolmatematiken. Lika karaktäristiskt blev faktiskt vad man på en mer konkret nivå tillskrev det förflutna. En allmän bild av skillnaden mellan den gamla och den nya pedagogiken ges av nedanstående citat:

---

[1] A., "Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar af K. P. Nordlund."
[2] Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, 157.
[3] Kommissionen för behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor, *Underdånigt betänkande*, 29.
[4] Siljeström, "Geometri för nybegynnare, af P. N. Ekman, Lektor i Matematiken vid Wexjö Gymnasium."

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Det gifves väsentligen två sätta att undervisa barn på, kännetecknande genom sin uppfattning af det menniskoväsen, som skall mottaga undervisningen. För den ena, den gammalmodiga, småningom vikande, men ännu långt ifrån fullständigt öfvervunna metoden är barnasjälen att likna vid ett magasin eller ett skeppsrum med många afdelningar och behållare, som vänta att blifva fylda, och den pedagogiska uppgiften är då att fullpacka dessa rum med så många väl sorterade och väl etiketterade kunskaper som möjligt. Huruvida rummen egentligen egna sig för att mottaga just detta innehåll, det frågas icke efter. Hvilken rätt skulle den oförnuftiga barnsligheten hafva gent emot den goda kunskapen? Det är just den duglige lärarens konst att pressa in denna kunskap, om det också skulle ske med våld, och om barnanaturen våndas och vrider sig i smärta vid en sådan behandling, så är det ju så godt att den syndiga menniskosjälen tidigt lär känna tukt och aga. [...] Mot denna hårda och mekaniska uppfattning af undervisningens väsen kämpar sig nu en riktning fram, som kunde kallas den organiska, derför att den icke sätter någon bestämd gräns mellan skolan och lifvet, utan betraktar skolan och skoltiden såsom väsentliga delar af menniskolifvet sjelft och häfdar åt barnaåldern såväl som åt den vuxna åldern den rätt, som tillkommer den lefvande organismen att efter sin natur upptaga det, som egnar sig för den, och förkasta det, som den icke kan smälta. Här blir sålunda icke tal om någon våldsam inpressning af kunskapsmaterial i barnets medvetande, utan om att välja och bearbeta det så, att det villigt upptages och sammansmälter med medvetandet. Den lärandes glädje vid mottagandet är för den organiska undervisningsmetoden icke en underordnad sak af tvifvelaktigt värde, utan ett ledande och afgörande kännetecken på, om undervisningen når eller förfelar sin afsigt.[1]

Citatet är hämtat ur artikeln "Den gamla och nya pedagogiken" publicerad i *Svensk Läraretidning* 1886. Bortsett möjligen från stycket om frånvaron av gräns mellan skola och liv, vilket är tämligen specifikt knutet till de pedagogiska ideal som växte sig starka strax efter sekelskiftet, utgör citatet ett paradigm för skolmatematikens sätt att förstå sitt förflutna, från 1800-talets andra hälft fram till idag. Det konstituerar skolmatematiken som stadd i rörelse, bort från undervisningsmetoder präglade av torr och död förmedling, mot undervisning förknippad med glädje och anpassning till barnets natur.

Hur detta innebar en form av disidentifikation tydliggörs av följande kommentar, angående föräldrar som riktar kritik mot skolans metoder. Pseudonymen "adn" skriver: "Ej sällan framlägga de för allmänheten en möjligen sann, möjligen också karikerad bild af tillståndet – för 20 à 30 år sedan, grundad på reminiscenser från deras egen skoltid".[2] En följd av detta sätt att argumentera blir att endast de som befinner sig i skolan, kan känna till det som utgör skolans kärna; kritik med utgångspunkt från de erfarenheter man haft som elev framstår som irrelevanta, eftersom de handlar om något som man i skolans värld redan vet är fel, en kvarleva, som sedan länge avsöndrats från skolans kropp.

1869 års granskningskommission inleder sitt avsnitt om geometri med delrubriken "Hinder för undervisningen framgång", och skriver

Tvenne omständigheter hafva i äldre tider, likasom väl äfven på sina ställen ända in i våra dagar, försvårat undervisningen i geometri och vållat, att alltför ringa framgång deraf vunnits. Dessa äro, att man utan lämplig inledning allt för tvärt börjat med den strängt vetenskapliga undervisningen samt att vid denna – äfven oafsedt de brister, hvarmed läroboken kunnat vara behäftad – en oriktig metod blifvit följd.[3]

Just att man båda talar om "äldre tider" med tillägget "ända in i våra dagar" gör det möjligt att tala om något som de facto är som likväl externt i förhållande till den skolmatematiska position från vilken man talar. Liksom i citaten i det föregående stycket är det dels frånvaron av anpassning till barnen och den felaktiga metoden som man tillskriver det förflutna. Det finns här anledning att påminna om att det ända sedan slutet av 1700-talet riktats kritik i Sverige mot *Elementa* som lärobok.[4] Det nya består inte i kritiken mot *Elementa* i sig, utan i den form denna kritik nu antagit.

Bergius ger uttryck för samma retoriska figur när han skriver att: "Den fördel, som ungdomen i latinskolorna hämtade af sitt matematiska studium, var [...] obetydlig". Lärarna var allt för upptagna av "formler", att vara matematiker förknippades med att vara "torr [och] opraktisk".[5] Så är det emellertid inte längre. "På de sista 50 åren har", skriver Bergius,

elementarskolväsendet i andra länder undergått en sådan ombildning, att geometrien numera utgör ett det vigtigaste bildningsmedel för gossar, ja till och med för flickor ända från det 10:de året. Pestalozzi's åsigt, att

[1] V. Pingel och N. J. Nörlund, "Den gamla och nya pedagogiken," *Svensk Läraretidning* (1886).
[2] adn., "Är professor Keys fordran på en reform af den naturvetenskapliga undervisningen vid våra läroverk berättigad?" *Pedagogisk Tidskrift* (1875).
[3] Kommissionen för behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor, *Underdånigt betänkande*, 25.
[4] Se tex. Lithander, *Aritmetik och Euklides' Elementer*, Förord.
[5] Bergius, "Om elementarundervisningen i matematik," 86.

> formläran (geometrien) utgör jemte talläran och språkläran ett oumbärligt hufvudmedel för hvarje grundlig bildning, blef snart allmänt erkänd, och de lärare i Tyskland, som följde med sin tids pedagogisk utveckling, vore angelägna att i sina skolor införa detta nya bildningsmedel.[1]

Bergius förknippar det förflutna med detta torra och opraktiska. Här är ytterligare ett exempel:

> Ända till början av 1800-talet var förfaringssättet vid räkneundervisningen i allmänhet mycket mekaniskt. Lärjungen fick i sin räknebok lära sig reglerna för det räknesätt, som skulle inhämtas, och därpå använda dem på de i boken upptagna exemplen. Att först åskådliggöra och förklara det, som var föremål för undervisningen, ansågo lärarna icke behövligt. Målet var att bibringa mekanisk färdighet; om insikt i räkning var det ej någon fråga.[2]

En variant av denna retoriska figur som blev vanlig från 1870-talet var att beskriva skolmatematikens samtida tillstånd i termer av två motsatta tendenser, och sedan positionera sig själv (och därmed implicit skolmatematikens framtid) mellan dessa två extremer, det vill säga på medelvägen. Så här skrev K. R. Kjellberg i *Svensk Läraretidning* 1886:

> Under de sista 30 åren hafva i vårt land tre väsentligt olika metoder för räkneundervisningen gjort sig gällande. Ännu i början af 1850-talet erhöll lärjungen för hvarje ny räkneoperation bestämda regler att följa och öfverlämnades så åt sig sjelf att inlära tillämpningen. Någon förklaring huru reglerna tillkommit, eller hvarföre de blifvit just sådana de voro, gafs aldrig. Resultatet af denna undervisning var gifvet. Så länge lärjungen hågkom reglerna, räknade han både fermt och säkert; men så snart minnet svek honom, var han hjelplös. Någon reproduktion af en bortglömd regel var ju ej tänkbar.
>
> I senare hälften af samma årtionde inträdde en reaktion mot detta förfaringssätt, men såsom vanligt slog man öfver till en motsatt ytterlighet. Nu skulle all disponibel tid användas till förklaringar. Hvarje nytt exempel skulle af hela klassen gemensamt och från början till slut genomgås hevristiskt samt sönderplockas, ända till dess man stannade vid de rena axiomen. Förvärfvandet af färdighet i utförandet af de särskilda räkneoperationerna ansågs ovigtigt. En mellan dessa båda ytterligheter inslagen medelväg, som gifver förklaringen sin vederbörliga tid, men på samma gång tillmäter den tekniska räknefärdigheten tillbörlig vigt, är väl den enda rätta och omfattas nu af det största flertalet lärare. Dock eger den rena och oblandade hevristiken ännu varma förkämpar. Föreläsaren hade flere gånger och från olika läroverk fått mottaga läjungar, hvilka varit rätt drifna i hvad han ville kalla en aritmetisk fraseologi; men huruvida äfven den simplaste beräkning blefve rätt utförd, berodde på en ren slump.[3]

Vad jag vill att man skall notera är hur detta sätt att karaktärisera det skolmatematiska nuet dels ger det en air av modernitet och aktualitet, dels gör det i en praktisk mening tämligen immunt mot kritik, eftersom varje konkret observation av misslyckande alltid kan förklaras med hänvisning till en sorts eftersläpning, där det förflutna syns leva kvar "ända in i våra dagar".

Jag har ännu inte sagt särskilt mycket om vad det på en mer konkret nivå var man såg som skolmatematikens hinder. Detta kommer framför allt att framgå i redogörelsen för skolmatematikens metoder nedan. Som avslutning på detta avsnitt om skolmatematikens hinder skall jag dock redogöra för en tämligen animerad meningsväxling mellan Bergius och Johan Otterström, vilken pekar ut några av problem som dessa metoder skulle lösa.

Matematik som hinder

Johan Otterströms *Utkast till lärobok i aritmetiken (för skolor i allmänhet och folkskolor i synnerhet)*, publicerad 1849, väckte stor uppmärksamhet genom att han i denna bok vävde samman aritmetik med algebra i en bok riktad till tämligen unga barn, och dessutom till barn som skulle undervisas i folkskolan. I och med detta bröt han mot flera av skolmatematikens vid denna tid vedertagna principer. För det första att algebra och aritmetik skulle hållas åtskilda; dels att man skulle hålla den vetenskapliga matematikens teori och formalism på behörigt avstånd från barnen och i synnerhet från barnen i folkskolan. Otterströms bok fick ett blandat mottagande, och togs aldrig upp som en del av skolmatematikens kanon. Den tycks inte ha fått någon större spridning. Å andra sidan fick boken ett stor genomslag i den skolmatematiska

---

[1] Ibid.

[2] G. W.; Svensk Bucht, J. A., *Anteckningar i räknemetodik för folkskolan och småskolan* (1894), kap. 1.

[3] K. R. Kjellberg, "Undervisningen i räkning med decimaler," *Svensk Läraretidning* (1886). Se även: en., F.W. Hultman, "Anmälan af tio stycken räkneböcker," *Tidskrift för matematik och fysik* (1868)., J. P. Velander, "Ämnet räkning i folkskolan," *Svensk Läraretidning* (1884)., Ett tydligt exempel från mitten av 1900-talet är Ossian Åhström, "Frits Wigforss: Den grundläggande räkneundervisningen," *Folkskolan* (1951).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

diskussionen. Hans metod, som helt enkelt kom att kallas "den nya metoden", utgjorde en återkommande referenspunkt under andra halvan av 1800-talet – tillsammans med Kjelldals "heuristiska metod" och Nyströms "enhetsmetod" för lösning av Regula-de-Triuppgifter, vilka jag skall diskutera nedan.

Otterströms bok väckte dock harm i flera läger, bland annat hos Bergius som recenserade boken då den kom ut 1849.[1] Den nedanstående redogörelsen bygger på denna recension, Otterströms replik, och Bergius avslutande bemötande av Otterströms svar.[2] Vad jag vill fästa uppmärksamheten på är hur Bergius och Otterström väsentligen gav två delvis motsatta bilder av vad det var som utgjorde hindret för skolmatematikens framgång. Bergius såg (vid denna tidpunkt 32 år gammal) detta hinder i den matematiska formalismen. Otterström såg hindret i räknekonstens regler.

Bergius inleder sin recension av Otterströms med en typisk kritik av den tidigare och rådande skolmatematiken. Den har på senare år, skriver han, mer än tidigare kommit att syfta till att "meddela lärjungarna en stor praktisk färdighet att med tillhjelp af griffel, föreskrifna reglor och räknetafla lösa en mängd sifferexempel", något han menar beror på läroböckerna som på senare tid "blivit nästan tabellariskt utarbetade, för att utgöra en samling af reglor och exempel". Givetvis syftar han här på den allmänna trenden av ökande antal övningsuppgifter och i synnerhet på Zweigbergks *Lärobok i räknekonsten*.

Han konstaterar sedan att han och Otterström tycks vara eniga i denna syn på skolmatematikens problem och dess mål. "[Otterström] synes oss likväl", skriver han dock sedan, "hafva misstagit sig, då han påstått att all undervisning i aritmetik hittills blifvit meddelad efter en alldeles falsk metod, som han gifvit namn af den upp- och nedvända". Det Otterström syftar på här är helt enkelt räknekonsten och dess regler. Han menar att räknekonsten *till sitt väsen*, för att använda ett uttryck som tydliggör kärnpunkten i vad som skiljer Otterströms och Bergius ståndpunkter åt, är olämplig. Med andra ord: Otterström ser ingen potential i räknekonsten, han ser den som en i sig en felaktig metod.

Detta håller Bergius inte med om. Han ser istället räknekonstens behandling i skolan som orsaken till skolmatematikens misslyckande. Bergius och Otterström drar med andra ord gränsen mellan objektet och metoden på olika sätt. I motsats till Bergius placerar Otterström endast den vetenskapliga matematiken så att säga "innanför" matematiken, och såväl pedagogiska metoder som räknekonst utanför.

Otterström menar ganska tydligt att det bara är genom att låta skolmatematiken följa den vetenskapliga matematikens uttryckssätt som den kan bli logisk och därmed stå i samklang med förståndet. Bergius kan inte förstå varför inte räknelärans tveklöst praktiskt användbara regler också de skulle kunna vara förståndsbildande – om de bara behandlades på ett metodiskt riktigt sätt. Reglerna har ju, menar Bergius, även de en matematisk grund, och i den mån lärjungarna förstår denna grund förstår de ju därigenom också matematik.

> Om lärjungen, först efter att hafva gjort sig förvissad om giltigheten af det vid lösningen använda förfaringssättet och sjelf så att säga utforskat det allmänna deruti, erhåller regeln, så emottager han den icke såsom en betungande och onyttig utanlexa, utan såsom en välkommen hjelpreda för minnet.[3]

Otterström fäster i förordet till sin bok stor viktig vid att lärjungen skall förstå vad han gör, och då han sätter likhetstecken mellan räknekonsten och brist på förståelse måste givetvis Bergius försvara sig. Även han tillmäter ju förståelse en avgörande betydelse.

I sin replik konstaterar Otterström ungefär vad Bergius redan sagt, nämligen att de två är eniga i teorin, men oeniga i praktiken. Han skriver:

> Detta Rec. resonnemang, som förtjenade att i guld graveras på väggarne i alla nuvarande verkstäder för lefvande räknemaschiners producerande, är liksom ryckt ur min egen själ.[4]

Otterström kan inte förstå hur Bergius samtidigt kan erkänna att skolmatematiken hittills varit allt igenom mekanisk, och samtidigt inte se att räknekonsten orsaken till detta förhållande. Där Bergius ser en i och

[1] Axel Theodor Bergius, "Utkast till Lärobok i Aritmetiken för skolor i allmänhet och
folkskolor i synnerhet, af J. Otterström Apologist. Stockholm 1849, på Z.
Haeggströms förlag," *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1849).
[2] Axel Theodor Bergius, "Svar till Hr Otterström med anledning af hans replik," *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1849); J. Otterström, "Den "nya" räknemetoden. Replik.," *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1849).
[3] Bergius, "Utkast till Lärobok i Aritmetiken för skolor i allmänhet och
folkskolor i synnerhet, af J. Otterström Apologist. Stockholm 1849, på Z.
Haeggströms förlag."
[4] Otterström, "Den "nya" räknemetoden. Replik."

för sig god räknekonst – förstörd av en felaktig behandling i skolan, ser Otterström en i grunden felaktig räknekonst, som goda lärare haft att *kämpa mot*, och detta föga framgångsrikt "just för lärobokens felaktighet". Det praktiska användandet av räknekonsten har inte varit oriktigt, skriver han, "utan rigtigt och konseqvent" , och just därför har det inneburit "det nesligaste träldomsok på svenska folkets intelligens",

> ty något orimligt konstigare och svårare, än räknekonsten, sådan den i allmänhet varit framställd i läroböckerna och af lärarne enligt dem, har icke i något läroämne blifvit tillskapadt, om ej i astronomien före Copernicus. Resultaten af denna metod och dess conseqventa användning ligga för öppen dag öfverallt mellan Ystad och Torneå, i det att högst få af dem, som lärt räknekonsten i skolan, kunna utom slentrianen i yrket reda sig i de ofta enklaste aritmetiska frågors uppfattning och lösning.[1]

Otterström kräver revolution; Bergius vill reformera. Otterström kallar Bergius för "mekanismens teoretiske förkastare, men praktiske försvarare", och förklarar

> min hufvudafsigt har verkligen varit den, at åstadkomma "en liten tids anarki", för att sedan med sjelfva läroboken möjligtvis kunna rycka den reflekterande och lärgiriga svenska ungdomen undan det skamliga tyranni, som tryckt *oss*, som trampat ut barnaskorna.

"Vi är", skriver Otterström avslutningsvis, "i fråga om praktiken, fullkompliga Antipoder, som med divergerande hufvuden nalkas hvarandra blott med fötterna".

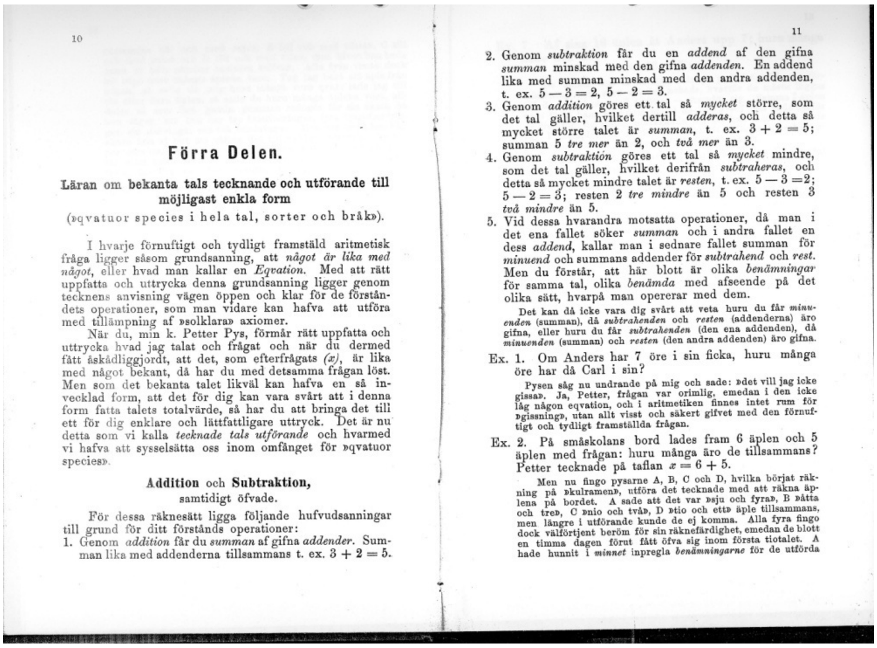
Bergius "Svar till Hr. Otterström med anledning af hans replik" är klargörande.[2] Istället för att fortsätta diskussionen återför han den till dess föremål, Otterströms bok. Det visar sig då att den förmodligen viktigaste skiljelinjen mellan de båda går i deras syn på språket och i viss mån även barnet, snarare än deras syn på matematiken. I sin bok försöker Otterström nämligen *förklara* matematiken och algebran. Han beskriver vad ett tal är, vad de matematiska tecknen betyder, hur de används, och så vidare. Angående dessa förklaringar skriver Bergius:

> Något konstigare och obegripligare, än hvad förf. här framställer, har man väl aldrig träffat i någon lärobok i aritmetiken, och ehuru denna indelning ligger till grund för hela den följande uppränningen af boken, är man frestad att begagna Hr O:s egna ord och anse såsom ett "nesligt träldomsok på svenska folkets intelligens", om något dylikt skulle inpräglas hos lärjungarna i våra skolor.[3]

Här syns att matematiken för Bergius inte är något man kan lära sig genom at läsa om den. I linje med Pestalozzis bildningstänkande (som han skriver om i andra artiklar vid samma tid) drar han istället en skarp gräns mellan å ena sidan matematiska begrepp, och å andra sidan de tecken och ord som representerar dessa begrepp. Begrepp var för Bergius liksom för Pestalozzi något som bara kunde växa fram inifrån genom åskådning och övning. Det var i ljuset av detta perspektiv som Otterströms förklaringar framstod som allt annat än ledande till förståelse. Otterströms betrodde lärjungarna med en förmåga att läsa löpande text och med denna som utgångspunkt lära sig algebra. Nedanstående bild visar ett uppslag ur Otterströms bok (dock från en senare upplaga).

[1] Ibid.
[2] Bergius, "Svar till Hr Otterström med anledning af hans replik."
[3] Ibid.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf



10

Förra Delen.

Läran om bekanta tals tecknande och utförande till möjligast enkla form

(»qvatuor species i hela tal, sorter och bråk»).

I hvarje förnuftigt och tydligt framstäld aritmetisk fråga ligger såsom grundsanning, att *något är lika med något*, eller hvad man kallar en *Eqvation*. Med att rätt uppfatta och uttrycka denna grundsanning ligger genom tecknens anvisning vägen öppen och klar för de förståndets operationer, som man vidare kan hafva att utföra med tillämpning af »solklara» axiomer.

När du, min k. Petter Pys, förmår rätt uppfatta och uttrycka hvad jag talat och frågat och när du dermed fått åskådliggjordt, att det, som efterfrågats *(x)*, är lika med något bekant, då har du med detsamma frågan löst. Men som det bekanta talet likväl kan hafva en så invecklad form, att det för dig kan vara svårt att i denna form fatta talets totalvärde, så har du att bringa det till ett för dig enklare och lättfattligare uttryck. Det är nu detta som vi kalla *tecknade tals utförande* och hvarmed vi hafva att sysselsätta oss inom omfånget för »qvatuor species».

Addition och **Subtraktion,**
samtidigt öfvade.

För dessa räknesätt ligga följande hufvudsanningar till grund för ditt förstånds operationer:

1. Genom *addition* får du *summan* af gifna *addender*. Summan lika med addenderna tillsammans t. ex. $3 + 2 = 5$.

11

2. Genom *subtraktion* får du en *addend* af den gifna *summan* minskad med den gifna *addenden*. En addend lika med summan minskad med den andra addenden, t. ex. $5 - 3 = 2$, $5 - 2 = 3$.
3. Genom *addition* göres ett tal så *mycket* större, som det tal gäller, hvilket dertill *adderas*, och detta så mycket större talet är *summan*, t. ex. $3 + 2 = 5$; summan 5 *tre mer* än 2, och *två mer* än 3.
4. Genom *subtraktion* göres ett tal så *mycket* mindre, som det tal gäller, hvilket derifrån *subtraheras*, och detta så mycket mindre talet är *resten*, t. ex. $5 - 3 = 2$; $5 - 2 = 3$; resten 2 *tre mindre* än 5 och resten 3 *två mindre* än 5.
5. Vid dessa hvarandra motsatta operationer, då man i det ena fallet söker *summan* och i andra fallet en dess *addend*, kallar man i sednare fallet summan för *minuend* och summans addender för *subtrahend* och *rest*. Men du förstår, att här blott är olika *benämningar* för samma tal, olika *benämda* med afseende på det olika sätt, hvarpå man opererar med dem.

Det kan då icke vara dig svårt att veta huru du får *minuenden* (summan), då *subtrahenden* och *resten* (addenderna) äro gifna, eller huru du får *subtrahenden* (den ena addenden), då *minuenden* (summan) och *resten* (den andra addenden) äro gifna.

Ex. 1. Om Anders har 7 öre i sin ficka, huru många öre har då Carl i sin?

Pysen såg nu undrande på mig och sade: »det vill jag icke gissa». Ja, Petter, frågan var orimlig, emedan i den icke låg någon eqvation, och i aritmetiken finnes intet rum för »gissning», utan allt visst och säkert gifvet med den förnuftigt och tydligt framställda frågan.

Ex. 2. På småskolans bord lades fram 6 äplen och 5 äplen med frågan: huru många äro de tillsammans? Petter tecknade på taflan $x = 6 + 5$.

Men nu fingo pysarne A, B, C och D, hvilka börjat räkning på »kulramen», utföra det tecknade med att räkna äplena på bordet. A sade att det var »sju och fyra», B »åtta och tre», C »nio och två», D »tio och ett» äple tillsammans, men längre i utförande kunde de ej komma. Alla fyra fingo dock välförtjent beröm för sin räknefärdighet, emedan de blott en timma dagen förut fått öfva sig inom första tiotalet. A hade hunnit i *minnet* inpregla *benämningarne* för de utförda

Figur 8. Otterströms lärobok i aritmetik, i en upplaga från 1880.[1]

Bergius skriver att lärjungen, i Otterströms bok tvingas "blott fästa sig vid tecknet och förbise saken, som derigenom betecknas". För Bergius framstår tecknet snarast som ett hinder, som står i vägen för relationen mellan lärjungen och matematiken. Bergius ger i sin recension uttryck för en karaktäristisk rädsla inom skolmatematiken för att tecken skall vara tomma, att lärjungen å ena sidan skall ta dem till sig, men å andra sidan blott som tecken, utan det begrepp som de var tänkta att beteckna.

Vad Bergius mot bakgrund av denna syn på språket ser som nödvändig är därför en lärobok där orden inte kommer förrän begreppet är, så att säga, "färdigt". Undervisningen måste, skriver han "utgå från omedelbara åskådningar, som öfverlemnas åt förståndet för att *sedan de blifvit förvandlade til begrepp*, användas i omdömen och slutledningar". Denna förvandling kommer, enligt Bergius, till stånd genom *övning* – absolut inte genom förklaringar, vilka ju tvärtom ständigt introducerar fler och fler nya ord.

7.3. Skolmatematikens metoder

Avgörande i matematiken rörelse mot att bli ett skolämne är vägmetaforen. Jag har nämnt den flera gånger tidigare. I anknytning till folkskolan fick den under andra halvan av 1800-talet en rad explicita uttryck. Följande är ett tydligt exempel:

> Vid framställningen af ett ämne måste man bestämma en punkt, hvarifrån man skall utgå (utgångspunkt), samt en, till hvilken man vill komma (ändpunkt). Vägen mellan båda punkterna måste ock utstakas. Härvid är af vigt, att man går framåt steg för steg utan hopp – det efterföljande måste strängt byggas på det föregående – samt att man ej gör några onödiga sidosprång – man kan i sådant fall så lätt förlora målet ur sigte eller, om man slutligen kommer dit, har man svårt att rätt klart och skarpt uppfattta det, då man ej grundligt känner de förutsättningar, hvaraf det är en följd.[2]

Synen på kunskaper som resultatet av en resa kan inte skiljas från föreställningen att kunskaper huvudsakligen är ett resultat av utbildning, inom vilken lärarna så att säga leder eleverna framåt.[3] Den svenska skolmatematiska diskussionen 1850-1880 innehåller en rik uppsättning idéer rörande hur skolmatematikens mål borde kunna realiseras, vilka alla mer eller mindre uttalat utgår från denna vägmetafor.

Generellt menade man att det var genom att *se, handla* och *tala*, som barnet kunde forma matematiska begrepp och nå den bildning och de praktiskt nyttiga kunskaper som jag nämnt ovan. Man talade om detta

---

[1] Jakob Otterström, *Lärobok i aritmetik för skolans lägre stadium* (Stockholm: Haeggström, 1880), 10-11.
[2] Anjou, Kastman, och Kastman, *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Pedagogik.*, s. 66.
[3] För en kritik av denna syn på kunskaper se Jacques Rancière, *The ignorant schoolmaster: five lessons in intellectual emancipation* (Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, 1991), 118. och Ivan Illich, *Deschooling society, World perspectives, 44* (New York: Harper & Row, 1972).

i termer av *åskådlighet, heuristik* och *övning*. Dessa termer betecknade en uppsättning praktiker där dessa tre moment ofta var närvarande samtidigt. Till exempel kunde man låta barnet "åskåda" en uppsättning föremål, tala om vad han eller hon såg, och göra detta om och om igen. Den generella princip som låg bakom värderandet av dessa övningar var att den skolmatematiska praktiken måste vara anpassad till barnet, eller mer exakt till "barnets ståndpunkt" som man ofta kallade det. Det var, menade man, bara genom att möta matematiken på sina egna villkor, som barnet kunde dra nytta av dess bildande egenskaper.

Det är inte svårt att se hur det som värderades positivt på ett praktiskt plan i stor utsträckning motsvarades av vad som praktiskt var möjligt att göra med de barn som skulle undervisas. De metodiska "verktygen" motsvarade alltid aktiviteter som en vuxen kunde göra tillsammans med ett (i läroverket) eller flera (i folkskolan) barn. Denna sida betonades ofta explicit. Man talade om att övningarna gjorde undervisningen "lekfull" och väckte barnens intresse – vad gäller folkskolan såg man ofta det faktum att en metod kunde användas för att helt enkelt hålla barnen sysselsatta som en avgörande fördel.

Man kan se de skolmatematiska metoderna som försök att arrangera ett fruktbart möte mellan matematikens essens och barnets essens, bortom deras yttre manifestationer. Ansträngningarna resulterade ibland i vad som närmast framstår som en tämligen våldsam destruktion av det som med utgångspunkt från en vetenskaplig synvinkel framstår som matematik. Allt detta betraktade man som blott yttre sken, något som måste rensas undan, för att nå fram till den bildande kärnan, den kärna som till sin natur var lämpad för en motsvarande inre natur hos barnet. Men detta sönderssprängande av matematikens yttre skapade hela tiden öppningar för att "inte se" att det var matematikens inre man närmade sig i de praktiska övningarna. Här låg skolmatematikens dilemma.

Jag skall nu ge några exempel på hur de metodiska verktygen till uttryck i den skolmatematiska diskussionen. I tur och ordning tar jag upp idéer med fokus på åskådning, heuristik

Undervisningen skall vara åskådlig

Principen för åskådning är att undervisningen skall utgå från konkreta föremål, som lärjungen helst skall få hantera på egen hand. Vad gäller geometrin innefattade detta även tecknade föremål på tavla eller papper. Från dessa konkreta föremål skall undervisningen röra sig mot det allt mer abstrakta.

Sandberg skriver att "[å]skådningen är grundvalen för allt vetande och allt tänkande".[1] Den ovan nämnda kommissionen, vars betänkande publicerades 1871, skriver att "undervisningen i geometri bör [...] utgå från betraktandet af kroppar".[2] Samma kommission skriver även att lärjungen skall "öfvas att bland de föremål, hvaraf de i lärorummet och hemmet eller eljest i dagliga lifvet omgifvas" återfinna geometrins former.[3] Geometrinundervisningen skall, skriver man, föregås av en kurs i "geometrisk teckning", "så att lärjungarne må blifva fullt förtroliga med de geometriska formerna, innan dessa göras till föremål för vetenskaplig behandling".[4]

En levande bild av hur man tänkte sig att åskådlig undervisning kunde gå till ges i Anjous och bröderna Kastmans räknemetodiska anvisningar. Den första övningens rubrik är: "uppfattning och bildande. Talet 1." Övningens beskrivs på följande sätt:

> Läraren ställer fram en kub (en slant, en kritbit, framskjuter en kula o. s. v.) och frågar: Hvad är detta? (en *kub*, en *slant*, o. s. v.). Huru många kuber stå här? (*en* kub). Säg någon sak, hvaraf blott en finnes här i rummet! (*en* kakelugn). Huru många fingrar håller jag upp? (*ett* finger).[5]

Här får man en klar uppfattning vad föreställningen om bildandet av begrepp fick för konsekvenser för undervisningen. Det är genom att det upprepande åskådandet av saker som det bara finns en av, som, menar man, begreppet om enhet bildas.

Allra bäst var dock om barnen även fick plocka med föremålen på egen hand. För att ge ämnet den största möjliga åskådlighet lämnar man, skriver Sandberg,

---

[1] Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, 132.
[2] Kommissionen för behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor, *Underdånigt betänkande*, 36.
[3] Ibid., 29.
[4]Ibid., 37.
[5] Anjou et al., *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Häftet V. Metodik: Räknekonsten i Folkskolan.*, sida?

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

> till hvarje barn ett visst antal föremål af samma slag, t. ex. små trästickor, kuber, pappskifvor, glasbitar, ettöre-slantar eller dyl. Medelst dessa föremål för lärjungen sjelf göra för ögat förnimbar den uppgift, läraren förelägger till lösning.[1]

Förutom att sådant arbete gör lärjungarna "självverksamma" så ger det läraren en möjlighet att övervaka och styra lärjungarnas arbete. Det är, skriver Sandberg, "ett godt medel för att väna de små vid tukt, alldenstund ögonblicklig lydnad måste följa på hvarje föreskrift, och hvarje befallning omedelbart verkställas".[2]

Begreppet före tecknet

En av de viktigare idéerna i den skolmatematiska diskussionen strax efter mitten av 1800-talet var att barnens "begrepp" genom åskådning (samt heuristik och övning) skulle formas innan barnen introducerades till de tecken vars funktion, menade man, var blott att "beteckna" detta begrepp. Varken siffror eller symboler skulle introduceras förrän begreppet så att säga var färdigbildat. Bergius kritiserade till exempel det faktum att man, "[v]id en lärjunges inträde i skolan" vanligtvis prövar om han "igenkänner taltecknen och eger någon färdighet i att uppskrifva och utsäga tal".[3] Vad man då emellertid inte uppfattar, skriver han, är att "sjelfva talbegreppen" bara "dunkelt föresväfva lärjungen, och att mycket deraf ännu återstår att reda och förtydliga".[4] Han föreslår därför att man inte skall låta lärjungen använda talen i räkning "förr än talbegreppen äro fullt tydliga för hans medvetande". Annars kommer, förklarar Bergius,

> hans uppmärksamhet att afvändas från det väsentliga och all hans sträfvan att riktas åt ernåendet af en viss mekanisk färdighet och förvärfvandet af en kunskap, hvars ytlighet derigenom visar sig, att den vanligen inom kort tid åter förglömmes.[5]

Helt väsentligt är, menar Bergius, att man för lärjungen tydliggör skillnaden mellan "tal och siffra, mellan saken och tecknet".[6]

Denna strävan efter att bibringa barnen matematik så att säga "utan matematik" är ett av skolmatematikens främsta kännetecken. Den fick en rad besynnerliga konsekvenser. Jag skall här nöja mig med två exempel. Sandberg ger i sin *Små-skolan. En handledning för dem, hvilka sysselsätta sig med den första barna-undervisningen i skolan* (1868) inte mindre än 66 olika övningar, som leder fram mot introduktionen av siffrorna.[7] En bild av hur Sandberg tänkte sig undervisningen ges av följande citat från övning nummer två:

> Först ett streck (läraren drager ett streck på svarta taflan) och sedan ett streck till (läraren drager ett streck bredvid det förra) kallas *två* streck. Hvar kallas ett streck och ett streck till? – Huru många streck sen J [dvs "ser ni"] här på taflan? – Här är en punkt och här en; huru många punkter? – Skrif två streck på edra skiffertaflor! – Hvilket är mest, ett eller två? – Huru mycket är två mer än ett? – Hvilket är minst, ett eller två? – Huru mycket är ett mindre än två?
>
> Huru många ögon har du? – Huru många armar har du? – Räck up två fingrar på högra handen! – På venstra handen! – Säg någon sak här i rummet, som förekommer två gånger!
>
> Drag ett lodrätt streck! Drag sedan från nedersta ändan af detta streck ett vågrätt streck åt högre så här
>
> Huru många streck hafva vi nu? Riktigt! Och när två streck sammanträffa med hvarandra på ett ställe (i en punkt), så uppkommer hvad man kallar en *vinkel* (eller hörn).
>
> Rita en vinkel! Rita en vinkel till! [etc.][8]

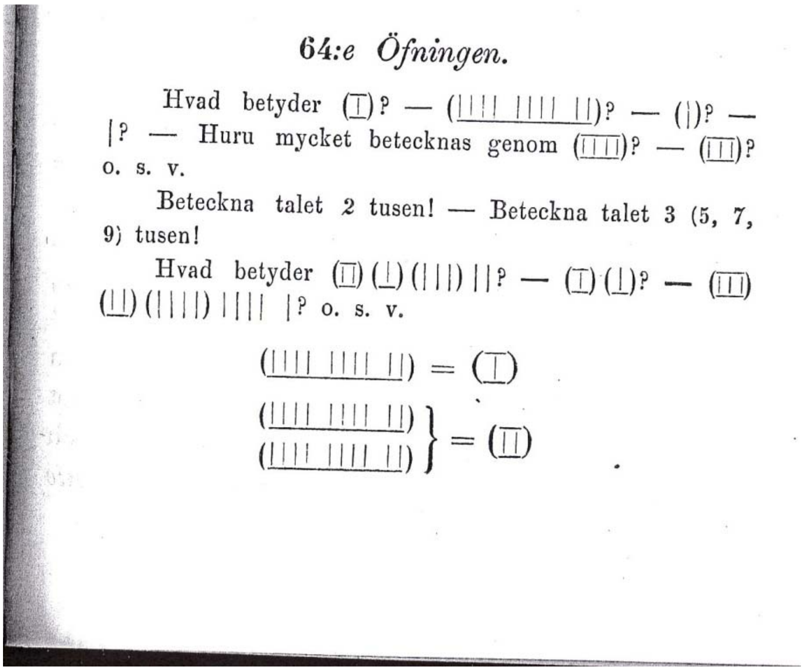
Sandberg delade in vägen mot "talbegrepp betecknade med siffror" i flera steg. Först skulle barnen räkna saker, det vill säga räkna med utgångspunkt från åskådning. Sedan skulle sakerna bytas ut mot "streck och punkter" som i citatet ovan, vilka representerade sakerna. Sedan skulle barnen lära sig att räkna helt utan yttre "stöd", det vill säga i huvudet. Detta räknande krävde, menade Sandberg och många med honom, ett "talbegrepp" som ersatte det tidigare "konkreta" räknandet. Först när detta talbegrepp utvecklats genom

---

[1] Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, 133.
[2] Ibid., 134.
[3] Bergius, "Om elementarundervisningen i matematik," 338.
[4] Ibid.
[5] Ibid.
[6] Ibid.: 339.
[7] Dessa introduceras i den 65:e övningen.
[8] Fredrik Sandberg, *Småskolan. En handledning för dem, hvilka sysselsätta sig med den första barna-undervisningen i skolan.* (Stockholm: F. & G. Beijer's förlag., 1869), 7.

flitig övning på huvudräkning – eller som man också kallade det: muntlig räkning – kunde siffrorna introduceras.

Det fascinerande med Sandbergs metodik är han i sina övningar lärde barnen att använda addition, subtraktion och multiplikation, med tal ända upp till tusen, *helt utan användande av siffror!* Han började med att gruppera strecken fyra och fyra. När han kom till tio streck införde han en ny beteckning: ett vertikalt streck innanför två parenteser. När han kommer till hundra lade han till ett horisontellt streck under det vertikala strecket. När han kommer till tusen lade han till ett horisontellt streck *ovanpå* det vertikala. Två streck innanför parenteser betyder därmed tjugo; två streck innanför parenteser, med streck under, betyder två hundra, och så vidare. Figurn nedan visar Sandbergs 64:e övning:


64:e Öfningen.

Hvad betyder (⊤)? — (|||| |||| ||)? — (|)? — |? — Huru mycket betecknas genom (|||)? — (||)? o. s. v.

Beteckna talet 2 tusen! — Beteckna talet 3 (5, 7, 9) tusen!

Hvad betyder (⊤)(⊥)(|||) ||? — (⊤)(⊥)? — (||)(⊥⊥)(||||) |||| |? o. s. v.

(|||| |||| ||) = (⊤)

(|||| |||| ||) (|||| |||| ||) } = (||)

Figur 9. En av övningarna i Fredrik Sandbergs metodik för småskolan. Eleverna fick lära sig räkna med streck istället för siffror – för att grundlägga "talbegreppet" ordentligt innan tecknen infördes. För att underlätta streckskrivandet införde Sandberg emellertid en rad "förkortningar", vilket resulterade i ett rätt besynnerligt teckensystem.

Här tydliggörs det problematiska i relationen mellan skolmatematikens övningar och matematiken. För Sandberg och hans kollegor var övningarna en noggrant uttänkt och grundlig lärogång, som leder barnen, via åskådning och övning, till klara talbegrepp. En nutida läsare – liksom många samtida – ser istället ett meningslöst system av tecken, som, ter det sig, knappast kan ha varit eleverna till någon nytta.

Som exempel på att skolmatematikens nyheter introducerades först i undervisningen av riktigt små barn kan nämnas att Sandberg var en av de första som knöt an till den så kallade "talsortsmetodiken". Denna spred sig sedan till folkskolornas högre stadier, och därifrån vidare till läroverket, något jag skall berätta mer om i nästa kapitel.

Kritik

Det var under 1800-talets andra hälft ofta ganska oklart vad som menades med åskådningsundervisning och att undervisning skulle vara åskådlig, och termerna blev även föremål för kritik.[1] Speciellt riktades kritik mot anspråken på att "åskådningsundervisning", det vill säga undervisning som uteslutande syftade mot bildning i Pestalozzis bemärkelse, utan att knyta an till något ämne som till exempel matematik, skulle leda till att barnen bildades på ett gynnsamt sätt. I en artikel publicerad i *Folkskolans Vän* 1869 kan man angående detta läsa:

> Förståndskraften är visserligen ännu ganska outvecklad; men hvarken (den formella) åskådningsundervisningen eller föröfningarna för skrifläsningen förmå oaktadt alla ansträngningar draga den fram för den tid, då

[1] Se "Om den s. k. åskådningsundervisningen som särskildt läroämne," *Tidning för Folkskolan* (1869)., Karl Kastman, "Om åskådningsundervisningen," *Tidning för Folkskolan* (1875).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

den enligt barnets naturliga utvecklingsgång inställer sig likasom af sig sjelf – hvarföre ock, i förbigående sagdt, hos barnen längre fram vanligen ej kan förmärkas många spår af alla dessa öfningar.[1]

Denna kritik förtjänar att nämnas med tanke på hur matematikundervisningen kring mitten av 1900-talet började omtolkades i termer av den piagetanska utvecklingspsykologi som då nått fram till Sverige. Såväl de praktiska metoderna som anspråken var snarlika.[2] Låt mig för klarhets skull ge ett exempel på hur det kunde låta i den skolmatematiska diskussionen på 1950-talet. I tidskriften *Skola och Samhälle* årgång 1959, kunde man i artikeln "Barnens primära räkneövningar som uppgift för grupparbete" läsa:

Det förefaller mig vara så, att den konkreta undervisningsmaterielen är av stor betydelse i den första räkneundervisningen [...] Ju yngre barnen är, desto vanskligare blir det att till dem förmedla kunskap via ord. Orden är symboler för våra konkreta erfarenheter, och de förstås bara av barn, som förvärvat sig liknandeerfarenheter. Att $2 + 2 = 4$ kan bara förstås och verifieras [sic!] av de barn, som gjort konkreta erfarenheter av 2 och 4.[3]

Artikeln är illustrerad med en bild där en grupp barn, med hjälp av åskådningsmateriel sägs "ta steget över från konkret till abstrakt räkning".[4]

I en artikel från 1850 gav Bergius uttryck för en ganska utbredd uppfattning, att den åskådningsundervisning som ordnades i folkskolan var "tom" och inte hade något med matematik att göra. Han gjorde en skarp åtskillnad mellan å ena sidan linearteckning, så som den framträder i till exempel Finemans *Inledning till geometrien jemnte linear-tecknings öfningar för folkscholor*, det vill säga helt utan bevis, och å andra sidan den i och för sig på åskådning grundade geometriundervisning som han (ca 1850) företrädde på Nya Elementarskolan i Stockholm, där bevisen, trots undervisningens elementära nivå, inte desto mindre spelade en central roll. Det som gör geometrin till ett bildningsmedel är, skriver han "logisk stränghet och vetenskaplig grundlighet".[5] Utan dessa element leder den bara till "halfbildning och ytlighet". Bergius menar att undervisning i geometri väsentligen måste involvera två olika moment; å ena sidan åskådliggörandet, men å andra sidan en sorts "kombinatorisk" verksamhet där det åskådliggjorde behandlas enligt geometriska principer. "De geometriska sanningarna", skriver han,

äro i allmänhet icke af den natur att de finnas genom blotta åskådningen; och den tid, som användes på ett så innehållstomt arbete, kan anses för förståndsbildningen förspilld. Denna lek med rena former tager icke själskrafterna i något riktigt anspråk och har icke en gång för lifvet något värde; den är deremot ett förträffligtmedel till befordrande af en tom ytlighet, och förer ingenstädes eller högst sällan till kännedom om de allmäna lagar, hvarutur de enskilta fallen härledas, och genom hvilkas uppsökande tänkandet uppöfvas.[6]

Här syns skolmatematikens dilemma, för i samma mån som undervisningen involverade bevis, kunde den göras till förmål för en motsatt kritik – att bevisen låg bortom elevernas fattningsförmåga och, även om eleverna lärde sig dem, var blott ytliga minneskunskaper.

Undervisningen skall vara heuristisk

Liksom när det gällde åskådningen var det många gånger oklart vad som menades med "den heuristiska metoden". Gemensamt för alla de varianter som kallades heuristiska var dock att lärjungen *inte* skulle få sig kunskap till del genom att läraren berättade för honom eller att han läste sig till den i en bok. Metodens grunddrag känns igen i följande stycke från Rousseaus *Emile* (1762):

Rikta din lärjunges uppmärksamhet på naturföreteelsena, så skall du snart göra honom vetgirig; men för at nära denna vetgirighet bör du aldrig skynda att tillfredsställa den. Förelägg honom frågor, som lämpa sig för hans fattningsförmåga, och låt honom själv finna lösningen på dem. Han får icke hava din undervisning utan sin egen iakttagelse och eftertanke att tacka för vad han vet; han får icke *lära sig* vetenskapen, utan måste själv *finna den på nytt*. Om du en enda gång i hans sinne låter auktoriteten ersätta förståndet, skall han icke mera bruka sitt förstånd till eftertanke och blir då blott en lekboll för andras åsikter.[7]

---

[1] "Om den s. k. åskådningsundervisningen som särskildt läroämne."
[2] [rektorn som leder barn från det konkreta till det abstrakta stadiet på 1940 eller 1950-talet]
[3] Sven Green, "Barnens primära räkneövningar osm uppgift för grupparbete," *Skola och Samhälle* (1959): 172.
[4] Ibid.: 173.
[5] Bergius, "Om elementarundervisningen i matematik," 89.
[6] Ibid.: 90.
[7] Jean Jacques Rousseau och C. A Fahlstedt, *Emil eller om uppfostran* (Uppsala: 1912), s. 216.

Rousseaus tanke är att man, liksom Sokrates, skall leda lärjungen till sanningen – istället för att helt enkelt tala om för honom det man vill att han skall lära sig. Inte heller skall man berätta när lärjungen gör fel. Istället skall man "visa" honom att det han tror och säger inte kan vara riktigt. "Säger lärjungen t. ex. att 'radie' är en linie, som går från medelpunkten till 'periferien', så drager man från medelpunkten i en uppritad cirkel en krokig linie till periferien och frågar, om detta är en radie o. s. v.", skriver Albrekt Segerstedt i ett lektionsutkast från 1880-talet med tydliga heuristiska drag.[1]

Den första som förespråkade den heuristiska metoden i Sveriges har av många ansetts vara Anders Magnus Kjelldal, som verkade i Uppsala 1831-1865. I Nordisk familjebok kan man läsa att han "kan betraktas såsom en vågbrytare inom den matematiska undervisningen i Sverige", och att han "uppträdde såsom en skarpsinnig och energisk motståndare mot det sätt att lära matematik, som utgår från läroboken och regeln samt nöjer sig snart sagdt med att den förra återgifves utantill och den senare tillämpas mekaniskt, och för hvilket således summan af inlärda kunskaper blir ensam hufvudsak". Istället satte Kjelldal "utvecklingen" av lärjungarnas "kunskapsförmåga" främst. Han ville att lärjungarna "genom eget tankearbete, liksom med egen kraft skapade sig sitt matematiska vetande".

När lärjungen skall lära sig något nytt, en ny regel, skall läraren därför inte, menade Kjelldal, tala om denna regel, utan "genom exempel, som nära sluta sig till det för lärjungen redan bekanta, och hvilka denne derför utan stort biträde kan reda, efter hand öfvergående från lättare till svårare, åstadkomma, att lärjungen kan tillämpa regeln, innan han vet, huru den lyder eller att den ens finnes".[2]

I den skolmatematiska diskussionen under andra halvan av 1800-talet var det för utom Kjelldal, C. A. Nyström och Karl Petter Nordlund som förknippades med den heuristiska metoden. Nyström var den äldre av de två. Hans huvudargument var att om lärjungarna förstod "orsaken till sitt förfaringssätt" och lärde sig "weta, att så är, och icke blott minnas", så skulle de inte så lätt glömma bort hur man gjorde för att lösa de olika räkneuppgifterna och det skulle bli "en omöjlighet för honom att göra så stora misstag, som den, hwilken blott äger en mängd reglor i minnet, ofta utan förmåga att urskilja, wilken regel som wid hwarje fall bör tillämpas".[3] Här kan man för övrigt se att Nyström egentligen snarare knyter an till 1700-talets idéer om rationalitet och logik än till bildningstänkandet. Han skriver att räknandet inte skall utföras "efter recepter eller handtwerksmessigt, såsom i en handtwerkarwerkstad", och detta i synnerhet som undervisningen i läroverket "hufwudsakligen hafwa till uppgift att utweckla lärjungarnes förstånd och eftertanka".[4]

Karl Petter Nordlund (1830-1909) vigde sitt liv åt skolmatematiken, och kommer vad gäller engagemang och uthållighet troligtvis att förbli oöverträffad. Liksom Nyström anslöt han sig till Kjelldals heuristiska metod, men han gav även denna metod en personlig och vad gäller svenska förhållanden helt unik utformning. Han introducerade sina idéer kring mitten av 1860-talet, och ägnade sig sedan åt att sprida dem genom läroböcker, metodhandledningar, artiklar och även omfattande kursverksamhet för lärare.[5] Karaktäristiskt för Nordlund är att han utformade skolmatematiken som ett system, anpassat till såväl undervisningssituationen, vad han uppfattade som lärjungarnas förutsättningar, samt slutligen det mål han ansåg att den grundläggande undervisningen i matematik borde sträva mot. Nordlund var bekant med den vetenskapliga matematiken, men han menade att denna matematik inte passade för den typ av undervisning som borde erbjudas i folkskolan och läroverket. Istället utformade han en ny, enligt honom själv mer logiskt sammanhängande terminologi, speciellt utformad för den grundläggande undervisningens behov. Han förespråkade kort sagt en autonom skolmatematik.

Nordlunds metod är säregen. Man kan kalla den en sorts "skriftlig heuristik", eftersom han reste anspråk på att han lärjungar skulle kunna följa en heuristisk lärogång, utan lärarens ledning, utan genom enskilt arbete med boken. Ett tidigt uttryck för Nordlunds grundsatser är följande:

> *Att* undervisningen i räkning bör begynna med och grundas på åskådning;
> *Att* lärjungen genom vinkar af läraren och ändamålsenligt uppställda exempels uträknande på egen hand sät-

[1] Albrekt Segerstedt, *Geometrien i folkskolan och för nybegynnare. Metodiska anvisningar af Albrekt Segerstedt, seminarii-adjunkt.* (1883).
[2] Th. Westrin, red., *Nordisk familjebok, fjortonde bandet* (1911), 775.
[3] Nyström, *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran, med talrika öfningsexempel och särskildt häftad facitbok*, förord.
[4] Ibid.
[5] T. ex. K. P. Nordlund, *Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar*, red. Fridtjuv Berg, *Bibliotek för undervisningen. En samling åskådliga skildringar till skolbruk och självstudium* (Stockholm: C. E. Fritze's K. Hofbokhandel, 1890); K. P. Nordlund, *Räkne-öfningsexempel i algebra för skolor* (Gefle: 1872); K. P. Nordlund, *Räkneöfningsexempel för skolor uppställda med afseende på heuristiska methodens användande: Med svar.* (Gefle: 1867).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

tes i tillfälle att sjelf finna regeln;
Att lärjungen tillhålles att muntligen redogöra för sin tankegång vid exemplens uträknande och för de räknesätt, som blifvit använda; samt
Att lärjungen först då tillåtes börja med något nytt, när han utan tankeansträngning kan besvara frågor, som röra det föregående, samt sjelf uppgifva sådana.[1]

I Nordlunds metod spelade lärjungens "redogörelse för sitt resonemang" en central roll, vilket alltså ger en delvis annan innebörd till den heuristiska metoden än den som citatet ur *Emile* exemplifierar. Detta moment anger Nordlund att han utformat efter modell från geometriundervisningen, eftersom det är just detta moment av geometriundervisningen som, menar han, "mest bidrager till lärjungens andliga utveckling".[2] Han ger följande exempel på hur en motsvarande typ av redogörelser kan utformas som del av undervisningen i räkning:

Såsom ett litet prof meddelas följande enkla exempel: En gosse köpte en griffeltafla för 35 öre, papper för 75 öre och en bok för 1 kr. 80 öre. Gossen lemnade som betalning en sedel å 5 kr.

Läraren	Lärjungen
Hvar är uppgifvet i exemplet?	Att en gosse köpte en griffeltafla för 35 öre, papper för 75 öre och en bok för 1 kr. 80 öre, samt att gossen som betalning lemnade en sedel å 5 kr.
Hvar är det som sökes?	Penningsumman, som gossen fick tillbaka.
Hvilken var denna penningsumma?	2 kr. 10 öre.
Hvad gjorde du först?	Jag lade tillsammans 35 öre, 75 öre och 1 kr. 80 öre eller 180 öre.
Hvad erhöll du?	290 öre eller 2 kr. 90 öre.
Hvad anger i detta fall 2 kr. 90 öre?	Priset på de saker, gossen köpte.
Hvad gjorde du vidare?	Jag tog bort 2 kr. 90 öre eller 290 öre från 5 kr eller 500 öre.
Hvad erhöll du?	210 öre eller 2 kr. 10 öre.
Hvad utmärka dessa 2 kr. 10 öre.	Den penningsumma, som gossen fick tillbaka. [3]

Denna precisa beskrivning av en dialog mellan lärjunge och lärare kan ses som ytterligare ett tecken på den rörelse jag många gånger pekat på i tidigare kapitel, av hur de böcker som låg till grund för den skolmatematiska undervisningen i allt större utsträckning kom att strukturera själva praktiken. Här lämnas föga utrymme för improvisation.

Kritik

I och med att den heuristiska metoden uteslöt en direkt förmedling av information mellan läraren (eller en bok) och lärjungen, och istället krävde att kunskap skulle "lockas" ur lärjungen genom en följd av ledande frågor, krävde den givetvis stora mängder energi och en hel del tid. Idéerna som ligger till grund för den heuristiska metoden hänger samman med de jag tidigare refererat angående åskådning, nämligen att kunskap är något som endast kan växa fram inifrån. Man menade att undervisningen skulle vara åskådlig, eftersom verkligheten i någon mening ansågs utgöra begreppens utgångspunkt. Den heuristiska metoden utgjorde ett medel att så att säga hjälpa naturen på traven. Helst ville man att lärjungen själv skulle "upptäcka" de geometriska sanningarna och räknekonstens regler, men när så inte skedde, fick läraren ingripa, och, som det heter i 1859 års läroverksstadga "genom väl afpassade frågor eller erinringar" leda lärjungen mot den geometriska sanningen, på ett sådant sätt att den "slutligen framst[år] såsom af lärjungen sjelf funnen".[4] Den heuristiska metodens talesmän menade att begrepp bara kunde ta form som ett resultat av tankearbete, och att det var just sådant begreppsskapande arbete som den heuristiska metodens användande innebar.

[1] *Förhandlingar vid Femte Allmänna Svenska folkskolläraremötet i Gefle den 25, 26, och 27 Juli 1865,* (1865), 27.
[2] K. P. Nordlund, *En samling räkneuppgifter jemte fullständig redogörelse för deras lösning för seminarier, skolor och sjelfstudium bihang till samme utgifvares Räkneöfningsexempel* (Gefle: Utgifvarens förlag, 1879), 3.
[3] Ibid.
[4] *Anvisningar och råd till Lärare, angående tillämpningen af de till Nådiga Stadgan för Rikets allmänna Elementarläroverk af den 29 januari 1859 hörande undervisningplaner.*

Det fanns dock många som menade att detta inte alls utgjorde någon bra undervisningsmetod, framför allt individer med anknytning till den matematiska vetenskapen. I nästa kapitel skall jag ta upp ett tämligen rasande angrepp på såväl den heuristiska metoden som idéerna om matematiken som bildningsmedel i allmänhet.[1] Här kan nämnas en synnerligen välformulerad artikel av Gullbrand Elowson, där han argumenterar för det orimliga i antagandet att det skulle vara möjligt för en lärjunge att "upptäcka" matematikens sanningar, vilka han menar är "seklers verk". Han föreslår själv en metod som istället går ut på att man efter bästa förmåga skall förklara det man vill att lärjungarna skall lära sig. "Tacksamma för hvad vi emottagit från förgångna tider", avslutar han sin artikel, "böra vi för vår undervisningsmetod uppställa såsom regel: att göra läroämnet begripligt".[2] Flera av citaten i avsnittet om matematikens hinder ovan knyter an till den heuristiska metodens problem, i synnerhet det av Kjellberg, där man kan läsa att den heuristiska metoden snarare bibringade lärjungarna en "aritmetisk fraseologi" än bildning och kunskaper.[3]

Övning

[I det här avsnittet skall jag beskriva hur man talade om övning som ett sätt att nå skolmatematiken mål. En viktig poäng är att diskussionen uppvisar en stor idérikedom i fråga om övandets utformning. Få verkligt nya idéer tillkom efter 1860-talet. Följande metodregler utgör en kortfattad sammanfattning av tidens idéer rörande hur undervisningen borde vara utformad med fokus på övandet:

Låt lärjungen öva, för det är genom övning som han når fram till begrepp. Låt honom öva för att befästa sina insikter och kunskaper. Låt honom öva för att se hur han kan använda det han lärt sig. Låt honom öva för att undervisningen skall bli levande och rolig.

Gör uppgifterna realistiska med avseende på lärjungens framtida vuxenliv. Gör uppgifterna realistiska med avseende på lärjungens omgivning. Gör inte uppgifterna krångligare än de som möter honom i det praktiska livet. Använd även räkneuppgifterna för att vidga lärjungens synfält. Ge ibland uppgifter som inte kan lösas, som är orimliga eller innehåller onödig information. Gör övningarna praktiska, och låt lärjungen öva med på exempel mätning, även utanför skolans väggar.

Inled övandet med små tal och enkla uppgifter. Gå alltid från det lättare till det svårare. Framställ stoffet i en logisk ordning, så att det efterföljande alltid är förankrat i det föregående. Ta dig inte an för mycket stoff. Gå långsamt fram. Gå inte vidare förrän det föregående är grundligt förstått. Lämna inga luckor. Ge alltid uppgifter som är lagom svåra. Introducera inte siffror och symboler förrän lärjungen förstått vad de handlar om. Inled varje nytt moment med muntlig räkning. Använd lösningsmetoder som är logiska med utgångspunkt från barnets ståndpunkt. Använd en enkel, exakt och logisk terminologi.]

7.4. Analys

I den ovanstående redogörelsen har jag visat att det kring mitten av 1800-talet fanns en mångdimensionell, men samtidigt i viss mån enhetlig diskussion kring grundläggande matematikundervisning. De som talade var de allt fler lärarna i matematik, knutna dels till den framväxande folkskolan, dels till läroverket, där matematik nu hade blivit ett relativt "stort" ämne. Diskussionens förenande tema var undervisningspraktiken – dess brister, och hur dessa kunde övervinnas.

Matematiken hade vid denna tid blivit ett tämligen mångfacetterat objekt. Matematiken kunde omväxlande ses som ett praktiskt nyttigt redskap, en del av en allmän medborgerlig bildning, ett redskap för att forma tänkandet, samt sist men inte minst som ett bildningsmedel i Pestalozzis bemärkelse. I 1850- och 1860-talets skolmatematiska diskussion löper med andra ord de historiska trådar rörande matematikens skiftande betydelser vilka jag beskrivit i tidigare kapitel samman.

Genom matematiken förknippades undervisningspraktiken med en ganska mångfacetterad uppsättning mål, bland vilka bildningsmålet stod i centrum. Genom detta mål upprättade skolmatematiken en sorts autonomi i förhållande till andra delar av samhället förknippade med matematik, till exempel den matematiska vetenskapen, samt de ekonomiska och tekniska samhällssfärerna. Man kan säga att skolmatematikens talesmän framställde sig själva som experter på bildande matematikundervisning.

[1] Nämligen E. G. Björling, "Några reflexioner, beträffande elementarundervisningen i mathematik, i anledning af den i Bihang till paedagogisk tidskrift intagna berättelsen om Rektorsmötet 1868," *Pedagogisk Tidskrift* (1869).
[2] Elowsson, "Om den aritmetiska undervisningsmetoden. 1 Diskussion om undervisningen i aritmetik."
[3] Kjellberg, "Undervisningen i räkning med decimaler."

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Matematiken, framför allt i egenskap av bildningsmedel, fungerade i diskussionen som förklarande utgångspunkt för en uppsättning undervisningsmetodiska idéer vilka i sin rikedom inte stod matematiken långt efter. Man diskuterade vikten av åskådlighet, vikten av att eleverna fick redogöra för sitt tänkande och vikten av övning. Man betonade nödvändigheten av att gå långsamt fram, inte ta sig an för mycket stoff, och låta begreppet ta form innan man introducerar siffror och symboler.

Nödvändigheten av en förändrad undervisningspraktik motiverades med hänvisning till skolmatematikens tidigare misslyckande. Man framställde matematiken som en mäktig positiv kraft, vilken tills helt nyligen stängts inne på grund av felaktiga undervisningsmetoder. Genom detta resonemang kunde skolans matematikundervisning (och därmed de själva) tillmätas cental betydelse.

Det finns anledning att här återknyta till räknelärorna och räknekonsten. Den skolmatematiska diskussion jag beskrivit här, tog (med viss marginal) plats efter det att den sista generationen författare av "traditionella" räkneläror hade försvunnit. I en mening var det deras framställningssätt som nu blev föremål för tämligen hänsynslös kritik. Å andra sidan var det dock inte dessa räkneläror som utgjorde kritikens egentliga föremål. Kritiken riktade sig mot den typ av tämligen speciella läroböcker som publicerades under 1830-talet. Påtagligt är att kontakten med de äldre räknelärorna därmed gick förlorad. Åtminstone tycks det från 1850-talet ha blivit i det närmast omöjligt att tänka om räknekonst på det sätt som låg till grund för räknelärornas utformning.

Den doxa som då tog plats har bara förändrats marginellt fram till idag. Därför känns många av de metodologiska idéer som presenterats i det här kapitlet märkligt aktuella. Detta är en viktig anledning till att jag i kapitel 2 ägnade viss möda åt att beskriva räknekonsten på sina egna villkor. Jag ville visa att räknekonsten, så som den framställs av till exempel Roloff Anderssons i hans *Aritmetica Tironica* från 1779, inte har någonting med skolmatematikens "mekanik" att göra.

[Poängen är att skolmatematiken ungefär 1850 blev en sorts självrefererande helhet. Detta gäller både det förflutna, och det omgivande samhället. Skolmatematiken satte sina egna mål och hade sina egna metoder att nå dem. Målen var ett resultat av allt det som matematik vid denna tid kunde förknippas med. Metoderna var anpassade till skolans praktiska förutsättningar.]

I det här kapitlet har jag visat på samspelet mellan undervisningspraktiken och föreställningar om matematikens egenskaper. Orsakspilen har huvudsakligen gått i riktning från matematiken till praktiken, det vill säga – jag har visat hur en rad delvis besynnerliga undervisningsmetoder motiverats med hänvisning till relationen mellan matematiken och barnet. Å ena sidan har därmed föreställningar om matematiken – vars historiska ursprung som delar av diverse olika tankesystem beskrivits i tidigare kapitel – fungerat som en bestämmande kraft för skolan. Å andra sidan – vilket är minst lika viktigt för mitt övergripande resonemang – kan man emellertid också skönja hur föreställningar om matematikens egenskaper förskjutits och getts nya innebörder, med utgångspunkt från undervisningspraktiken. Detta omvända orsaksförhållande, och mer exakt hur undervisningens praktiska förutsättningar mot slutet av 1800-talet ledde till en förändrad syn på hur man lär sig matematik, utgör temat för nästa kapitel.

8. Skolmatematik för tyst övning

Det förra kapitlet handlade i stor utsträckning om hur de svenska skolmatematikerna, decennierna efter 1800-talets mitt, motiverade sin verksamhet med hänvisning till matematikens egenskaper. I det här kapitlet ligger fokus istället på hur denna verksamhet kan förstås mot bakgrund av undervisningens praktiska villkor. Dessa villkor skymtade även i det förra kapitlet i kommentarer rörande att undervisningen borde göras "lekfull" och vikten av lärjungarnas "ögonblickliga lydnad".[1] Här står de i redogörelsens centrum.

Jag börjar med en redogörelse för det faktum att man under andra halvan av 1800-talet, både i folkskolan och i läroverket, delvis motiverade matematikens plats i skolan med hänvisning till argument som egentligen inte hade någonting alls att göra med de högre mål som man menade att de matematiska studierna skulle leda till, det vill säga de mål som stod i fokus för det förra kapitlet. Vad gäller läroverket talade man om de matematiska studierna som en *ersättning* för de klassiska språken, med syfte att ge studierna på linjen för de som "icke läsa klassiska språk" behövliga ramar.[2] För folkskolans del talade man om de matematiska studierna som ett verktyg för att hålla eleverna sysselsatta. Trots att läroverket och folkskolan verkade under tämligen olika materiella villkor, fanns en gemensam grundsyn på de matematiska studierna som sträckte sig över gränsen mellan de två institutionerna, nämligen att själva förmedlingen av matematiskt stoff till lärjungarna var av underordnad betydelse.

Därefter gör jag några nedslag i den skolmatematiska diskussionen så som den gestaltade sig kring mitten av 1880-talet. Jag utgår här från ett mindre antal sammanhängande framställning av skolmatematikens mål, dess problem och hur dessa problem borde övervinnas. Jag använder även mötet mellan olika ståndpunkter, framför allt mellan en ståndpunkter företrädda av en äldre generation och ståndpunkter företrädda av den nya generation som tog plats på scenen just under 1880-talet, för att synliggöra det som utgjorde skolmatematikens särdrag vid denna tid. Undervisningens praktiska förutsättningar löper som en röd tråd genom såväl de uppsatser genom vilka enskilda individer presenterade sin syn på skolmatematiken, som genom de stundtals animerade diskussionerna rörande, framför allt, hur en ändamålsenlig lärobok borde vara utformad.

Under den period som står i fokus för detta kapitel skedde vad man kan kalla ett paradigm skifte rörande läroböckernas utformning – i synnerhet rörande läroböcker i aritmetik. Innan kapitlets avslutande analys beskriver jag detta nya läroboksparadigm, samt visar hur det i relativt oförändrad form kom att ligga fast fram till mitten av 1900-talet.

Det här kapitlet har två relativt oberoende poänger. För det första att det nya läroboksparadigmet på ett tämligen uppenbart sätt var ett resultat av de undervisningens praktiska villkor som jag strax skall beskriva. För det andra att den undervisning som detta nya läroboksparadigm understödde, med utgångspunk från mitt teoretiska ramverk, kan sägas ha bidragit till att utsträcka den matematikens blick som jag ovan talade om i anknytning till undervisningen vid krigsakademin på Karlberg, till allt större delar av det svenska samhället. Skolmatematiken rörde sig nu med hög hastighet från samhällets periferi mot dess centrum.

8.1. Matematikens plats i folkskolan

Folkskolan var, som vi såg i kapitel 6, från början huvudsakligen ett instrument för att, beroende på hur man väljer att uttrycka det, sysselsätta, bemästra, disciplinera eller helt enkelt ordna en strukturerad verksamhet för barnen i samhällets lägre skikt. Ordning utgjorde därför folkskolans första problem, och mer

[1] Sandberg, *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*, 134.
[2] Erland Edlund, m. fl., *Underdånigt betänkande och förslag afgifvet den 17 december 1858 af den för granskning af 1856 års Skol-Stadga i nåder förordnade Komité* (Stockholm: 1858), 43. Se även Henrik Petrini, "Matematiken i skolan," *Pedagogisk Tidskrift* (1905).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

exakt hur ett fåtal vuxna skulle kunna hålla ordning på ett stort antal barn. Växelundervisningssystemet utgjorde ett av flera verktyg för att åstadkomma denna ordning. Pestalozzis bildningsidéer ett annat. I förhållande till denna övergripande ordningsproblematik spelade de matematiska studierna en tämligen underordnad roll – även om de intog en central plats i Pestalozzis bildningstänkande.

Under 1860- och 1870-talet skedde ett skifte mellan två olika principer för ordningsskapande. Fram till 1850-talet hade växelundervisningssystemet utgjort den självklara utgångspunkten för anordnandet av folkundervisning. Från 1860-talet kom folkundervisningens talesmän att istället framhålla "klassundervisning" som idealet att sträva mot. En nyckelroll i övergången mellan de två principerna brukar tillskrivas Torsten Rudenschiölds uppsats *Den svenska folkskolans praktiska ordnande* som publicerades 1856.[1]

Rudenschiöld utgick från två frågor: hur folkundervisningen skulle kunna komma alla till del, och hur den borde utformas. Vad gäller skolmatematiken kan nämnas att han tog upp huvudräkning och "[s]ifferräkning på tavla" som "nödvändiga" ämnen, men med kommentaren:

> Dessa båda sistnämnde kunskapsämnen kunna väl icke upptagas såsom – strängt taget – för alla nödvändiga; men dock såsom för alla i det allmänna lifvet nästan oumbärliga; och de må så mycket heldre räknas till de allmännaste läroämnena, som det utan svårighet låter sig göra, derest Folkskolan ändamålsenligt inrättas, att åt alla i sin ordning meddela elementar-undervisning i Skrifva och Räkna.[2]

Rudenschiöld tog avstamp i en skarp kritik mot växelundervisningsmetoden. Rudenschiöld beskrev metoden på följande sätt:

> Man fördelar barnen i små flockar eller Tabellcirklar, bland hvilka Läraren fruktlöst förspiller sin personliga kraft på tillsyn och undervisning åt några få barn i sender, och detta under ett tankestörande sorl – om icke skrik – från den öfriga skaran, som är öfverlemnad åt ledningen af i allmänhet vanmäktiga Monitörer.[3]

Det skall dock sägas att denna beskrivning gällde metodens användning i folkskolan, och att kritiken därmed egentligen inte riktades mot själva metodens särdrag – att barnen fick undervisa varandra – utan hur denna metod i praktiken kommit att tillämpas. Tvärtom gav faktiskt Rudenschiöld i sin uppsats exempel på hur metoden kunde användas med stor framgång. I en fotnot skriver han:

> Jag har en gång lyckats förmå den rikaste bonden i en Socken, en f. d. Riksdagsman, att medgifva sin villiga 12-åriga dotter att åt en närboende, utfattig, men äfven om sina barn ytterst vårdslös herregårstorpares 13-årige son under ett par korta stunder om dagen gifva undervisning uti innan läsning, hvilket af flickan verkställdes med det besked, att gossen, ifrån att alls icke kunna läsa, hvarföre han ock ofta led mycken smälek, ej blott inom kort lärde sig sjelf läsa, utan sedan i glädjen häröfver blev en villig undervisare för andra. Barnen sjelfva äro för denna vexelundervisning i allmänhet mycket villige.[4]

I och med att Rudenschiöld tillmätte läraren roll en så stor betydelse i undervisningen, ligger det nära till hands att se hans uppsats som knuten till den framväxande lärarkårens anspråk. Bland annat ovanstående citat gör denna tolkning något mer problematisk. Än mer problematisk blir den av att Rudenschiöld också uttalar sig mycket positivt angående hemundervisning. Han skriver att man i folkskolorna "långt ifrån sällan" hittar

> lärjungar af ända till 12 års ålder, som efter flera års skolgång nästan helt och hållet sakna innanläsningskunskap. Deremot finner man mycket ofta i små fribildade Stugu-skolor med få lärjungar under en oexaminerad s. k. Läsmor, att barnen allmänneligen ända ned till 7- stundom 6-åringarne kunna läsa väl innantill, och att de detta lärt på mycket kort tid, jemfördt med förhållandet i de allmänna Folkskolorna.[5]

Tveklöst kom Rudenschiölds uppsats att bidra till den process genom vilken endast lärare ansågs lämpliga att undervisa. Inte desto mindre kan man här se att Rudenschiöld kanske inte skulle ställt sig entydigt positiv till denna rörelse. Klart är likväl att Rudenschiöld menade att undervisningen i folkskolan borde organiseras på ett sådant sätt att undervisningen huvudsakligen bedrevs av lärare. Men för att detta skulle vara möjligt behövdes praktiska verktyg som gjorde det möjligt för läraren att göra "ett i sender".[6]

---

[1] Torsten Rudenschöld, *Svenska folkskolans praktiska ordnande* (1856).
[2] Ibid., s. 2.
[3] Ibid., s. 24.
[4] Ibid., s. 22, not.
[5] Ibid., s. 25.
[6] Ibid.

Rudenschiöld hade många förslag rörande undervisning som vi idag känner igen och tar för givna. När det gäller läxförhör föreslår han läraren inte skall förhöra *alla* elever, eftersom detta tar för lång tid. Istället skall man slumpvis välja ut några som får läsa läxan: "Ovissheten om hvilken, som för dagen skall blifva hörd och i hvilken del af lexan, eggar alla att öfverläsa allt, för at icke misshaga en älskad lärare, som tillika är känd för att eftertryckligt, men rättvist straffa sjelfvsvåld".[1] Och vidare: "Under lexors hörande, en i sender, skall i skolan vara tyst; ämnet får deraf högtid, och kamraternas deltagande i hörandet stegrar eggelsen af förrättningen".[2] En tydlig formulering är följande:

> Till en god läsordning för Folkskolan hörer nemligen efter min tanke bland annat, att under lectionerna i skolan icke får höras mer än ett utaf tvenne ljud: det ena är lärarens föredrag eller frågor, och det andra är lärjungarnes svar, stundom enstaka och stundom samfällt.[3]

En central fråga blev dock hur läraren skulle kunna få de elever som inte stod i fokus för han omedelbara uppmärksamhet att hålla sig så lugna och tysta som Rudenschiöld beskriver att de borde vara. För detta ändamål introducerar Rudenschiöld *tysta övningar*. Vad jag har kunnat se, är Rudenschiöld den första som använder detta uttryck.

De tysta övningarna

De tysta övningarnas kännetecken är att deras första syfte är att se till att de barn som ägnar sig åt dessa övningar är tysta. I diskussionen förekommer givetvis en rad andra argument för dessa övningar – om inte annat själva namnet avslöjar dock övningarnas band till sin praktiska funktion. Rudenschiöld skriver att de som inte kan ta del av lärarens omedelbara undervisning,

> turvis sysselsättas med tysta öfningar, såsom t. ex. i skrifning, för att icke störa den tystnad i skolan, som oeftergifligen måste äskas, för att lärarens till en skara af lärjungar på en gång ställda ord också måtte unna tilltvinga sig allas uppmärksamhet.[4]

Man bör här komma ihåg att även om Rudenschiöld införde "klassundervisning", en term som vi har lätt att tolka idag, så var det inte fråga om samma typ av "klasser" som det var fråga om i, säg, grundskolan (som inrättades 1962). I folkskolan var det långt in på 1900-talet vanligt att en ensam lärare hade att undervisa en mängd elever som var olika gamla och hade "kommit olika långt" – för att använda en terminologi som passar den praktik det här är fråga om – i sina läroböcker. Det var framför allt av denna anledning som de tysta övningarna var behövliga. Fortfarande var det nödvändigt att strukturera undervisningen med hänsyn till ett antal mindre grupper av elever som befann sig på "samma ställe" (jag lånar här skolans egen rörelsemetaforik med viss tvekan). Det var av denna anledning de tysta övningarna var behövliga. De utgjorde en tämligen direkt ersättning av monitörernas verksamhet.

En artikel i *Folkskolans Vän* 1872 tar upp den då naturliga frågan: "Bör läraren aldrig använda något af barnen till hjelp vid undervisningen?"[5] Svaret som ges är att man visst kan "använda äldre barn till biträde vid undervisningen, utan att man derigenom bryter mot gällande lag eller mot pedagogikens regler".[6] Växelundervisningsmetoden tas här, om än försiktigt, i försvar. Karl Kastman, artikelns författare, konstaterar att man "ej kunnat begagna sig af nog starka uttryck vid fördömandet af vexelundervisningsmetoden" och att det blivit något av ett "axiom, att läraren i folkskolan vi sin undervisning ej skulle få använda något af barnen till hjelp". Växelundervisningen fick bära hela skulden för "folkskolornas släta tillstånd under den tid, då detta förfaringssätt följdes".[7]

Vad man då emellertid förbisåg, menar Kastman, var metodens goda sidor. Nämligen att "genom att lära andra lär man sig sjelf".[8] Att se det som ett "pedagogiskt missgrepp" att låta barn undervisa – att man därigenom skulle ta tid från dessa barn, så att de skulle "hindras från at göra så stora framsteg, som de annars skulle hafva gjort" – är därför, menar han, inte riktigt. Kastman tillbakavisar också två andra in-

[1] Ibid., s. 33.
[2] Ibid.
[3] Ibid., s. 34-35.
[4] Ibid., s. 35.
[5] Carl Kastman, "Bör läraren aldrig använda något af barnen till hjelp vid undervisningen?" *Folkskolans vän*, no. 8 (1872).
[6] Växelundervisningsmetoden hade förbjudits 1864, och detta utgör artikelns utgångspunkt. Ibid.
[7] Ibid.: 118.
[8] Ibid.: 119.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

vändningar mot att använda barn i undervisningen. Först att detta alltid leder till oordning. Det behöver det inte göra, skriver han: "Äro barnen vana vid ordning och tukt, fullgöra de nog ordentligt, hvad dem föreläggеs, äfven om deras närmast upplysningsman är en äldre kamrat". Sedan åsikten att undervisning förmedlad av barn "ej kan var af någon synnerligt värde; ty dessa sakna ju tillräckliga insigter och nödig erfarenhet". Kastman erkänner detta, men menar att barnen inte alls skall *ersätta* läraren, utan snarare fungera som "en slags uppsyningsmän, hvilka skola se till, att de mindre barnen riktigt lösa de uppgifter som gifvas dem, för at inöfva något förut af läraren meddeladt och förklaradt".[1]

I artikelns avslutning blir det tydligt att den användning av lärjungar för undervisning som Kastman tänker sig, ligger nära de tysta övningarnas princip. Han skriver:

> Har läraren genomgått, huru tal af ett visst slag böra behandlas, och han sedan vill låta barnen inöfva detta till full färdighet; kan han gifva dem till uppgift att uträkna en visst mängd sådana tal, hemtade ur deras exempelsamlingar, samt uppdraga ett äldre barn att se till dels att de flitigt arbeta, des om att de rätt löst sina uppgifter. Under tiden kan läraren ostördt egna sig åt de öfriga afdelningarna. [2]

Artikeln är skriven i ett övergångsskede, mellan användande av växelundervisningsmetoden, och en klassundervisning möjliggjord genom de tysta övningarna. Vad man inte får glömma är att det är en konst att utforma tysta övningar. Som vi skall se kretsade diskussionen under 1880-talet bland annat kring hur väl läroboksförfattare fått sina uppgifter att motsvara de tysta övningarnas syftesmål. Kastman låter de tysta övningarna få ett sorts stödhjul i de äldre övervakande lärjungarna.

I en senare artikel samma år konstaterar samme Kastman, angående ett läraremöte, att många där "uttalade [...] den erfarenheten, att dessa öfningar i allmänhet ej burit några goda frukter".[3] Kastman ser orsaken till detta i att dessa "ej veta att rätt använda dem".[4] I artikeln förklarar han hur detta bör gå till. Först ger han dock en rad argument för varför tysta övningar bör användas.

För mitt resonemang är det viktigt att notera att Kastman i sina argument kombinerar hänvisningar till matematiken så att säga "riktiga" mål, med hänvisningar till övningarnas praktiska funktion för att strukturera undervisningspraktiken. Först säger han att det bara är genom dessa övningar som barnen lär sig "fritt och sjelfständigt förfoga öfver vad de inhämtat".[5] Han talar sedan om att övandet leder till att barnen "ännu klarar uppfatta, ännu fastare i minnet inpregla hvad läraren meddelat dem".[6] Han tar upp fördelen att övningarna den bästa tänkbara kontroll på om barnen lärt sig vad de skall ,[7] och slutligen att den typ av självverksamhet som tysta övningarna innebär är karaktärsutbildande – de fyller, menar Kastman, en uppfostrande funktion.[8]

Sedan följer dock ett argumentet som tycks överskugga de andra:

> Slutligen är det ju endast genom användandet af de så kallade tysta öfningarna, som det blir möjligt för läraren att samtidigt undervisa flere afdelningar af barn, som ega olika kunskapsmått.[9]

Kastman konstaterar att tysta övningar av denna anledning helt enkelt är *nödvändiga* både i småskolan och i folkskolan, och i alla undervisningsämnen, och går sedan vidare med förslag till hur dessa övningar kan utformas. Mot bakgrund av detta sista argument är det svårt att se de första "riktiga" argumenten som annat än ett försök att få denna praktiska nödvändighet att framstå i mer positiv dager.

Vad gäller de tysta övningarnas konkreta utformning föreslår Kastman för småskolematematikens del, att man "gifver barnen till uppgift att skrifva siffror; att uppskrifva siffror i viss ordningsföljd; att uträkna små tal".[10] I folkskolan kan man, skriver han, låta lärjungarna "på sina taflor uträkna exempel ur exempelsamlingarna".[11]

Kastman avslutar med att ge anvisningar rörande hur de tysta övningarna bör organiseras. Framför allt är det, menar han, viktigt att de anordnas enligt en förutbestämd plan, snarare än att de anordnas efter

---

[1] Ibid.
[2] Ibid.: s. 120.
[3] Carl Kastman, "De tysta öfningarna i skolan," *Folkskolans vän* (1872): 229.
[4] Ibid.
[5] Ibid.: 230.
[6] Ibid.
[7] Ibid.
[8] Ibid.
[9] Ibid.
[10] Ibid.: 231.
[11] Ibid.: 233.

lärarens godtycke, vilket med nödvändighet leder till "oregelmässighet och planlöshet" som då "förhindra undervisningen från att bära de goda frukter, som hon annars skulle alstra af sig".[1] Man måste nog i förväg precisera vad barnen skall göra och sedan se till att de gör just detta och inget annat. Övningarna måste vara avpassade så att det inte är för svåra, och därför "förtager [barnens] lust att lära". Slutligen är det nödvändigt att "en god disciplin är rådande" för att de tysta övningarna skall bli fruktbringande. "Barnen böra veta och känna, att lärarens ögon alltid hvila på dem äfven då, när han ej omedelbart undervisar dem".[2] Detta inte minst för att förhindra att de skriver av varandra – "de måste lära att reda sig sjelfva, om de skola blifva sjelfständiga".[3]

Fem år senare tar Kastman upp frågan om de tysta övningarna igen.[4] I denna artikel, från 1877, framgår att en invändning mot de tysta övningarna är att de leder till "mekanik". Att låta barnen arbeta själva var nämligen inget nytt på 1870-talet; snarare betraktades denna metodik som något man äntligen lagt bakom sig. Frågan var: hur skiljer sig de tysta övningarna från gångna tiders "döda minnesläsning" och "ofruktbara mekanism"? Kastman argumenterar här på ett välbekant sätt i förhållande till det förflutna. Han skriver att problemet med gångna tiders tysta räknande är att man låtit barnen arbeta med uppgifter de inte förstod – vilket ledde till "mekanik". Idag är, fortsätter han, problemet istället det motsatta: att läraren "rödjer bort alla hinder, på det att barnen måtte kunna gå framåt lugnt och beqvämt, utan ansträngning och möda", vilket leder till "tankekraftens förslappning". Det rätta ligger, menar Kastman, "i midten":

> att det sålunda är för barnens utbildning till hurtiga, omdömesgoda, och dugande menniskor fördelaktigast, om de först under läraren handledning få lära att lösa uppgifterna och sedan på egen hand få öfva sig med lösning af likartade, till dess de vunnit fullgod insigt och färdighet derutinnan.[5]

Som många gånger förut, kan vi här se hur "den rätta medelvägen" hotas av mekanik från flera håll. Kastman föreslår i denna artikel, vad gäller småskolans räkneundervisning, att barnen "sysselsättas med skrifning av siffror i ordningsföljd, fram- och baklänges [...] att uppskrifva en mängd siffror på det sättet, att man hoppar öfver hvar annan, hvar tredje o. d.".[6] Detta förutom att räkna enkla uppgifter, den övning som kom att stå i centrum för folkskolans tysta övningar. Artikeln från 1877 avslutas med exakt samma anvisningar som artikeln från 1872 – nu i punktform.

Två år senare, 1879, tycks diskussionen rörande de tysta övningarna ha varit i allra högsta grad levande. Kastman verkar ha mött motstånd under ytterligare något lärarmöte, och är nu uppenbarligen tämligen irriterad över att de tysta övningarna inte accepteras. De har ett fel, skriver han, och detta är, "att de äro något nytt".[7] Det är därför de stöter på motstånd. Men det torde inte desto mindre, skriver han, vara

> något djerft att uttala förkastelsedomen öfver dem, innan de ännu hafva visat sig vara olämpliga, ty att en eller annan lärare ej med fördel kunnat begagna dem, bevisar ingenting.[8]

Kastman knyter igen problemen till bristande systematik. Tysta övningar fungerar inte, skriver han, utan noggrann planering. Tydligen har kritik mot de tysta övningarna nu vävts samman med en mer allmän kritik mot seminarierna. Det har, skriver Kastman, "antydts att läraren, sedan han kommit uti tjenstgöring vid skolan, ej behöfver synnerligen fästa sig vid hvad vid seminerierna inhemtats, enär detta ej lämpar sig i folkskolan".[9] Ett sådant synsätt tyckte givetvis Kastman, som var seminarielärare, var mycket olyckligt. Dels bör, skriver han, seminarierna och folkskolan stå i "nära samband med hvarandra".[10] Till detta kommer att "Seminarierna hafva bättre tillfälle än den enskilde läraren att följa med pedagogikens och metodikens utveckling", och av denna anledning borde läraren "tid efter annan göra sig reda för de åsigter, som nu der äro rådande; de förfaringssätt, som nu der följas".[11] Och, med andra ord, inte vara så kritiska till de tysta övningarna.

---

[1] Ibid.: 233-34.
[2] Carl Kastman, "De tysta öfningarna i skolan," *Tidning för Folkskolan* (1877?): 234.
[3] Kastman, "De tysta öfningarna i skolan," 234.
[4] Carl Kastman, "De tysta öfningarna i Folkskolan," *Tidning för Folkskolan* (1877).
[5] Ibid.: 73.
[6] Ibid.: s.?
[7] Carl Kastman, "Ytterligare om "de tysta öfningarna"." *Tidning för Folkskolan* (1879): 209.
[8] Ibid.
[9] Ibid.: 210.
[10] Ibid.
[11] Ibid.: 211.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Det är emellertid klart att många lärare misslyckats med att få de tysta övningarna att fungera. Detta knyter Kastman till folkskolans övergripande problem att åstadkomma *ordning*. För att nå detta mål borde man inte, skriver han, strida inbördes, utan arbeta gemensamt. Kastman identifierar sedan barnens föräldrar som folkskolans huvudsakliga fiende, den viktigaste orsaken till bristande ordning:

> Föräldrarna hafva menat sig haft rätten att sätta in sina barn i skolan, när de behagat; att låta dem gå der, då det synts dem för godt; samt att taga dem ur skolan, när de velat. Hvem vet ej huru mycket lärarens arbete härigenom försvårats och förtyngts?[1]

Kastman tecknar sedan en bild där systematisk organisation och noga uttänkta undervisningsplaner fungerar som ett sammanbindande kitt för folkskolan, som ställer dem enade och effektiva i förhållande till den yttre fienden. Och en del av detta är, givetvis, planerna för de tysta övningarna. Sedan följer liknande argument som tidigare, med samma slutkläm:

> Slutligen – vi upprepa det ännu en gång – kunna vi ej förstå, hur man kan undvara de tysta övningarna, när endast en lärare skall samtidigtundervisa barn, som stå på olika utvecklingsgrad och hafva inhemtat olika kunskapsmått, så vidt ej alldeles detsamma skall genomgås det ena året efter det andra.[2]

Denna artikel av Kastman genererade ett svar från folkskolläraren Sven Kellin, i vilket han bland annat gjorde lite reklam för ett system han utformat genom vilket elevernas uträkningar kunde kontrolleras utan användande av särskilt facit.[3] Kellins artikel tyder på att de tysta övningarna 1879 i stor utsträckning hade accepterats inom folkskollärarkåren. De föreskrevs i den "normalplan" för folkskolan som kommit ut 1878,[4] och Kellin menar att de påyrkades "vid våra skolmöten".[5]

Nästan ett decennium senare, 1886, påpekar Kastman ännu en gång att tysta övningar inte används i den utsträckning som de borde.[6] Även denna artikel resulterade i ett svar, innehållandes reklam för ett praktiskt hjälpmedel, denna gång en sorts "räknestavar" utformade av en viss P. Hagström, vilka tycks ha blivit synnerligen populära under de följande decennierna.[7] Vi får reda på att det ofta är "förenadt med mycken tidspillan att lemna barnen i småskolans och folkskolans första årsklass uppgifter till tyst öfning, om näml. uppgifterna skola uppskrivas å svarta taflan".[8] I en annan artikel, författad av folkskolläraren L. C. Lindblom, anförs även som ett problem att lärarna, när de skriver uppgifter på tavlan, "icke alltid [väljer] de för tillfället lämpligaste exemplen", samt att barnen ofta saknar pengar för att köpa läroböcker.[9] Hagströms räknestavar var utformade för att lösa dessa problem.

I artiklarna av Carl Kastman, och de svar dessa artiklar genererade, tecknas en bild av de tysta övningarna som ledandes till två väsensskilda typer av mål. Dels "högre" mål – vilka man känner igen från den skolmatematiska diskussionen i allmänhet, förutom att det mekaniska här betonas mer än vanligt. Tydligt är emellertid att ett andra, praktiskt mål, utgör övningarnas huvudsakliga motivering. Syftet att hålla eleverna tysta och sysselsatta satte ramarna för hur övningarna kunde utformas.

8.2. Matematikens plats i läroverket

I tidigare kapitel har det framgått att man ända sedan 1700-talet, vad gäller de matematiska studierna, ofta betonat att deras syfte inte är att leda till ett så stort matematiskt kunnande som möjligt, utan att det deras första syfte är att eleverna, genom själva arbetet med matematiken, på olika sätt skall formas och bildas.

---

1 Ibid.
2 Ibid.: 213.
3 Sven Kellin, "Ett strå till frågan om "de tysta öfningarne"." *Tidning för Folkskolan* (1879). Angående hans räkneböcker och system, se S. O. Kellin, *Den omutlige monitören: gm hvilken läraren kontrollerar utan facitbok uträkningen af Räknenötter* (Höör: Förf., 1878); S. O. Kellin, *Nya räknenötter* (Höör: Förf., 1881); Sven O. Kellin, *Anvisning vid användandet af "Nyaste räknenötter" jämte självkontrollerande facit* (Malmö: 1897); Sven O. Kellin, *Nyaste räknenötter: praktisk räknebok med självkontrollerande facit* (Stockholm: Bille, 1898).
4 [referens till sida i normalplanen]
5 Kellin, "Ett strå till frågan om "de tysta öfningarne"." 282.
6 Carl Kastman, "Om tysta öfningar i räkning," *Folkskolans vän* (1886).
7 Se P. Hagström, *Nyckel till Hagströms räknestafvar* (Trelleborg? 1885); P. Hagström, *Nyckel till Hagströms räknestafvar: anvisningar till stafvarnes uppställning till 3.000 räkne-exempel för tyst öfning i småskolan*, 2. uppl. utg. (Trelleborg: Utg., 1889).
8 hgm., "Om tysta öfningar i räkning (inom talområdet 1-1000)," *Folkskolans vän* (1885): 5.
9 L. C. Lindblom, "Räknestafvar af P. Hagström. Utgifvarens förlag, Kyrkoköpinge, Trelleborg.," *Folkskolans vän* (1885).

Denna syn på matematiken låg, som vi såg i kapitel 6 ovan, till grund för Pestalozzis bildningstänkande, inom vilket inhämtande av kunskaper framstod som högst oväsentligt och i det närmast något farligt som måste undvikas. Vad gäller läroverket kom denna ståndpunkt till exempel till uttryck i 1820 års läroverksstadga, vilken var uppenbart inspirerad av Pestalozzis idéer.[1]

Det ligger nära till hands att betrakta denna syn på matematiken som ett uttryck för en viss ambivalens i förhållande till matematiken som vetenskap. Uppenbarligen var det ju nämligen inte det vetenskapliga vetandet som man placerade i undervisningens centrum – ett vetande som givetvis ständigt förändrades – utan snarare en sorts tidlös essens som man menade fanns förborgad i matematiken. Jag skall här visa hur denna ambivalens i förhållande till matematiken, helt i linje med det ovanstående resonemanget rörande folkskolan, kan knytas till en ambivalens rörande de matematiska studiernas praktiska funktion i läroverket.

Låt mig utgå från var Henrik Petrini skrev 1905, när han blickade tillbaka på matematikens ställning i läroverket under 1800-talet:

> För att slippa rötäggen i klassen inrättade man för deras skull i mediet af förra århundradet en speciell linje, reallinjen, hvars hufvudsakliga särmärke var: ingen latinläsning. Men för att eleverna ej skulle slå dank under den tid kamraterna läste latin, satte man dem i brist på annat att räkna. Å andra sidan kunde man nu peka på de många matematiktimmarna och säga, att reallinjen var afsedd för dem som vilja välja den praktiska banan; detta lät ju bättre.[2]

Vad som sägs om den nya linjen i det betänkande som föregick 1859 års stadga ger visst stöd åt det Petrini påstår. För det första står det klart att matematik inte stod högst på utredarnas dagordning. Man skriver att man "vid uppgörandet af planen för undervisningen i detta ämne", varit tvungen att ta hänsyn till en rad omständigheter, genom vilka "uppgiften blifvit i ej ringa grad försvårad".[3] Tydligen har det varit svårt att avsätta tid till matematiken på grund av "andra ämnens behof" – behov som uppenbarligen ansågs viktigare än matematikens.[4]

Det är tydligt att det vid denna tidpunkt var tämligen oklart hur den nya "real"-linjen skulle utformas. Klart var att den inte skulle innehålla klassiska språk. Men sedan? "Högst ofullkomligt skulle likväl det härmed afsedda ändamålet vinnas", skriver man "om den reala undervisningen skulle förblifva endast, för att så säga, en negativ sida af den klassiska och icke tillika utveckla en sjelfständig, för densamma egendomlig, positiv karakter".[5] Reallinjen hade dittills definierats genom frånvaron av språk – vad den behöver, skriver man, är en medelpunkt, för

> [o]m man från en med följdriktighet och sammanhang uppgjord undervisningsplan borttager just de ämnen, som vid dess uppställande och utbildning tjenat till medelpunkt, kan det återstående föga egna sig att utgöra ett tillfredsställande helt för sig.[6]

Vad som krävs är att man ger "åt dessa lärjungars undervisning en öfvervägande styrka i andra ämnen", vilka då kan fungera som denna linjes medelpunkt. Det reala ämnet framför andra blev givetvis matematiken. När matematiken tog plats i läroverket var det alltså för att fylla ut den lucka som orsakats av att argumenten mot de klassiska språken slutligen fått genomslag. En uppenbarligen oönskad konsekvens av 1856 års stadga hade blivit att lärjungar som valt bort till exempel latinet ställdes sysslolösa under de timmar då det stod latin på schemat. Matematiken tog därmed plats som en utfyllnad av tid. Till saken hör att det fanns en skarp argumentation mot hemlexor i matematik – med hänvisning till risken för "överansträngning". Man menade att det "vid bibringandet af detta läroämne [var] ännu mera nödigt än i andra fall, att göra större afseende på grundligheten och säkerheten af de inhemtade kunskaperna, än på deras omfattning,[7] eftersom:

---

[1] *Anvisningar och råd till lärare, om sättet att verkställa hvad Kongl.: Maj:t i nåder uti skol-ordningen af den 16 Dec. 1820 stadgat och anbefallt. Bihang till uppfostrings-comiteens underdåniga förslag till skol-lag.Sthlm 1821.*

[2] Petrini, "Matematiken i skolan."

[3] Edlund, *Underdånigt betänkande och förslag afgifvet den 17 december 1858 af den för granskning af 1856 års Skol-Stadga i nåder förordnade Komité*, 31.

[4] Ibid.

[5] Ibid., 43.

[6] Ibid.

[7] Ibid., 32.

> Den inre styrkan af en lärjunges mathematiska kunskaper ersätter för honom i ännu högre grad saknaden af en vidsträckt kurs, än fallet är på andra undervisningsfält, och en blott minneskunskap är i mathematiken af ytterst ringa värde. Vidare har Komitén, vid uppställningen af skolans fordringar inom detta ämne, liksom vid de öfriga, bordt omsorgsfullt tillse, att icke omfånget vidgades derhän, att öfveransträngning uppstode för lärjungarne.[1]

De matematiska studierna skulle med andra ord fylla den tid som de, med hänsyn tagen till övriga ämnen, fått sig anvisad – varken mer eller mindre.

Kritik

Denna syn på de matematiska studierna kom till uttryck vid ett rektorsmöte 1869, vilket förtjänar uppmärksamhet på grund av att det resulterade i en ilsken och belysande kommentar av E. G. Björling – författaren av den lärobok i algebra som var mest använd under 1800-talet och som jag berättat om i kapitel 5 ovan.

Vad som sades under detta möte ter sig ganska harmlöst. Helt i linje med den gängse diskussionen kring skolmatematik under 1850- och 1860-talet månar man om att på olika sätt underlätta studierna. Vi känner igen argumenten: om lärjungen själv får läsa sig till hur uträkningarna skall göras, det vill säga lära sig regler ur en bok, blir den därpå följande övningen "mekanisk".[2] Istället måste *läraren*, långsamt och noga gå igenom allt nytt. Av denna anledning behövs knappast några "hemlexor", och knappast alls någon räknebok över huvud taget – utom "till hjelp för de mindre begåfvade".[3] Undervisningen skall, säger man, "gå från det konkreta till det abstrakta", och "vid den geometriska undervisningen borde läraren så leda ynglingarna, att de likasom af sig sjelfva efterhand framtaga satserna". Över huvud taget upprepar man många gånger att matematikstudierna inte bör ta "ynglingarnas tid för mycket i anspråk", utan att den borde begränsas till övningar "på lärorummet och meddelad lämplig handledning".[4] Övningar (i motsats till lärande av matematisk teori) är desto mer berättigade och nödvändiga, tilläger man, på grund av de "vid afgångsexamen nu gällande fordringarna" – ett argument som skulle få allt större betydelse från sekelskiftet 1900.

Björling tycks ha blivit rasande över det ovanstående resonemanget. Den artikel, publicerad i *Pedagogisk Tidskrift* 1869, där han kommenterar rektorsmötet är så genomdränkt av sarkasm att det många gånger är ganska svårt att förstå vad det är vad han vill ha sagt. I en not efter artikeln skriver tidskriftens redaktion, begripligt nog, att de "aldrig kunde föreställa sig" att deras lilla referat från rektorsmötet skulle resultera i denna våldsamma reaktion.[5]

Björling motiverar sitt inlägg med att referatet i fråga – vilket enligt honom bör betraktas som en redogörelse för "de församlade rektorernas yttranden om sina erfarenheter och åsigter" – förmodligen inte desto mindre riskerar att tolkas som "anvisningar och råd", något som "nödgar honom" att ingripa.[6]

Han ger sedan en kort beskrivning av diskussionens bakgrund. 1856 års läroverksstadga innebar, skriver han, en "betydlig förhöjning" av läroverkets matematikkurs.[7] Syftet med denna var "som ju hvarje sakkunnig vet", att ge Sverige en "ståndpunkt i ämnet någorlunda jemnhög med den, som motsvarande läroverk i Frankrike och Tyskland redan länge hade innehaft".[8] Utvidgningen av matematikstudiet resulterade emellertid i "ett i sanning kompakt motstånd". Mot de "sakkunniga" stod, skriver Björling, en väldig falang av dem "som fostrade af den gamla skolan, måste finna de nya fordringarna alltför öfverdrifna, ör att icke säga rentaf orimliga".[9] Faktum kvarstod dock; det nya matematiska pensat låg fast, och "den dag som i dag är", skriver Björling, "stå de qvar dessa förhöjda fordringar, med några modifikationer allenast".[10]

---

[1] Ibid.
[2] F. F.; m. fl. Carlsson, "Rektors-mötet 1868 [avdelning C: Mathematik]," *Pedagogisk Tidskrift* (1868).
[3] Ibid.: 7.
[4] Ibid.
[5] Björling, "Några reflexioner, beträffande elementarundervisningen i mathematik, i anledning af den i Bihang till paedagogisk tidskrift intagna berättelsen om Rektorsmötet 1868," 70.
[6] Ibid.: 60.
[7] Ibid.
[8] Ibid. Här kan man för övrigt notera en stor överensstämmelse med A. T. Bergius syn på matematiken, så som den kommer till uttryck i Bergius, "Om skolundervisningen i Matematik."
[9] Björling, "Några reflexioner, beträffande elementarundervisningen i mathematik, i anledning af den i Bihang till paedagogisk tidskrift intagna berättelsen om Rektorsmötet 1868," 61.
[10] Ibid.

Han kommer sedan till sin poäng. Den hänger ihop med det faktum att man brukar argumentera för matematik med hänvisning till två olika mål: "både [att] utveckla själsförmögenheterna och [att] bereda för samfundslifvets praktiska förhållanden".[1] Det är, menar Björling, det första av dessa mål som gör att man nu betraktar matematiken som ett av läroverkets huvudämnen. Men, skriver han, såg man inte matematiken som ett huvudämne i denna bemärkelse även före 1856? Hans poäng är, att i samma mån som man argumenterar med hänvisning till matematikens formalbildande egenskaper, så framstår det som mindre viktigt *vilken matematik, och hur mycket matematik* lärjungarna lär sig. Han går så långt som till att se detta argumenterande som inget annat än ett nytt sorts *motstånd* mot matematiken. "Ty – märk väl -" , skriver han,

> om det blott kan lyckas att få *all* uppmärksamhet rätt skarpt fixerad på *den* sidan af saken allenast, så blir ju sedan helt lätt att komma öfverens om obehöfligheten, jag väl ock obehörigheten af lärokursens utsträckning *utöfver dess förra gränser* [...][2]

Detta sätt att argumentera "för" matematiken, hänger, konstaterar Björling sedan, ihop med en viss syn på metodik, vilken också den kom till uttryck vid rektorsmötet, nämligen ett framhållande av den "sokratiska" eller "heuristiska" metodens användande i matematikundervisningen, den metod som, enligt Björling, föreskriver att "ungdomen bör muntligen ledas att *sjelf*, helt oförmärkt, stycke för stycke inventera och konstruera hela sin theori".[3] Björlings uppfattning är klar: matematik är något som kan och måste förklaras, den är, skriver han, ett språk med en bestämd grammatik, som man måste lära sig. Precis som latinets eller grekiskans grammatik kan den givetvis inte upptäckas av lärjungarna själva. Han argumentation ligger här helt i linje med Gullbrand Elowsons, som jag refererade i det förra kapitlet.[4]

I såväl läroverk som folkskola tog de matematiska studierna, i synnerhet från och med 1860-talet, allt mer plats. Fler lärjungar ägnade mer tid åt matematiken. Av det ovanstående framgår att denna expansion inte utan vidare kan förklaras med hänvisning till en eller annan tro på matematikens egenskaper, varken som bildningsmedel eller i egenskap av praktiskt nyttigt kunskapsstoff. Tvärtom måste den förstås mot bakgrund av de matematiska studiernas praktiska funktion för själva undervisningspraktiken.

8.3. Offentlig diskussion

Jag skall nu göra några nedslag i den svenska skolmatematiska diskussionen under 1880-talet. Denna diskussion var, liksom under de föregående decennierna, innehållsrik, och kan inte reduceras till något sorts svar på undervisningens praktiska behov. Inte desto mindre kom överväganden rörande just undervisningspraktiken att ta relativt stor plats vid just denna tidpunkt. I synnerhet gäller detta diskussionen knuten till undervisningen i folkskolan.

Talsortsmetoden

En viktig roll i diskussionen spelade en metodisk innovation som gick under namnet "talsortsmetoden". Den påminner intressant nog om de idéer inspirerade av läsundervisningen som C. O. Fineman gav uttryck för angående räkneundervisningen inom hans växelundervisningssystem.[5] Detta så till vida att man inom talsortsmetoden delade upp talen i (vad man uppfattade som) sina beståndsdelar, till exempel ental, tiotal, hundratal, och så vidare, och lade lärjungarnas förmåga att genomföra och förstå denna uppdelning till grund för undervisningen. Men man gick även längre än så. Genom en sorts generalisering av denna uppdelningsprincip betraktade man även "benämnda" tal, det vill säga enheter eller sorter, som delar av samma, menade de, enhetliga och logiska system. "Genom undersökning af talen och talsystemet finner man", kan man läsa,

---

[1] Ibid.
[2] Ibid.: 61-62.
[3] Ibid.: 62.
[4] Gullbrand Elowsson, "Om den aritmetiska undervisningsmetoden. 1 Diskussion om undervisningen i aritmetik.," *Tidskrift för matematik och fysik* (1868); Elowsson, "Om den aritmetiska undervisningsmetoden. 1 Diskussion om undervisningen i aritmetik."
[5] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*; Fineman, *Lärobok uti räknekonsten, lämpad efter vexelundervisnings-methoden.*

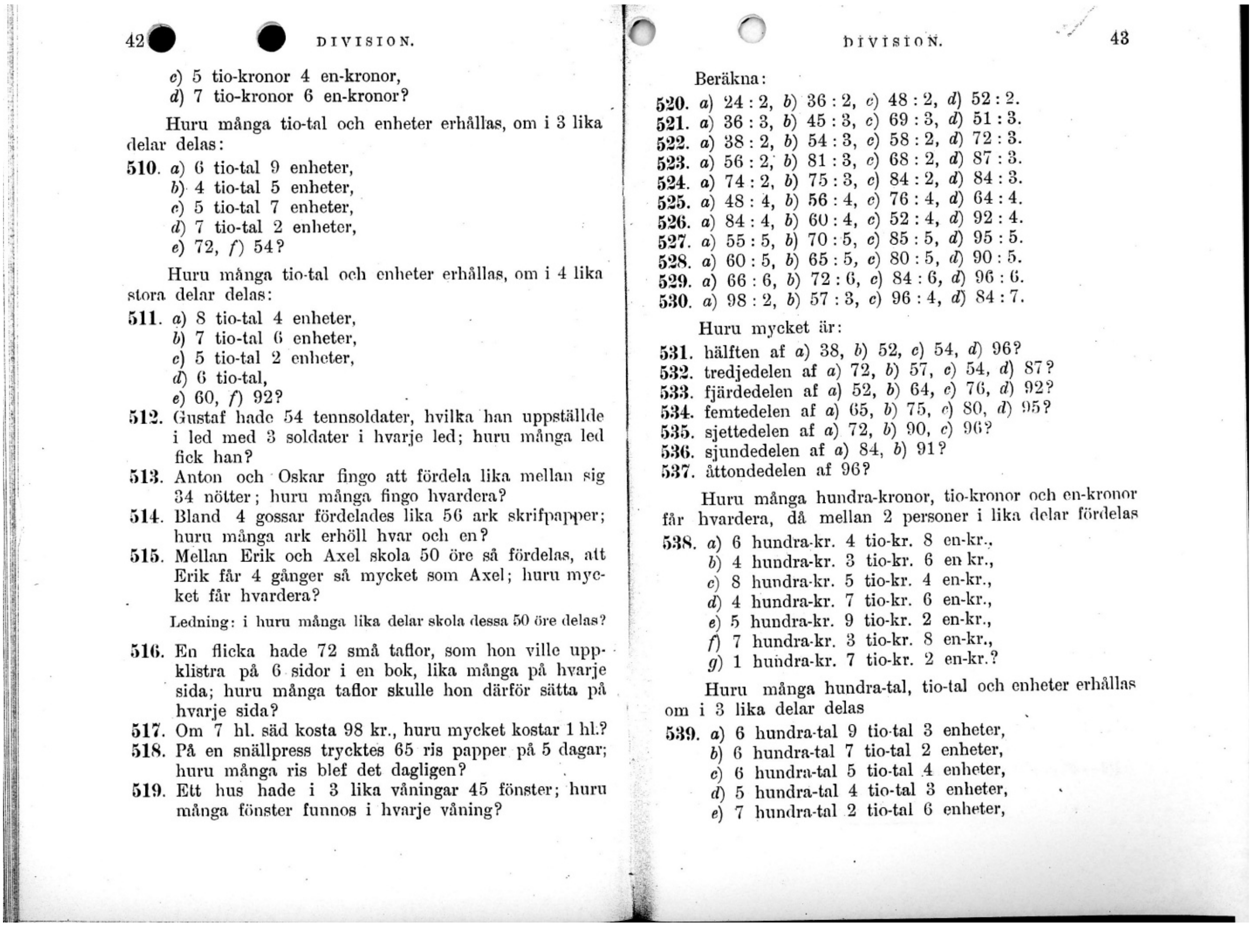
> 1) att antalen alltid hänföra sig till någon talsort, 2) att talsorterna alltid ingå åtskilda i talen, och 3) att, när vid talens bildning nya talsorter uppkomma, dessa alltid sammanföras med dylika af samma slag, när sådana förut finnas. Ur dessa förhållanden framgår lagen för talsorterna, och emedan äfven konkreta dekadiska sorter samt andra storheter kunna underordnas under den samma, kan den erhålla följande allmänna formulering: (1) *blott storheter af samma sort kunna sammanläggas, fråndragas eller omedelbart jemföras.* Såsom en omedelbar följdsats häraf och af undersökningen om sorters förhållande och förvandling framgår, att (2) *storheter af samma klass* (se terminologien) *måste först förvandlas till storheter af samma sort, innan de kunna behandlas enligt den först nämnda lagen*. I närmaste samband härmed står ock följande för undervisningen vigtiga grundsats, hvilken bör tillämpas så ofta det är möjligt, nämligen (3): *i talen behandlas hvarje talsort för sig*, eller med andra ord: talen behandlas uppdelade i talsorter.[1]

Det ligger mycket nära till hands att betrakta denna metod som en följd av ett specifikt skolmatematiskt sätt att förhålla sig till räknandets praktik. Man kan nästan ordagrant i citatet ovan känna igen räknelärornas anvisningar för hantering av sorter, det vill säga, att lika sorter skulle ställas upp ovanför varandra och hanteras för sig själv, liksom att man måste förvandla alla tal till "samma sort" innan de kan behandlas. Till detta kommer inspirationen från läsundervisningens sönderplockande av orden. Avgörande inflytande hade säkert även att det metriska systemet var på stark frammarsch, sedan länge i Europa, sedan relativt nyligen i Sverige.[2] Genom talsortsmetoden fick en rad aspekter av den skolmatematiska undervisningspraktiken en teoretisk förankring, väsensskild från såväl den vetenskapliga matematiken som matematikens tekniska tillämpningar.

Tämligen fascinerande är emellertid att talsortsmetodiken, samtidigt som den sammanfattade en rad praktiska aspekter av den skolmatematiska verkligheten – hur man adderar sorter, hur man i praktiken gjorde för att lära de yngsta barnen att läsa tal – framställdes som en metod att ställa matematikens *essens* i undervisningens centrum. Talsortsmetodiken sågs inte en metodik för praktiskt räknande utan ett sätt att göra undervisningen bildande. I och med talsortsmetodiken fick "talbegreppet" en betydligt mer precis innebörd än tidigare. Man knöt nu denna term till en förmåga att uppfatta och "se" talen enligt talsortsmetodikens principer, det vill säga som sammansatta av å ena sidan talsorter, och å andra sidan "antal" av dessa talsorter. Som en del av denna konkretisering av innebörden av talbegreppet började man fästa än mer uppmärksamhet än tidigare på skillnaden mellan siffra och tal. "Den första undervisningen bör", kan man i en text inspirerad av talsortsmetodiken läsa, "afse talbegreppens inlärande och derefter deras beteckning, ej tvärtom; följden torde annars blifva, att siffran träder för det outvecklade förståndet i stället för det begrepp den betecknar".[3]

Talsortsmetoden var en teoretisk sammanfattning av en rad aspekter av den skolmatematiska praktiken. Metoden kom emellertid att betraktas som ett uttryck för själva matematiken. De egenskaper som knutits till matematiken, kom därmed att knytas till talsortsmetodens principer. Framför allt att de skulle vara möjliga för lärjungarna att "upptäcka". I och med detta uteslöts successivt just de praktiska anvisningar som talsortsmetodiken utgjorde en sammanfattning av. De framstod, kan man säga, inte längre som nödvändiga, eftersom de utgjorde en logisk följd av själva matematiken. Nedanstående figur visar hur talsortsmetoden kunde ta sig uttryck i läroböckerna:

[1] *Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande. Räkning.*, s. 4.
[2] Det franska metriska systemet infördes i Sverige på slutet av 1880-talet. Innan dess hade man dock infört andra typer av lokala decimalsorter. I det här sammanhanget är det väsenliga att sorträkningen på 1880-talet i stor utsträckning kretsade kring dekadiska sorter.
[3] Ad. Meyer, "Granskning af läroböcker i Aritmetik verkstäld af komiterade, utsedde af Stockholms folkskollärareförening. Stockholm 1883. C. E. Fritze," *Pedagogisk Tidskrift* (1884): s. 7.


42 DIVISION.

c) 5 tio-kronor 4 en-kronor,
d) 7 tio-kronor 6 en-kronor?

Huru många tio-tal och enheter erhållas, om i 3 lika delar delas:

510. *a*) 6 tio-tal 9 enheter,
b) 4 tio-tal 5 enheter,
c) 5 tio-tal 7 enheter,
d) 7 tio-tal 2 enheter,
e) 72, *f*) 54?

Huru många tio-tal och enheter erhållas, om i 4 lika stora delar delas:

511. *a*) 8 tio-tal 4 enheter,
b) 7 tio-tal 6 enheter,
c) 5 tio-tal 2 enheter,
d) 6 tio-tal,
e) 60, *f*) 92?

512. Gustaf hade 54 tennsoldater, hvilka han uppställde i led med 3 soldater i hvarje led; huru många led fick han?

513. Anton och Oskar fingo att fördela lika mellan sig 34 nötter; huru många fingo hvardera?

514. Bland 4 gossar fördelades lika 56 ark skrifpapper; huru många ark erhöll hvar och en?

515. Mellan Erik och Axel skola 50 öre så fördelas, att Erik får 4 gånger så mycket som Axel; huru mycket får hvardera?

Ledning: i huru många lika delar skola dessa 50 öre delas?

516. En flicka hade 72 små taflor, som hon ville uppklistra på 6 sidor i en bok, lika många på hvarje sida; huru många taflor skulle hon därför sätta på hvarje sida?

517. Om 7 hl. säd kosta 98 kr., huru mycket kostar 1 hl.?

518. På en snällpress trycktes 65 ris papper på 5 dagar; huru många ris blef det dagligen?

519. Ett hus hade i 3 lika våningar 45 fönster; huru många fönster funnos i hvarje våning?

DIVISION. 43

Beräkna:

520. *a*) 24 : 2, *b*) 36 : 2, *c*) 48 : 2, *d*) 52 : 2.
521. *a*) 36 : 3, *b*) 45 : 3, *c*) 69 : 3, *d*) 51 : 3.
522. *a*) 38 : 2, *b*) 54 : 3, *c*) 58 : 2, *d*) 72 : 3.
523. *a*) 56 : 2, *b*) 81 : 3, *c*) 68 : 2, *d*) 87 : 3.
524. *a*) 74 : 2, *b*) 75 : 3, *c*) 84 : 2, *d*) 84 : 3.
525. *a*) 48 : 4, *b*) 56 : 4, *c*) 76 : 4, *d*) 64 : 4.
526. *a*) 84 : 4, *b*) 60 : 4, *c*) 52 : 4, *d*) 92 : 4.
527. *a*) 55 : 5, *b*) 70 : 5, *c*) 85 : 5, *d*) 95 : 5.
528. *a*) 60 : 5, *b*) 65 : 5, *c*) 80 : 5, *d*) 90 : 5.
529. *a*) 66 : 6, *b*) 72 : 6, *c*) 84 : 6, *d*) 96 : 6.
530. *a*) 98 : 2, *b*) 57 : 3, *c*) 96 : 4, *d*) 84 : 7.

Huru mycket är:

531. hälften af *a*) 38, *b*) 52, *c*) 54, *d*) 96?
532. tredjedelen af *a*) 72, *b*) 57, *c*) 54, *d*) 87?
533. fjärdedelen af *a*) 52, *b*) 64, *c*) 76, *d*) 92?
534. femtedelen af *a*) 65, *b*) 75, *c*) 80, *d*) 95?
535. sjettedelen af *a*) 72, *b*) 90, *c*) 96?
536. sjundedelen af *a*) 84, *b*) 91?
537. åttondedelen af 96?

Huru många hundra-kronor, tio-kronor och en-kronor får hvardera, då mellan 2 personer i lika delar fördelas

538. *a*) 6 hundra-kr. 4 tio-kr. 8 en-kr.,
b) 4 hundra-kr. 3 tio-kr. 6 en kr.,
c) 8 hundra-kr. 5 tio-kr. 4 en-kr.,
d) 4 hundra-kr. 7 tio-kr. 6 en-kr.,
e) 5 hundra-kr. 9 tio-kr. 2 en-kr.,
f) 7 hundra-kr. 3 tio-kr. 8 en-kr.,
g) 1 hundra-kr. 7 tio-kr. 2 en-kr.?

Huru många hundra-tal, tio-tal och enheter erhållas om i 3 lika delar delas

539. *a*) 6 hundra-tal 9 tio-tal 3 enheter,
b) 6 hundra-tal 7 tio-tal 2 enheter,
c) 6 hundra-tal 5 tio-tal 4 enheter,
d) 5 hundra-tal 4 tio-tal 3 enheter,
e) 7 hundra-tal 2 tio-tal 6 enheter,

Figur 10. Ett uppslag i Alfred Bergs *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor* från 1898.[1] [Bilden bör bytas ut!]

I praktiken var det emellertid givetvis inte möjligt att få eleverna att själva så att säga uppfinna talsortsmetoden. Den spänning som därmed genererades mellan metodens anspråk, och den undervisningserfarenhet den resulterade i, spelade en viktig roll inom den skolmatematiska diskussion jag nu skall redogöra för.

J. P. Velander om "Hela tal i folkskolan" och "Om ämnet räkning i folkskolan"

Under 1880-talet började diskussionen rörande folkskolans undervisning att allt mer föras av folkskolans egna företrädare, snarare än som tidigare av läroboksförfattare som i och för sig skrev för folkskolan, men själva hade en annan institutionell hemvist. En av de folkskollärare som deltog i diskussionen var J. P. Velander. Dels författade han ett par läroböcker,[2] men han förtjänar sin plats i min redogörelse framför allt genom två innehållsrika artiklar införda i den då nystartade *Svensk Läraretidning*: "Om ämnet räkning i folkskolan" från 1884 och "Hela tal i folkskolan" från 1885.[3] Velander utmärkte sig genom sin ambition att låta läroboken i så stor utsträckning som möjligt strukturera undervisningen. Han argumenterade för denna ambition i sina artiklar, vilket gör dem till tydliga illustrationer av hur man mer allmänt under denna tid flyttade fokus mot själva undervisningspraktiken. Velander hade emellertid mycket mer än detta att säga, och jag skall använda hans artiklar som exempel på vad som kunde sägas om skolmatematik i Sverige kring mitten av 1880-talet.

En av de frågor Velander diskuterade var studiernas hastighet. Pestalozzi förespråkade ett extremt långsamt fortskridande, och som vi såg i det förra kapitlet hade denna princip under 1860-talet omsatts i praktiska anvisningar för skolmatematiska övningar. Även folkskolans normalplan hade utformats i linje

[1] Alfred Berg, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, 10. uppl. utg. (Stockholm: 1898), 42-43.
[2] J. P. Velander, *Lilla räknebok för folkskolan: 3,200 uppgifter jemte anvisn:r*, Stereotyp. uppl. utg. (Stockholm: P. A. Norstedt & S:r, 1888); J. P. Velander, *Velanders Räknebok för folkskolan* (Stockholm: 1884).
[3] J. P. Velander, "Hela tal i folkskolan," *Svensk Läraretidning* (1885); Velander, "Ämnet räkning i folkskolan."

med det långsamma fortskridandets princip. Velander kommenterar normalplanens föreskrift att lärjungarna de två första åren i folkskolan bara skall syssla med hela tal:

> Mången med oss torde vid första läsningen af detta stadgande ha undrat, om en sådan långsamhet i framstegen kunde vara nödig, men vi närmare undersökning af saken hafva vi funnit, att föreskriften vittnar om mogen pedagogisk erfarenhet, och att den i sina verkningar bör blifva högst välgörande, ja i vissa afseenden rent af reformerande.[1]

Velander hörde till dem som menade att en ytterligare "inbromsning" av studietakten borde ha välgörande effekter. Artikeln om "Hela tal i folkskolan" kretsar i stor utsträckning just kring vikten av att ägna mer tid åt det allra enklaste. Han konstaterar i denna artikel att såväl de "äldre" som de "största nyare" räkneböckerna, ägnar relativt lite utrymme åt lärokursens första del. Ofta, skriver han, ägnas så lite som 3% av boken åt folkskolans första år. Dessa böcker passar därmed inte bra med normalplanen, och, fortsätter han,

> utan misskännande af den pedagogiska sanningen, att både grunden bör läggas med hjelp af det enkla och lättfattliga, och en mångsidig användning af detta enkla göras, innan man bygger vidare, så hade ett sådant missförhållande aldrig kunnat uppstå.[2]

Velander kallar de hela talen "ett stjufbarn". Läroböckerna efter Zweigbergk fick allt fler övningsuppgifter, och dessa passade allt bättre för skolans behov av att fylla ut tiden. Velander skriver att han därför alls inte vill förneka det goda i att "exempelsamlingen tilltages i sådant omfång, att den räcker till äfven för de raskaste lärjungarne".[3] Problemet är bara att de uppgifter som fyller exempelsamlingar brukade framstå som ganska svåra för lärjungarna. Detta kunde, trodde Velander, avhjälpas, om de först fick en större mängd uppgifter med hela tal. Bara genom en systematisk progression av långsamt ökande svårighetsgrad, kan, menade han, lärjungarna i större utsträckning sköta sig själva.

Angående sin egen lärobok skriver han att han "haft god lust" att använda ännu mindre tal än han nu gör, om han inte "trott det vara betänkligt att alltför tvärt bryta med gammal sed".[4] Till detta kommer, skriver han, att uppgifter med större tal – om de tillämpas "med urskilning" – ju har det goda med sig att de kan "gifva den ena årsklassen sysselsättning med tyst räknande i sådant omfång, att lärarens tid ej alltför mycket blir upptagen af förfrågningar".[5]

Velanders uppsats "Ämnet räkning i folkskolan" som publicerades i *Svensk Läraretidning* 1884 är i princip ett brandtal för att de matematiska studierna i folkskolan borde syfta till att ge eleverna praktiskt nyttiga kunskaper, snarare än bildning.[6] Den signifierar en allmän rörelse vid just denna tid från bildning mot praktisk nytta som skolmatematikens främsta mål.[7] Rörelsen skedde i samma takt som folkskolelärare tog allt större plats i diskussionen. Det fascinerande är emellertid att den väg mot praktisk nytta som Velander tecknade, bara högst marginellt skiljde sig från den väg som tagit form under det att de matematiska studierna syftade mot bildning. Velander kan därför sägas ha tillhört den första generation som "ärvde" bildningstänkandets praktiker, och gav dem en ny mening. De repetitiva övningar som skapades med hänvisning till deras bildande effekter, framstod för Velander som en nödvändig utgångspunkt för en väg mot praktiskt nyttiga kunskaper. Velanders uppsats har åtta punkter, som jag nu skall gå igenom en i taget.

---

[1] Velander, "Hela tal i folkskolan," s. 77.
[2] Ibid.: s. 78.
[3] Ibid.: 85.
[4] Ibid.: 86.
[5] Ibid.
[6] Velander, "Ämnet räkning i folkskolan."
[7] I kapitel 9 beskriver jag hur man på ett mer allmänt plan – inom filosofi och vetenskap – kom att överge bildningstänkandet vid just denna tid. Det intressanta är att den diskussion knuten till folkskolan som jag redogör för här ligger i denna rörelses framkant. Man kunde annars ha gissat att folkskolan – och skolan i allmänhet – tvärtom skulle ha släpat efter denna utveckling. Här tydliggörs dock en skillnad mellan läroverket och folkskolan. I *läroverket* kom nämligen bildningstänkandet – tack vare att det under 1800-talets andra hälft så att säga flyttats över från de klassiska språken till den euklidiska geometrin – att leva vidare, i det närmaste som "levande död", under hela 1900-talets första hälft. Detta innebär emellertid inte att folkskolan från 1880-talet skulle ha lämnat idén om matematiken som bildande. Vad som hände där var dock istället att idéer om bildning successivt kom att omtolas i termer av "utveckling". Denna term fick mening av den framväxande utvecklingspsykologin. Den mening den fick skiljde sig dock bara marginellt från de idéer som tidigare förknippats med bildning.

Räkneundervisningen förr och nu

Efter inledningen, tar han i sin andra punkt upp frågan om "Räkneundervisningen förr och nu".[1] Här kontrasterar han den "mekaniska" undervisning som kretsade kring Zweigbergks regler och övningar mot den förståndsodlande "heuristik" som (i läroverket) uppstod som en "protest" mot denna metod. Båda dessa metoder karaktäriserar Velander som bristfälliga. Det rätta måste, skriver han, "ligga någonstädes mellan de båda ytterligheterna", det vill säga både innefatta praktiskt räknande som syftar till färdighet, *och* att lärjungarna förstår vad de gör.[2]

Ett viktigt argument för denna nödvändighet är emellertid för Velander undervisningens praktiska villkor. Heuristik, det vill säga det noggranna sönderplockandet av räkneuppgifter som Kjelldal och Nyström förespråkade och ägnade sig åt, hade aldrig varit något för folkskolan. Sådant fanns det ingen tid till. Och det är just dispositionen av lärarens *tid* som utgjorde ett de centrala problem som folkskolans räkneundervisning måste lösa. Den paradoxala lösning som Velander ser är att läroböckerna måste innehålla uppgifter som främst syftar till mekanisk färdighet, för att läraren, genom att eleverna huvudsakligen hålls sysselsatta med dessa övningar, då får tid att undervisa de som är i behov av undervisning. Böckerna får med andra ord inte innehålla svårigheter som ställer barnen i behov av lärarens uppmärksamhet. Uppgifterna måste vara enkla och progressivt ordnade, det mekaniskt vara huvudsaken. De måste syfta till att hålla barnen sysselsatta – "hvilket ej behöfver hindra", skriver Velander, "att åtskilligt annat af värde kan komma med liksom *på köpet*".[3]

Räkneundervisning bör syfta till praktiskt användbara kunskaper

I sin tredje punkt opponerar sig Velander mot uppfattningen att räkneunderisningen i första hand skall, som kommittén för granskning av folkskolan läroböcker i aritmetik skrev 1883, syfta till "förståndets utveckling och tankekraftens stärkande".[4] Undervisningens syfte bör istället, skriver Velander, vara praktiskt. All undervisning måste givetvis vara bildande – men knappast räkneundervisningen mer än andra ämnen, något han argumenterar för med hänvisning till en rad andra ämnen, som modersmålsundervisning och religion. Väsentligt för Velander är att det är just när undervisningen får förståndsutveckling som eget mål, som dess praktiska utformning tenderar att missa det. Om tvärtom undervisningen är praktisk, om eleverna i räkneundervisningen får arbeta med exempel som förekommer i livet,

> fullt konkreta och åskådligt framställda, inbjudande lärjungen att tänka sig in i situationen och fästa sig vid de lämnade mått- och prisuppgifterna, för öfrigt intressanta och mångsidiga, omvexlande, små och lätt uträknade, istället för att vara hopkonstruerade efter några gifna räknesätts-schemata, abstrakta, dunkla och skefva, tröttande honom genom väldiga tal, bråk som vid prestval och en själlös erfarenhet, som måste hos honom väcka intrycket af, att han blott hade att köra i samma hjulspår, så länge räknesättet varade,

då skulle räkneundervisningen – utan att detta mål uttryckligen eftersträvades – ändå bli påtagligt "förståndsutvecklande".[5] Säkert kan man, skriver Velander, nå förståndsutveckling även på andra sätt, men i folkskolan måste den praktiska nyttan ställas i första rummet. Man har inte tid att ägna sig åt förståndsövningar, som inte också tjänar detta första mål.

Man måste börja med små tal

I sin fjärde punkt beskriver Velander hur detta mål kan nås. För det första måste undervisningen kretsa kring *små tal*. Inte minst för att undervisningen på så sätt kan göras intresseväckande och lustfylld. Som vi sett innehöll emellertid de flesta läroböcker i räkning en hel del tämligen stora tal. Velander såg sådana räkneuppgifter som ett uttryck för hänsynslöshet; ett sätt att fullständigt döda barnets intresse för att räkna, utan minsta insikt om dess känslor. "Om ändå lärarna hade tid", skriver han angående dessa stora tal, "klokhet och omtanke nog – ja, rättighet med, förstås! och med ogenomskådlig trycksvärta öfversmeta dem!!".[6] Man anar här att det i diskussionen fanns ståndpunkter tämligen olika de Velander gav uttryck åt. Nedanstående citat, hämtat från en helt annat artikel, ger en bild av vad det var Velander talade om:

---

[1] Velander, "Ämnet räkning i folkskolan," sida?
[2] Ibid.
[3] Ibid.
[4] J. J.;Jonsson Dalström, Alexander; Wennerqvist, F.; Edén, L. A., *Granskning af läroböcker i aritmetik, verkstäld af komiterade, utsedde af Stockholms folkskollärareförening* (Stockholm: C. E. Fritzes bokh., 1883).
[5] Velander, "Ämnet räkning i folkskolan," 390.
[6] Ibid.: 401.

> I våra dagar kan man ej fästa nog stor vigt vid denna säkerhet och det däraf alstrade rätta sjelfförtroendet, som ensamt är i stånd att skapa män. En sådan karaktärens bestämdhet och allvar kan räkneundervisningen i sin mån bidraga att fostra. Märk därföre noga: läraren får aldrig nöja sig med facit, som äro något så när rätta, i hvilket 'endast en' siffra är oriktig; är ej resultatet *alldeles* riktigt, måste lärjungen utan miskund tillhållas att räkna om hela exemplet, och först då han upprepade gånge misslyckats, må läraren lämna honom en vink om, hvar felet ligger.[1]

Velander pekar i sin omsorg om barnet fram mot det tidiga 1900-talets pedagogiska idéer, vilka jag tar upp i kapitel 9 nedan. Han hörde inte till dem som såg räkneundervisningen som ett redskap för att, som det står i citatet ovan, "skapa män".[2] Samtidigt var han, som nämnt ovan angående hans artikel om hela tal, inte helt främmande inför idén om stora tal i räkneböckerna. Det är här undervisningens praktik som komplicerar bilden. De stora talen har nämligen den fördelen att de kräver tid för att uträknas, och det är, skriver Velander, "nödvändigt, att materialet för de tysta övningarna någorlunda räcker till, så att ej läraren blir allt för mycket upptagen af de barn, som skulle sköta sig sjelfva". För detta ändamål kan de stora talen möjligen få anlitas. Men i så fall inte "förr än barnet är så pass säkert, att det ej känner sig modstulen eller ryggar tillbaka för de stora siffrorna".[3]

För Velander är det självklart att räkneundervisning till största delen består i att eleverna löser uppgifter. Det viktiga är därför att dessa uppgifter är lämpligt valda, något som, menar han, i första han åligger räkneboken. I sin redogörelse för vad som utgör lämpliga exempel tar Velander upp:

1. att uppgifterna måste ligga "barnets erfarenhet så nära, att det kan tänka sig det beskrifna fallet såsom verkligt eller måla det i sin föreställning med full åskådlighet och klarhet".[4] Något som å andra sidan inte hindrar att uppgifterna samtidigt vidgar lärjungens erfarenhetsvärld.[5]
2. att uppgifternas innehåll och form är så konkret som möjligt: "hellre Anders och Bengt än A. och B.", och så vidare.
3. att uppgifternas utgångspunkt är naturlig. Uppgifterna skall med andra ord inte vara räknegåtor, utan vara av ett sådant slag som faktiskt förekommer i det verkliga livet.
4. att uppgifterna "ej taga något för gifvet, som ej är gifvet". Hit hör till exempel att utgå från att "en vara säljes till samma pris i parti och minut" – ett vanligt antagande i räkneböckernas exempel på Regula de Tri. Än värre är, skriver Velander, att man försöker inbilla barnet "uppenbara orimligheter", som att "6 man, som arbeta 12 timmar om dagen, böra medhinna lika mycket som 9 man med 8 timmars arbetstid eller 18 med 4". I exempel på Regula de Tri måste givetvis, skriver Velander, "verklig proportionalitet" vara för handen. Till detta kommer att sifferuppgifter i exemplen bör vara "ej blott rimliga, utan så vidt möjligt [...] *äfven sanna*".[6] Lärjungarna skall, menar Velander, kunna lita på sakuppgifterna i sina räkneböcker lika mycket som de lita på uppgifterna i läroböckerna i geografi eller historia. Tillfället bör utnyttjas, skriver han, att göra räkneundervisningen bildande även i denna bemärkelse.

Räkneuppgifterna bör inte delas in i "konkreta" och "abstrakta"

Den femte punkten av sin uppsats ägnar Velander åt en kritik av den gängse uppdelningen av exempel i "konkreta" och "abstrakta". Hos Zweigbergk kom de "abstrakta" uppgifterna först – med syfte att öva reglerna – följda av "konkreta" tillämpningar. På 1880-talet var det en metodisk sanning att de konkreta uppgifterna – genom sin större åskådlighet – borde föregå de abstrakta, vars syfte blivit att "fästa" reglorna i minnet. Velander problematiserar själva indelningen, som han menar är artificiell. För vad betyder det, frågar han retoriskt, att något är åskådligt? I vilken bemärkelse är "12 gossar" mer åskådligt än 12? Frågorna är inte lätta att besvara. Och det är, menar Velander, uppenbart befängt att låta exempel med stora tal, som dessutom kräver användande av flera olika räknesätt, föregå ett exempel som "1+2+3+4", bara för att talen i det första exemplet skulle vara "konkreta".[7] Istället för "konkret" vill Velander tala om "åskådlig". Små tal kan i så fall, menar han, sägas vara åskådliga i den bemärkelsen att man kan så att säga tydligt "föreställa sig" vad talet representerar. Detta skulle gälla med tal som ett, två, tre och kanske

[1] -k-, "Den första räkneundervisningen," *Pedagogisk Tidskrift* (1878).
[2] Ibid.
[3] Velander, "Ämnet räkning i folkskolan," 402.
[4] Ibid.
[5] Ett tydligt exempel på sådana räkneuppgifter är de i Per Adam Siljeström, *Samling af räkne-exempel till folkskolornas tjenst: första häftet innehållande omkr. 1100 exempel i de fyra räknesätten med hela tal: med svar* (Stockholm: 1870).
[6] Velander, "Ämnet räkning i folkskolan," 403.
[7] Ibid.: 418.

fyra. Men när talen blir bara något större, uppåt något tiotal, behöver vi, skriver Velander, något att "fästa dem vid"; de kan så att säga, inte tänkas i sig själva. Vi kan inte överblicka en mängd med 12 element, vi måste räkna elementen för att se att de faktiskt är just 12. Mängden kan därför inte i sig själv "representera" talet 12. Velander överraskande påstående är att det vi vanligen fäster talen vid är – den siffra som representerar talet.[1] Bilden har nu komplicerats betänkligt. För om tal alltid behöver representeras för att kunna tänkas, vari består då gränsen mellan "konkreta" och "abstrakta" tal? Vi kan här se varför Velander inte fäster så stor vikt vid talbegreppet, utan istället fokuserar på det man måste kunna göra med talen. Räkneundervisningens betydelsefulla gräns gick alltså inte mellan det konkreta och det abstrakta för Velander, utan mellan det meningsfulla och de meningslösa. Det man gör, måste – så tolkar jag Velander – ha *mening*, och det får det om, som vi sett ovan, uppgifterna knyter an till det praktiska livet, är konkreta och naturliga, bygger på rimliga antaganden, har sanna sifferuppgifter, och så vidare.

Räkneuppgifterna bör delas in med avseende på deras "funktion"

I sin sjätte punkt föreslår Velander en annan ordning än den baserad på skillnaden mellan "konkreta" och "abstrakta" tal, nämligen en ordning baserad på uppgifternas *funktion*. Undervisningen måste, menar Velander, syfta till att eleverna skall kunna räkna i det dagliga livet. Därför måste man först göra klart för sig vad ett sådant räknande innebär, och vilken typ av förmågor ("kompetenser" skulle vi säga idag) det kräver. Han skiljer här mellan: för det första, en förmåga att "göra uppgiftens innehåll klar och åskådligt för tanken". Detta är det viktigaste – och det är väsentligt att det har ganska lite med matematik i egenskap av "räknefärdighet" att göra. Sedan: förmåga att tänka ut "sättet att lösa frågan. Och slutligen: "förmåga att utföra sjelfva räkningen". Velanders förslag består i att förskjuta fokus från den tredje punkten – som skolan enligt Velander alltid månat om fullt tillräckligt – till de två första. Just i fråga om att förstå vad det är som skall göras, står eleverna efter den rådande undervisningen alldeles handfallna. Detta är orsaken till "den vunna räknefärdighetens ringa användbarhet i lifvet". Velander förslår följande "skema" för att uppnå denna förändring. Först bör eleverna ägna sig åt små och lätta uppgifter, vars svar "genast inses". Givet denna förutsättning må de vara "konkreta" eller "abstrakta", det spelar ingen roll. Sedan bör själva "räkneoperationerna" introduceras successivt, efter regeln "*lär blott en sak åt gången!*".[2] Då räkneoperationerna fattats, bör uppgifterna ta sikte på att lära lärjungen "inse, när han har användning för [dem]".[3] Slutligen, först när "inom hvarje exempelgrupp lösningssättets utfunderande öfvats så mycket, att det går lätt", bör man introducera svårare uppgifter, som kräver "särskild ansträngning".[4] Genom att leda eleven längs en lärogång där själva räknandet introducera successivt, vill Velander förhindra att detta räknande hamnar i fokus och stjäl lärjungarnas energi. Då kan istället tänkandet ägnas åt det mer väsentliga: att förstå räknandets sammanhang.

Räkneuppgifterna måste vara realistiska

Velanders sjunde punkt innehåller en sammanfattning. Här framgår att den för honom viktigaste frågan är räkneuppgifternas utformning, i första hand att dessa måste vara verkligheten trogna. Han riktar specifik kritik mot bruket att anpassa uppgifterna till skolmatematiken. Resultatet blir, menar han, uppgifter som i och för sig kan lösas "i teorin", men inte i praktiken. Och vad lär sig lärjungen av detta? Knappast det rimliga: att sådana uppgifter bör *förkastas* "såsom olösliga". En annan konsekvens är ofta att uppgifterna i och för sig blir "svåra" – men svåra i en specifikt skolmässig bemärkelse, på ett sätt som kan hanteras med skolmatematikens metoder. Verkliga uppgifter är tvärtom, konstaterar Velander, ofta tämligen enkla vad gäller själva räknandet. Svårigheten kan istället ligga i "en eller annan biomständighet". Men exakt sådana biomständigheter brukar läroböckerna vänja lärjungen vid att "förbise". Följden av skolans räkneundervisning – som den nu bedrivs – är därför, menar Velander, en hög grad av räkneskicklighet, men bara på att lösa problem specifika för skolan.

---

[1] Velanders resonemang kring representation kan jämföras med Edmund Husserl, "Philosophie der Arithmetik," i *Husserliana. Edmund Husserl. Gesammelte Werke. Band XII: Philosophie der Arithmetik.*, red. Lothar Eley (Haag: Martinus Nijhoff, 1970 [1891]). En hypotes som väckts under min studie av den svenska skolmatematiken, är att en stor del av den matematiska filosofi som tog form kring sekelskiftet 1900, bland annat Husserls, åtminstone i viss mån måste förstås mot bakgrund av hur matematiken vid denna tid diskuterades i relation till grundläggande utbildning.
[2] Velander, "Ämnet räkning i folkskolan," 419.
[3] Ibid.
[4] Ibid.

Räkneboken bör vara skriven för lärjungen och utformad på ett sådant sätt att lärjungarna kan reda sig själva med boken, utan att ta lärarens tid i anspråk

Velanders sista punkt handlar om relationen mellan läroboken och läraren, och mer specifikt om hur han tänkt i utformandet av sin egen lärobok. Här spelar dispositionen av lärarens *tid* huvudrollen. Frågan är hur läraren skall få tid att undervisa, i detta ämne, där lärjungarnas begåvning skilja sig så mycket åt, och framsteg kräver – det var så man såg det – ett så stort mått av klokt bistånd från läraren. Som vi sett var både Zweigbergks och Almqvists läroböcker utformade för att ge lärarens utrymme att undervisa. Detta i kontrast mot de tidigare räknelärorna – vilka snarare var utformade som handböcker för självstudier. Instruktioner hade rensats ut, med omsorg om lärarens individualitet. Velander försöker med sin lärobok att lösa ett annat problem, nämligen att lärarens utrymme är till föga nytta, om han inte har tid att fylla det med något. Paradoxalt nog är det, menar Velander, bara genom att inskränka lärarens utrymme, genom att i så stor utsträckning som möjligt göra lärarens jobb, som läroboken kan befria lärarens från den börda som – hindrar honom från att göra sitt jobb. Lösningen heter "tysta övningar", tillsammans med så goda anvisningar och instruktioner som möjligt. Allt för att lärjungarna skall kunna "reda sig sjelfva". Det är viktigt att komma ihåg att de anvisningar och instruktioner det här rör sig om, är något helt annat än de som fyllde räknelärorna. Deras funktion i läroböckerna är att förhindra att lärjungarna stoppas upp och söker hjälp hos läraren. Anvisningarna rör därför huvudsakligen *lärobokens uppgifter*. De säger hur uppgifterna skall lösas, hur de specifika svårigheterna vid varje moment skall övervinnas. Detta, snarare än att förklara matematiken och matematikens användning. Läroböckernas text är ett hjälpmedel att hålla lärjungarna kvar på banan, nära den uttänkta lärogången. De beskriver inte lärogångens mål – detta vore tvärtom helt förkastligt. Målet kan bara nås genom en kontinuerlig rörelse, längs raden av uppgifter. Anvisningarnas syfte är att förhindra att denna kontinuerliga rörelse bryts.

J. E. Johansson "Om räkneundervisningen i folkskolan"

En delvis annan bild av skolmatematiken får man av J. E. Johanssons uppsats "Om räkneundervisningen i folkskolan", vilken publicerades som en serie artiklar i *Folkskolans Vän* 1889. Johansson knyter i sin artikel an till en lång rad samtida pedagoger, och det är inte tydligt om han kommer med något eget bidrag utöver dessa hänvisningar. Därför kan hans artikel betraktas som tämligen "typisk" för tidens skolmatematiska ståndpunkter.

I jämförelse med Velander är Johansson betydligt mer positiv till bildningsmålet. Han inleder med att citera "den tyske pedagogen Dinter", som säger: "Räkningen bör betraktas dels såsom bildningsmedel och dels såsom färdighet för lifvet".[1] På klassiskt manér kontrasterar han sedan det med den förflutna och samtida skolmatematiken:

> Beklagligtvis har man i de flesta fall nöjt sig med en mekanisk färdighet, som långt ifrån tillfredsställer lifvets kraf och ännu mindre tillgodoser det första momentet, nemligen att räkneundervisningen också bör betraktas såsom ett vigtigt bildningsmedel.[2]

I åtta punkter redogör sedan Johansson för hur skolmatematiken kan förändras från sitt beklagansvärda tillstånd, till att bli det bildningsmedel och det praktiskt nyttiga redskap det borde vara.

För det första måste, skriver Johansson, undervisningen utgå från åskådningen. Detta eftersom "Barnen står på åskådningens ståndpunkt". Den är, skriver Johansson, "räkneundervisningens grundval, eller den kanal, genom hvilken kunskapen likasom införes i barnasjälen".[3] Åskådning är emellertid inte nog – det som åskådas måste även "befästas". Detta sker genom övning. Och efter övning krävs även användning. I denna skall insikten och övningen "sammansmälta till en lefvande enhet".[4] Johansson citerar här "pedagogen Borman", som skriver: "Denna innerliga förbindelse af *veta, kunna* och i lifvet *utföra* gör räkneundervisningen till ett värdefullt bildningsmedel för lärjungen".[5]

För det andra måste talbegreppen vara "klart inhemtade" innan lärjungarna får börja räkna. Här gör Johansson en skarp åtskillnad mellan å ena sidan siffrorna och talorden, och å andra sidan de "förställningar" som måste vara förknippade med dessa. Får barnen räkna utan klara talbegrepp, skriver han, blir

[1] Jan-Erik Johansson, "Om räkneundervisningens i folkskolan," *Folkskolans vän* (1889): s. 14.
[2] Ibid.: 14.
[3] Ibid.
[4] Ibid.
[5] Ibid.

räknandet mekaniskt. Och talbegrepp är inget som uppstår för att man *säger* till barnet, till exempel "den der siffran betecknar två" eller "siffran till venster om enheterna (entalen) betecknar tiotal", eller något liknande. Ett begrepp om talen är, förklarar Johansson, något som uppstår successivt genom (som sagt i den första punkten) åskådning, övning och användning. Först får man, menar Johansson, ett begrepp om talet ett, sedan om talet två, tre, och så vidare. Antag, skriver han vidare, att barnet "lärt sig betydelsen af ett ental, ett tvåtal och ett tretal och således står vid fyratalet". Då skulle man kunna lära fyratalet ungefär på följande sätt:

> Nå, huru många tal har ni nu lärt er? Nemligen? Räkna dessa kuber (ett, två, tre, fyra)! Nu! (läraren borttager en, hvarefter barnet räknar: 4, 3, 2, 1.) Räkna t. o. m. 4 fram! Tillbaka! Drag 4 streck! Sträck upp 4 fingrar! Gå 4 steg! Bocka dig 4 gånger! Uppgif några saker, hvaraf det finnes 4 i detta rum! Huru många fötter har katten? Uppgif något annat djur, som har 4 fötter! Hvad kallar man det tal, som uttrycker ett antal af 4? Hvad menas således med ett fyratal? Med hvilket tecken betecknar man 4-talet? Skrif siffran 4! Låt denna siffra beteckna böcker och gif mig så många![1]

Genom att delta i denna praktik – som alltså innefattar så väl åskådning och övning, som användning – menar Johansson att barnet skall tillägna sig *talbegreppet* fyra.

För det tredje talar Johansson om "snabbhet och reda". Han menar att om detta mål skall uppnås, så måste barnet få en "klar insigt" i tiotalssystemet. Här hänvisar han, som många andra vid denna tid, till talsortsmetoden. Den klara uppfattning av tiotalssystemet som denna leder till har enligt Johansson flera fördelar: dels leder den till klara talbegrepp, vilket gör undervisningen bildande, dels gör den barnen till snabba och säkra räknare. Undervisning som tar detta syftesmål på allvar blir dessutom "lefvande" och "hindrar barnen att försjunka i slöa funderingar", och den leder dessutom till en större praktisk nytta, eftersom det är bra att kunna räkna snabbt och säkert i det dagliga livet. Man kan här notera hur Johansson förknippar en tämligen disparata mål med talsortsmetoden.

För det fjärde poängterar Johansson vikten av att räknande föregås av en "ordentlig förberedelse". Med detta syftar Johansson på en förberedelse ordnad av *läraren*. "Hvar och en, som något sysselsatt sig med räkneundervisning", skriver han

> vet också huru lönlöst det är att i vanlig mening börja undervisa barnen i något räknesätt, om de ej fått en viss förberedelse derför, ty icke en tiondel af hvad läraren säger fastnar qvar hos dem. De, så väl som sjelfva läromaterialet, måste bearbetas för den följande undervisningen, likasom man bereder jorden, innan man utsår säden.[2]

Metaforiken passar bra med bildningsbegreppet. Förberedelsearbetet består först och främst i åskådning med tillhjälp av konkreta föremål, med vars hjälp talbegreppen kan klargöras. Främst måste man tillsammans med barnen ta sig an talen 1-9, "så att de hafva en fast basis att operera på". Johansson lyfter också fram betydelsen av huvudräkningsövningar, som till att börja med bör ske i nära anslutning till "åskådningsföremål".

För det femte bör inget "pedantiskt regelmakeri" äga rum vid räkneundervisningen. Istället bör barnen "medelst exempel ledas till insigt af reglerna". Johansson knyter med andra ord an till den heuristiska metoden. Det faller sig därför naturligt att han poängterar att undervisningens syfte *inte* är att lärjungarna skall räkna så många exempel som möjligt, och att läroböckerna *inte* bör bestå av "korta regler, uttryckta i ord eller formler för exemplens uppställning och uträkning". Man bör istället, skriver han, "lämna alla direkta förklaringar å sido" och istället "genom antydningar och frågor" förmå lärjungen att leta sig fram till reglerna. I en sådan undervisning är han inte längre passiv "mottagare av lärarens tankar och idéer", utan får vara produktiv. Han får, skriver Johansson, "vara menniska". Tydligen är människovarandet för Johansson synonymt med aktivitet och produktivitet, och tål varken förklaringar eller lyssnande. Han citerar gillande en rad tidigare skolmatematiker vilka förenas i en "skarp, men i allo berättigad protest mot den förnuftslösa 'räknemetod', hvars högsta grundats är att med minsta möjliga ansträngning af tanken uträkna ett problem".[3] Tydligen har det alltså för Johansson ett eget värde att tanken anstängs under det matematiska problemlösandet.

Som sjätte punkt tar Johansson upp nödvändigheten av att inskränka antalet av de många "räknesätten". Minns samma önskemål hos till exempel Celsius på 1740-talet och Almqvist på 1830-talet . Utöver

[1] Ibid.: 15.
[2] Ibid.
[3] Ibid.: 18.

de argument som framfördes då har nu ett nytt tillkommit. Det rör indelningen av de elever som undervisas i "räknelag". Johansson konstaterar nämligen att det är påtagligt att "ju fler räknesätt man har, desto flere afdelningar får man, och åt desto flere håll måste lärarekrafterna delas". Och detta problem blir än större, i den mån "blott några få exempel vid de särskilda räknesätten förekomma".[1] Då måste läraren skynda mellan olika grupper av elever som blivit "klara" med de korta avsnitt i räkneboken som hör till varje räknesätt. Av denna anledning är det, skriver Johansson, "*nödvändigt*" med en inskränkning. Här syns alltså återigen hur undervisningspraktiken får fungera som utgångspunkt för läroböckernas utformning.

För det sjunde, skriver Johansson, måste övningsexemplen vara "praktiska". Detta på grund av att skolan skall förbereda för livet, inte för "examen". I detta avsnitt talar Johansson mindre om bildning än om praktisk nytta. Genom "obenämnda tal" kan lärjungarna i och för sig lära sig multiplicera och dividera, men knappast att *använda* matematiken i det praktiska livet. Intressant nog tar Johansson sedan genast upp en annan fördel med att uppgifterna knyter an till det dagliga livet, nämligen att de har "den stora förtjensten, att de roa barnen och bidraga således till att göra ämnet intressant". Denna aspekt hamnar sedan i fokus och det hela mynnar ut i en uppmaning att göra undvika att undervisningen blir "torr och motbjudande".

I sin sista och åttonde punkt knyter Johansson an till den heuristiska metoden så som den framställdes av framför allt Nyström och senare Nordlund. Han betonar nämligen vikten av att lärjungarna kan "redogöra för sitt förfarande". De skall inte få "skriva en siffra", skriver Johansson, "utan att kunna svara på frågan hvarför". Samma regler bör gälla även huvudräkningen – man måste kunna redogöra för hur man tänkt! Här återkopplar Johansson till det han skrev i sin inledning – att undervisningens syfte, förutom att vara till praktisk nytta, är att *bilda* lärjungarna. Genom att de tvingas att ställa upp sina exempel med matematikens tecken, tala om vad de gjort och på så sätt "komma till fullt medvetande af sin handling", kan aritmetiken fylla denna bildande funktion och, skriver han, på så sätt utgöra "folkskolans logik".[2]

Gammalt möter nytt

Under 1880-talet genomfördes två granskningar av folkskolans läroböcker. Först en granskning 1883 på initiativ av Stockholms folkskollärarförening.[3] Sedan en statligt sanktionerad granskning vars utlåtande publicerades 1887.[4] Bland annat granskades många av de böcker som kom ut under 1850-talet. Granskningarnas utlåtanden utgör därför, tillsammans med de talrika läroboksrecensionerna, ypperliga redskap för att förstå hur skolmatematiken 1880 skiljde sig från den 1850. Jag skall här redogöra för vad man under den period som står i fokus här hade att säga om ett par läroböcker författade av C. A. Nyström (1853) och P. A. Siljeström (1866) vars förord jag tog upp i kapitel 7 som exempel på då "moderna" skolmatematiska ståndpunkter.

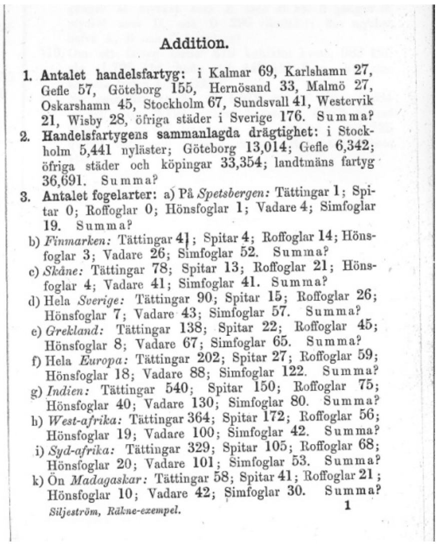
Siljeström

1866 gav Siljeström ut två böcker: *Lärobok i räknekonsten, till Folkskolornas tjenst utarbetad* och *Lärobok i aritmetik, till skolornas tjenst utgifven*.[5] Man kan av dessa böcker dra vissa generella slutsatser rörande hans syn på skolans matematik. Ambitionen är uppenbarligen att så långt möjligt lära eleverna matematik. Undervisningen måste förvisso anpassas till "barnets ståndpunkt", det vill säga "åskådningens" ståndpunkt, men målet ligger bortom både barnet och skolan. "Så vidt ske kunnat", skriver han, "har samma betecknings- och uttryckssätt som i algebran blifvit begagnadt, och framförallt har ett flitigt bruk gjordts av likhetstecknet, tillframhållande och inpräglande af eqvationsbegreppet", och vidare: "Så som divisionstecken har alltigenom användts bråktecknet, för att sålunda desto mer inskärpa den viktiga sanningen, att hvarje bråk kan anses såsom en tecknad division och tvärtom: hvilket icke framstår lika klart, om olika beteckningar nyttjas".[6] Skolan skall, enligt Siljeström, använda samma beteckningar som används i matematiken – detta är viktigt, för det kontrasterar mot många samtida och senare skolmatematikers ståndpunkt att matematiken i sin helhet bör anpassas till barnen och skolan. Nyström ville till exem-

[1] Ibid.: 28.
[2] Ibid.: 32.
[3] Dalström, *Granskning af läroböcker i aritmetik, verkstäld af komiterade, utsedde af Stockholms folkskollärareförening*.
[4] *Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande,* (Stockholm: Kongl. boktryckeriet, 1887).
[5] Pehr Adam Siljeström, *Lärobok i räknekonsten til folkskolornas tjänst* (Stockholm: 1866).
[6] Ibid., förord.

pel, som vi sett ovan, "ställa sifferräkneläran på egen botten", det vill säga göra den till en separat och "avrundad" helhet, användbar i sin egen rätt, tjänande som förberedelse för matematiken, vilken skulle komma först senare. Nordlund såg skolmatematiken som ett autonomt redskap för förståndsbildning – så att säga härlett från den vetenskapliga matematiken, men likväl fristående från den.

En andra aspekt av Siljeströms skolmatematiska gärning som skiljer honom från mängden är hans försök att göra undervisningen i matematik vad man kan kalla "faktaförmedlande". I sin *Samling av räkneexempel, till Folkskolornas tjenst* från 1870, som i titeln stoltserar med hela *1100 exempel i de fyra räknesätten med hela tal*, har han uteslutande använt riktig, statistisk information som material för uppgifterna.[1] Man får i denna bok lära sig om allt mellan himmel och jord. Ett exempel ges i figurn nedan:


Addition.

1. **Antalet handelsfartyg:** i Kalmar 69, Karlshamn 27, Gefle 57, Göteborg 155, Hernösand 33, Malmö 27, Oskarshamn 45, Stockholm 67, Sundsvall 41, Westervik 21, Wisby 28, öfriga städer i Sverige 176. Summa?
2. **Handelsfartygens sammanlagda drägtighet:** i Stockholm 5,441 nyläster; Göteborg 13,014; Gefle 6,342; öfriga städer och köpingar 33,354; landtmäns fartyg 36,691. Summa?
3. **Antalet fogelarter:** a) På *Spetsbergen:* Tättingar 1; Spitar 0; Roffoglar 0; Hönsfoglar 1; Vadare 4; Simfoglar 19. Summa?

b) *Finmarken:* Tättingar 41; Spitar 4; Roffoglar 14; Hönsfoglar 3; Vadare 26; Simfoglar 52. Summa?
c) *Skåne:* Tättingar 78; Spitar 13; Roffoglar 21; Hönsfoglar 4; Vadare 41; Simfoglar 41. Summa?
d) Hela *Sverige:* Tättingar 90; Spitar 15; Roffoglar 26; Hönsfoglar 7; Vadare 43; Simfoglar 57. Summa?
e) *Grekland:* Tättingar 138; Spitar 22; Roffoglar 45; Hönsfoglar 8; Vadare 67; Simfoglar 65. Summa?
f) Hela *Europa:* Tättingar 202; Spitar 27; Roffoglar 59; Hönsfoglar 18; Vadare 88; Simfoglar 122. Summa?
g) *Indien:* Tättingar 540; Spitar 150; Roffoglar 75; Hönsfoglar 40; Vadare 130; Simfoglar 80. Summa?
h) *West-afrika:* Tättingar 364; Spitar 172; Roffoglar 56; Hönsfoglar 19; Vadare 100; Simfoglar 42. Summa?
i) *Syd-afrika:* Tättingar 329; Spitar 105; Roffoglar 68; Hönsfoglar 20; Vadare 101; Simfoglar 53. Summa?
k) Ön *Madagaskar:* Tättingar 58; Spitar 41; Roffoglar 21; Hönsfoglar 10; Vadare 42; Simfoglar 30. Summa?

Siljeström, Räkne-exempel. 1

Figur 11. Den första sidan i Siljeströms räknebok från 1870. Siljeströms ville att räkneundervisningen skulle vara bildande i en faktaförmedlande betydelse. Han fyllde därför sin räknebok med "sanna" statistiska uppgifter. Karaktäristiskt är emellertid att själva uppgifterna för den sakens skulle inte var "realistiska" – detta tyckte han inte var lika viktigt.[2]

Vid denna tid 1870, och särskilt något framåt 1890 när folkskollärarna tagit plats i diskussionen, var övningsuppgifternas utformning ett hett diskussionsämne. Deras faktaförmedlande potential var en aspekt av denna diskussion.

Tre recensioner av Siljeströms räkneböcker ger en bild av skolmatematikens förändring under 1870-talet. Den första recensionen handlar om Siljeströms *Samling av Räkneexempel till Folkskolornas tjenst* som kom ut 1870. Knut Kastman, som recenserar, är mycket positiv.[3] Han menar att boken fyller ett stort tomrum – nämligen när det gäller just samlingar av räkneexempel lämpade för folkskolans behov. Recensionen innehåller för övrigt en beskrivning av hur Kastman skulle önska att dylika exempelsamlingar var uppställda. Av denna beskrivning framgår det att skolmatematiken just kring denna period av stadd i ganska kraftig förändring. Det första önskemålet är nämligen att regler framställs "ej förklarade och utvecklade – utan i största korthet vid de respektive exemplen", det andra önskemålet är att dessa regler skall följas av "abstrakta tal för inöfvandet af sjelfva räkneoperationerna".[4] Kastman vill med andra ord att exempelsamlingarna skall ha ungefär samma struktur som Zweigbergks räknelära, ett synsätt som även 1871 måsta ha ansetts tämligen förlegat. Till dessa önskemål lägger Kastman sedan i och för sig att uppgifterna skall vara "strängt systematiskt ordnade", gå "från enklare till mera komplicerade", och så vidare. Likväl ger han reglerna en central plats i exempelsamlingen.

Den andra recensionen är från 1874, och handlar om andra upplagan av samma samling av räkneexempel. Den första upplagan innehöll 1100 exempel, i den andra har antalet ökats till 1400. Den korta recensionens första mening lyder: "De på senare tid af flere författare utgifna goda och värderika exempelsamlingar utgöra ett glädjande tecken till en pågående revolution i sättet att undervisa i räkning".[5] Karak-

[1] Siljeström, *Samling af räkne-exempel till folkskolornas tjenst: första häftet innehållande omkr. 1100 exempel i de fyra räknesätten med hela tal: med svar*.
[2] Ibid., 1.
[3] Knut Arvid Kastman, "Samling af Räkneexempel, till Folkskolornas tjenst utgif.," *Folkskolans vän* (1871).
[4] Ibid.
[5] Knut Arvid Kastman, "Samling af Räkneexempel, till Folkskolornas tjenst utgif.," *Folkskolans vän* (1874).

täristiskt för revolutionen är framför allt det ökande antalet exempel, och recensionen fortsätter: "Vi hoppas, att det gamla sättet med dess mekaniska inlärande af en mängd konstiga regler och dessas tillämpning på långa och tidsödande abstrakta siffertal snart skall öfverallt i våra folkskolor kunna lemna rum för en förnuftigare och mera praktisk behandling af det viktiga läroämnet".[1]

Den tredje recensionen är från 1883, och handlar om Siljeströms *Lärobok i Aritmetik*. Den tillhör nu, enligt recensenten, skolmatematikens förflutna. Kanske var den, skriver pseudonymen *m.*, "på sin tid en banbrytare på detta undervisningsområde".[2] "Nekas kan emellertid icke", fortsätter han, "att flere bland de öfriga under senare åren utgifna läroböckerna i aritmetik synas hafva tagit försprånget, särskildt beträffande ämnets metodiska behandling". Och vad var då felet? Jo, att exemplen inte var "systematiskt" ordnade. Risken syntes påtaglig att deras upp och ner hoppande svårighetsgrad skulle tvinga lärjungarna att allt för ofta ta lärarens uppmärksamhet i anspråk.

Nyström

C. A. Nyström var med sin *Försök till Lärobok i Aritmetik* publicerad 1853 en av de första som försökte bryta med det zweigbergska paradigmet för räkneundervisning.[3] Hans credo lydde: eleverna måste veta vad de gör! Att veta betydde för honom att förstå räknesättens grund, att kunna "bevisa" dem. Därför fick hans elever inte räkna några uppgifter, innan de kunde redogöra för *varför* uppgifterna kunde lösas på det ena eller andra sättet. Räkneundervisningen kom därför i stor utsträckning att bestå i en dialog mellan lärare och elev, genom vilken läraren, som han själv uttryckte det, "skruvade" eleven genom bevisen. Nyströms lärobok blev mycket populär – dess 18 upplagor fram till 1896 pekar mot att hans syn på räkneundervisning hade stor spridning. Som vi sett riktades samtidigt kritik mot denna "heuristiska" metod.

Nyström försök till lärobok var en av de böcker som granskades av Stockholms folkskollärareförening 1883. Deras utlåtande lyder i sin helhet:

> Detta arbete, som genom den heuristiska metodens användande vid lösningen af s. k. regula de tri m. fl. frågor reformerande ingripit i räkneundervisningens metodiska behandling och som innehåller en större samling värdefulla öfningsexempel, torde dock inom folkskolan ej komma till någon vidsträcktare användning, ity att detsamma upptager en mängd synnerligen långa regler, beskrifningar och resonnemang, hvilket allt gör boken både vidlyftig och dyr.[4]

Kanske var det denna kritik som ledde honom att 1884 publicera en *Räknelära för folkskolor* speciellt avpassad för folkskolans undervisning.[5] Denna recenserades i *Svensk Läraretidning*. Recensionen inleds med ett allmänt erkännande av själva ambitionen att skriva en lärobok för folkskolan. Sedan börjar kritiken. Boken har två delar, en textavdelning och en exempelavdelning. Det kan väl vara gott och väl. Men i så fall, menar recensenten, gör givetvis textavdelningen rikta sig till läraren. Så har emellertid inte Nyströms tänkt. Recensenten konstaterar dock att även denna avdelning "tydligen [är] företrädesvis afsedd för eleven". För *om* läraren skulle anses vara i behov av denna typ av förklaringar, "innebure detta att bevis för hans inkompetens att undervisa i förevarande ämne".[6]

Vad recensenten vänder sig mot är frånvaron av tydlig gräns mellan lärare och elev. Texten är för svår för eleven, men för lätt för läraren. Denna omständighet får sedan negativa konsekvenser även för exempelsamlingen. För genom att den ansluter sig till textdelen, är den så att säga inte sig själv nog. Vi känner vid det här laget igen synpunkten: boken tvingar lärjungen att "i hvarje förekommande fall anlita lärarens biträde och sjelf i allmänhet blott blifva den passive".[7] När det gäller exempelsamlingen är alltså felet det motsatta jämfört med Zweigbergks regler: här är anvisningarna för *få* – "Har undervisningen förr ofta inskränkt sig till ett upprabblande af regler och definitioner, så synes nu en motsatt ytterlighet vara för handen".[8] Recensenten kan inte dra någon annan slutsats att Nyströms kombination av textavdelning med exempel bäst lämpar sig för "sjelfstudium", men som sådan "torde den i våra dagar hafva allt för liten betydelse, alldenstund den elementära räknekunskapen med högst få undantag inhemtas i skolorna".[9]

[1] Ibid.
[2] m., "Lärobok i Aritmetik. Till skolornas tjenst utgifven af P. A. Siljeström," *Svensk Läraretidning* (1883).
[3] C. A. Nyström, *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran, med talrika öfningsexempel och särskildt häftad facitbok* (Stockholm: 1853).
[4] Dalström, *Granskning af läroböcker i aritmetik, verkstäld af komiterade, utsedde af Stockholms folkskollärareförening,* sida?
[5] Carl Alfred Nyström, *Räknelära för folkskolor* (Stockholm: Kinberg, 1884).
[6] -id-, "Räknelära för folkskolor af C. A. Nyström.," *Svensk Läraretidning* (1884): 321.
[7] Ibid.
[8] Ibid.
[9] Ibid.

Denna kommentar är träffande: Nyströms räknelära knyter faktiskt an till de äldre räknelärorna så till vida att den faktiskt innehåller allt det man behöver veta för att kunna räkna, tillsammans med bistånd att lära sig det. Så skulle läroböckernas inte se ut på 1880-talet.

Nyströms textavdelning är relativt teoretisk. För Nyström stod förståelse av teori i motsats till mekanik. Förstår man teorin, menade han, räknar man inte mekaniskt. Recensenten drar en annan gräns mellan teori och mekanik när han skriver: "Sålunda förefaller läran om bråk vara allt för teoretisk, stundom gränsande till det rent mekaniska".[1] Här blir det tydligt att mekaniken är, så att säga, utspridd, på flera platser vid sidan om "den gyllene medelvägen" (ett uttryck som recensenten också använder) – både i det allt för myckna räknandet, men även i det överdrivna läsandet.

Den avslutande kritiken rör Nyströms användande av ganska stora tal i exempelsamlingen. Man skulle kunna göra en undersökning som visade att den totala summan av de tal eleven mötte 1850 respektive 1880 under ett år i folkskolan var ungefärligen konstant: ty uppgifternas antal ökades precis samtidigt som talens storlek krympte. Nyström anpassade sig emellertid inte till denna trend. Detta faktum beskriver recensenten som att han "förbisett[t] elevens låga ståndpunkt och den stora betydelse för framgången af undervisningen allra helst på detta stadium, som ligger deri, att exemplen innehålla små tal och äro många till antalet".[2] Nyström såg exemplen med stora tal som övningar på att använda aritmetikens algoritmer. Recensenten ser dem istället som redskap att "mörda tiden och döda intresset".[3]

Granskningskommittén vars utlåtande publicerades 1887 var än mer kritisk mot Nyströms *Räknelära för folkskolor*. De använde uttrycket "mekaniskt" tio gånger på recensionens fem sidor. Drar man samman dessa stycken, tillsammans med liknande, som istället använder begrepp som "onaturlig" och "konstgrepp", får man följande:

> [...] tankedödande mekanism [...] mekaniska föreskrifter [...] måste förefalla lärjungarna såsom ett rent konstgrepp [...] i allmänhet är behandlingssättet mekaniskt [...] de många mekaniska föreskrifterna i textafdelningen [...] i högsta grad mekanisk [...] inpregla i minnet [...] denna minneskunskap [...] högst mekanisk [...] och af åtskilliga andra mekaniska åtgärder [...] alltigenom mekanisk och svårfattlig [...] Språket bär i allmänhet spår af det mekaniska framställningssättet [...] regler med vidlyftiga förklaringar och i allmänhet bär svår af ett mekaniskt behandlingssätt [...][4]

Låt mig, istället för att redogöra för granskningen, utgå från vad Nyström själv hade att säga om kritiken. Våren 1888 hade *Svensk Läraretidning* särskilda bilagor enbart för diskussionen kring folkskolans räkneundervisning. En av dessa bilagor bestod till stor del av en "Vidräkning med kommiterade för granskning af folkskolans läroböcker" författad av Nyström.[5]

Hans vidräkning kretsar nästan uteslutande kring vad det egentligen betyder att något är "mekaniskt". På två sätt är denna vidräkning unik: för det första gör den problematiken kring användandet av begreppet "mekaniskt" explicit, för det andra visar den ganska exakt på hur skolmatematikens förändring mellan 1850 och 1890 hänger samman med en förskjutning av innebörden av det mekaniska. I det Nyström skriver kan man identifiera åtminstone sex punkter, rörande vilka innebörden av det mekaniska förskjutits.

Teoretiska förklaringar

Nyström ser dem som medel att förhindra att räknande utförs mekaniskt, "enär det för den mekaniska räkningen kännetecknande just är bristande förmåga att kunna framlägga skälet, hvarför man går till väga på det eller det sättet". Så icke längre. Eftersom lärjungarnas ståndpunkt är så låg, menar man nu, blir den typ av redogörelser Nyström talar om, endast "tomma ord". Precis på samma sätt som lärjungarna, när de räknar mekaniskt, inte förstår vad de gör, blir även dessa redogörelser mekaniska, eftersom lärjungarna inte förstår vad de pratar om. Nyström erkänner att han ibland "kan hafva behandlat vissa delar mera vidlyftigt, än för mången kan synas nödigt", men han frågar då: "månne någon skada skett derigenom?".[6] Han sätter där fingret på en central aspekt av den nya skolmatematiken, nämligen dess omsorg om lärjungarna, vilken bland annat tog sig uttryck i ambitionen att aldrig låta dem ens i förbigående se något som inte var avpassat just för dem och deras ståndpunkt.

---

1 Ibid.: 322.
2 Ibid.
3 Ibid.
4 *Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande. Räkning.*, s. 62-67.
5 Nyström, "Vidräkning med kommitterade för granskning af folkskolans läroböcker."
6 Ibid.: 118.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Nyström förespråkade användande av en muntlig heuristik för att få lärjungarna att förstå. Paradoxalt nog ser han utvecklingen som ett ytterligare "teoretiserande". Anledningen är att Nyström avbryter heuristiken vid en viss tidpunkt, nämligen när lärjungarna, av sig själva (med lärarens hjälp förstås) "sjelf upptäckt" regeln för ett visst räknesätt. Han går så att säga på djupet med teorin – och här rör det sig, om man förstår teori som Nyström, om matematisk teori – men lämnar sedan detta när lärjungarna väl förstått. Vad som hänt nu är att denna punkt av förståelse – som hos Nyström hänger samman med att vara medveten om vad man gör – bytts ut mot bildandet av talbegreppet, vilket är en process som snarast dels är omedveten, dels på ett helt annat sätt än förståendet kontinuerlig. Detta leder fram till den andra punkten.

Algoritmer och regler

Nyströms börjar med muntlig heuristik. "Men härmed bör ej fortsättas", skriver han,

> längre, än till dess att lärjungen, under lärarens medverkan, sjelf likasom utfunnit den erforderliga regeln, hvilken derefter utan all tvekan tillämpas sådan den bör vara att i läroboken återfinna under en mera koncis form.[1]

Att räkna är alltså för Nyström att följa (matematikens) regler. Dessa regler kan man förstå. Förstår man dem följer man dem inte mekaniskt. Inte desto mindre finns de där att följa. Nu får sådana regler över huvud taget inte längre förekomma i boken. De är i sig själva – förstådda eller inte – uttryck för mekanik. Har man ett riktigt talbegrepp, menar man nu, behövs inga regler.

Uträknade exempel

Liksom regler kan uträknade exempel "följas". För Nyström, liksom i de äldre räknelärorna och även i Zweigbergks räknebok, spelar uträknade exempel en central roll för att klargöra reglernas innebörd och användning. Man kunde tänka sig att om reglerna togs bort, de uträknade exemplen skulle ta deras plats. Inte alls. Lärjungarna skall ledas framåt, steg för steg. Ett exempel markerar, så kan man förstå det, en punkt längre fram på vägen, att sträva mot. Sådana punkter kan nu inte längre tillåtas, och det är inte svårt att förstå varför: de ligger bortom elevens ståndpunkt.

Minnet

Nyström använder ibland, trots hans totala avståndstagande från den "memorering" av regler som tillskrivs Zweigbergk, ordet "minne". Granskarna kritiserar här helt enkelt Nyströms språkbruk, som de menar "bär spår af det mekaniska framställningssättet". Ordet minne har, kan man säga, blivit tabu. Detta hänger givetvis samman med talbegreppet, som per definition är helt oberoende av minnet. Bilden som framträder, är av lärjungen som långsamt rör sig längs lärogången, omedveten både om vad som ligger framför honom och vad han passerat. Rörelsen formar honom, bildar honom, och i detta ligger dess syfte.

Praktiska anvisningar.

Nyström är till synes perplex, och skriver:

> Särskildt är det mig obegripligt, hvad kommiterade syfta på, då de här återigen tala om "mekaniska föreskrifter". Skulle de härmed afse anvisningarna för de i ett exempel förekommande sifferuppgifternas uppskrifvande på ett sådant sätt att de bli lättare öfverskådliga än i sjelfva exempeltexten? Man skulle då ej heller få anvisa lärjungen att för underlättandet af uträkningen vid addition och subtraktion uppskrifva talen så, att samma slags enheter [...] komma öfver och under hvarandra.[2]

Det är en riktig observation: denna typ av anvisningar har, liksom ordet minne, blivit tabu. Sådant hör, menar man nu, inte till matematiken. Nyströms beskrivning för hur man kan hantera sorter, konstaterar han, "förefaller kommitterade så främmande för all matematisk metod, att de hänföra detsamma till 'konstgrepp'". Problemet för de kommitterade är att Nyströms beskrivning huvudsakligen är praktisk. Man kan säga att Nyströms rör sig med en distinktion, mellan den matematiska teorin, och dess praktiska

[1] Ibid.: s. 114.
[2] Ibid.: s. 115.

användning. När man väl förstått teorin, bör man, menar han, självklart sträva efter det mest praktiska sättet att använda den. Nyströms ståndpunkt är, att om

> lärjungen, i den mån han utvecklar sin förmåga att raskt och säkert verkställa förekommande räkneoperationer, skulle fästa mindre vigt vid den teoretiska grunden för sitt förfarande, så vore dock mycket vunnet, ty sjelfva räknesäkerheten värderas i och för sig med rätta högt och bör derföre i skolan ingalunda skjutas undan.[1]

För de kommitterade ligger tvärtom det bildande hos matematiken inte minst i dess användning, vilket gör att även denna måste utformas efter bildningens krav.

Siffror

Den fullständiga titeln på Nyströms första bok lyder *Försök till lärobok i Aritmetik eller Siffer-Räknelära med talrika öfningsexempel och särskildt häftad Facitbok.* Som vi sett ville Nyström ställa räkneläran "på egen botten", genom att ge dess räknesätt grundliga bevis – utan användande av algebra. Nyström har, skriver han, "från början sökt grunda min framställning af räkneläran uteslutande på *lagen för tals beteckande medelst siffror*".[2] De kommitterande talar mycket om talbegreppet, men, skriver Nyström, "endast på talbegreppet, såsom sådant, lärer någon räknelära ej kunna uppkonstrueras". För kommitterade spelar emellertid just siffrorna en allt för central roll i Nyströms räknelära. Man måste, menar de, skilja mellan tal och siffra, och det är talet som skall stå i undervisningens centrum. Nyström har förstått att det är "den allra nyaste uppfinningen" *talsorter*, som man menar gör det möjligt att omsätta denna ambition i praktisk undervisning. Detta nya sätt att tala om matematik använder emellertid inte Nyström.

I sin vidräkning undrar han om det inte varit mer fruktbringande om de kommitterade kommit ut med en egen räknebok och på så sätt visat hur sina grundsatser borde tillämpas – än som nu uteslutande ägna sig åt kritik. N visste inte då att en av de kommiterade, J. E. Johansson, faktiskt kommit ut med en lärobok som, i och med att han ingick i kommittén, rimligtvis borde utgöra ett sådant exempel på hur grundsatserna borde tillämpas. Följaktligen ägnas en bilaga till Svensk Läraretidning i april 1888 åt en av Nyströms författad granskning av "J. E. Johanssons 'Räknelära' och folkskolekommitterades 'utvecklande metod' m.m.".[3]

Om hans vidräkning kretsade kring innebörden av den "mekanik" som han så många gånger anklagats för, handlar hans granskning här om vad som kan åsyftas med "utvecklande metod". Nyström inleder emellertid med en kritisk granskning av Johanssons användande av "talsortsbegreppet", som ju stod i centrum för granskningskommitténs grundsatser. Vad han konstaterar är kort sagt att detta nya sätt att tala – precis som Nordlund också konstaterat – innebär att vissa problem försvinner, men att andra tillkommer. Typiskt är begreppet "antalsenhet", som Johansson nödgas använda. Slutsatsen Nyström drar är att det inte är självklart att den nya terminologin kommer att gynna lärjungarnas verksamhet.

Vad Nyström är mest intresserad av är emellertid, som sagt, att genom Johansson bok ta reda på "hvad kommitterade afse med den 'utvecklande metod', som utgör den röda tråden i deras betänkande". Nyströms kommentar angående de första 15 sidorna av Johanssons bok är karaktäristiskt för hans slutomdöme, nämligen att det för honom ter sig som – "exercis". Johansson förbereder och inleder med hjälp av enkla uppgifter – på så sätt skall lärjungarna utvecklas. Men sedda ur ett annat perspektiv blir dessa uppgifter givetvis – blott mekanik.

Nyström utgår från sin egen grundats – att lärjungarna skall förstå vad de gör. Och då ter det sig föga utvecklande att eleverna i Johanssons bok inte får reda på – det blir aldrig förklarat för dem – vad *siffrorna* betyder, och hur *siffersystemet* är uppbyggt. Den "överenskomna lagen" för hur vi betecknar tal, skriver han,

> hade väl kunnat i boken uttalas i tydligare ord, så att man ej behöft af hvad som förekommer uti allmänna inledningen söka gissa sig till den i fråga varande konventionela grunden för talbeteckningen, hvilken grund icke kan på heuristisk väg framräsonneras.[4]

Nyckelordet är här "konvention". I granskningen, liksom i Johanssons bok, framstår matematiken som helt befriad från konventioner; den är alltigenom "naturlig". Den slutsats Nyström drar av Johanssons bok

---

[1] Ibid.: s. 114.
[2] Ibid.: 117.
[3] Nyström, "J. E. Johanssons "Räknelära" och folkskolekommitterades "utvecklande metod" m. m."
[4] Ibid.: 147.

är att: "denna framställning är mindre utvecklande än i onödiga svårigheter och förvillande uppfattning invecklande".[1]

Nytt möter nytt

[Här skall jag redogöra för ett par meningsväxlingar inom den nya generationen skolmatematiker.

En viktig poäng med denna redogörelse är att det tycks omöjligt att säga vad praktiken betyder. Olika personer har olika erfarenheter*. De beskyller varandras arrangemang för att leda till mekanik, men det finns inga kriterier för att skilja dem åt. Praktiken är, kan man säga, överbestämd. Den är fylld av mening, men det är uppenbart – och blir kanske till och med uppenbart för diskutanterna själva – att denna mening i stor utsträckning kommer från dem själva. Diskussionen leder inte till någon klar "upplösning" utan ebbar istället ut. En mängd frågor förblir obesvarade.]*[2]

8.4. Läroboken som sysselsättning

Mellan 1850 och 1890 kom det zweigbergkska läroboksparadigmet att (åtminstone vad gäller den skolmatematiska diskussionen) ersättas av ett nytt. Den nya utformning som läroböckerna i räkning hade fått mot slutet av 1880-talet var resultatet av en process som kan delas in i tre faser.

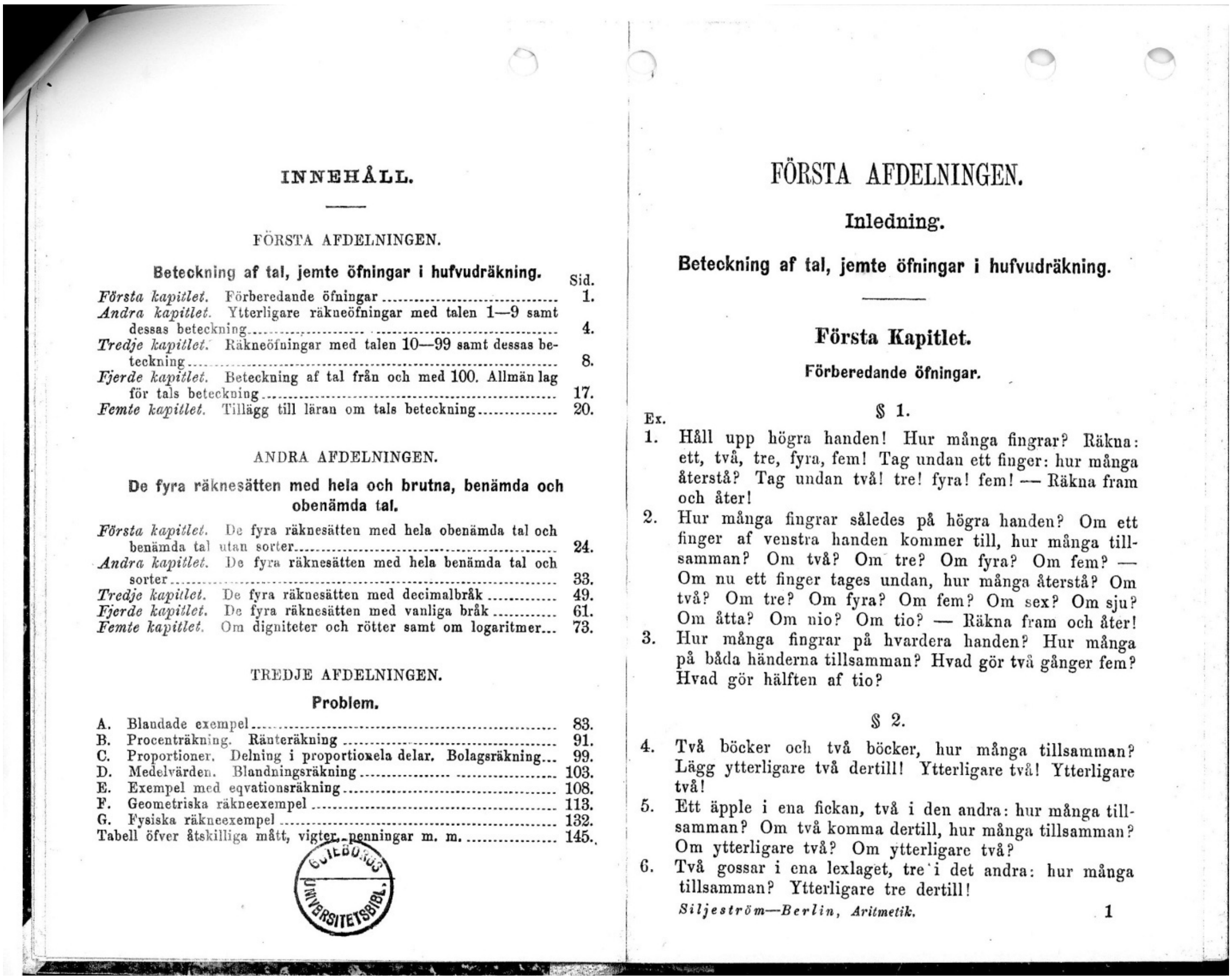
Den första fasen sträcker sig från omkring 1850, fram till mitten av 1870-talet. O. E. L. Dahm poängterar vikten av huvudräkning i sin *Skolmästarkonst* 1846.[3] Nyström talar om vikten av muntlig förberedelse i förordet till sin *Försök till lärobok i aritmetik eller sifferräkneläran.*[4] Vad Dahm och Nyström avsåg var huvudräkningsövningar som förberedelse innan den skriftliga räkningen tog vid. De menade att det bara var genom att själv muntligen "upptäcka" sina nya kunskaper, och genom att muntligen kunna "redogöra" för dem, som de blev riktigt förstådda. Men även dessa metoder hade ett efterföljande skriftligt moment. Väsentligt för denna första fas är att de muntliga övningarna inte fanns i tryck i själva läroboken. Om detta skrev Nyström:

> Ursprungligen hade Utg. ernat att, före hwarje abstrakt framställning af reglorna för werkställandet af något räknesätt, wisa deras konkreta tillämpning genom lätta öfningsexempel, ämnade att med tillhjelp af några widfogade, lätt beswarade frågor af lärjungen uträknas, såsom man säger, i hufwudet, d. w. s. med egen eftertanke och utan regel. Men utom det materiella hindret, ett förökadt omfång och ett följaktligen högre boklådspris, för werkställandet af denna afsigt, har Utg. äfwen insett, att dylika exempel måste till antal och beskaffenhet lämpas olika efter olika förmågor, hwadan de swårligen af läroboken kunna i dessa båda hänseenden bestämmas.[5]

Under den andra fasen börjar de muntliga övningarna tryckas i läroböckerna. A. T. Bergius hade (som titeln anger) särskilda övningar i huvudräkning i sin *Elementarkurs i Räknekonsten, jemte öfningar i Hufvudräkning* från 1850.[6] Att denna bok kom ut redan 1850 visar att faserna överlappade varandra. Inte desto mindre var det först senare som det blev självklart att böckerna skulle innehålla muntliga övningar. Typiska i detta avseende är Siljeströms läroböcker i räkning, vilka alla inleds på det sätt som figurn nedan visar.[7]

---

[1] Ibid.
[2] Nordlund, "Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen. Svar på Herr Rollins uppsats i Ped. Tidskrift 1891:10."; Nordlund, "Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen. Svar på hr Rollins uppsats i fjärde häftet af pedagogisk tidskrift för år 1892."; Nordlund, *Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen: svar på Herr Rollins uppsats i Ped. Tidskrift 1891:10*. Rollin, "Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen." L. C. Lindblom, "Om öfverensstämmelse mellan form och innehåll vid räkneundervisningen," *Folkskolans vän* (1884).
[3] Dahm, *Skolmästarkonst. Antydningar för Lärare och Skolinspektörer*.
[4] Nyström, *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran, med talrika öfningsexempel och särskildt häftad facitbok*, Förord.
[5] Ibid.
[6] Axel Theodor Bergius, *Elementarkurs i räknekonsten jemte öfningar i hufvudräkning* (Stockholm: 1850).
[7] T. ex. Siljeström, *Lärobok i räknekonsten til folkskolornas tjänst.*



INNEHÅLL.

FÖRSTA AFDELNINGEN.

Beteckning af tal, jemte öfningar i hufvudräkning.

ANDRA AFDELNINGEN.

De fyra räknesätten med hela och brutna, benämda och obenämda tal.

TREDJE AFDELNINGEN.

Problem.

GÖTEBORGS UNIVERSITETSBIBL.

FÖRSTA AFDELNINGEN.

Inledning.

Beteckning af tal, jemte öfningar i hufvudräkning.

Första Kapitlet.

Förberedande öfningar.

§ 1.

Ex.

1. Håll upp högra handen! Hur många fingrar? Räkna: ett, två, tre, fyra, fem! Tag undan ett finger: hur många återstå? Tag undan två! tre! fyra! fem! — Räkna fram och åter!
2. Hur många fingrar således på högra handen? Om ett finger af venstra handen kommer till, hur många tillsamman? Om två? Om tre? Om fyra? Om fem? — Om nu ett finger tages undan, hur många återstå? Om två? Om tre? Om fyra? Om fem? Om sex? Om sju? Om åtta? Om nio? Om tio? — Räkna fram och åter!
3. Hur många fingrar på hvardera handen? Hur många på båda händerna tillsamman? Hvad gör två gånger fem? Hvad gör hälften af tio?

§ 2.

4. Två böcker och två böcker, hur många tillsamman? Lägg ytterligare två dertill! Ytterligare två! Ytterligare två!
5. Ett äpple i ena fickan, två i den andra: hur många tillsamman? Om två komma dertill, hur många tillsamman? Om ytterligare två? Om ytterligare två?
6. Två gossar i ena lexlaget, tre i det andra: hur många tillsamman? Ytterligare tre dertill!

Siljeström—Berlin, Aritmetik. 1

Figur 12. Första sidan i Siljeströms *Lärobok i räknekonsten till folkskolornas tjenst* från 1866.[1]

Den andra fasen präglades av de tysta övningarnas växande betydelse. Dessa fick till följd att läroböckerna utformades så, att eleverna i större utsträckning än tidigare fick ledningar till hur uppgifterna skulle lösas, samtidigt som större omsorg ägnades åt att ordna uppgifterna så att eleverna inte ställdes frågande – allt för att de inte skulle ta lärarens uppmärksamhet i anspråk. Velander ger principen ett klart uttryck, då han skriver att man bör

> gå från det empiriska till det rationella, alltså *visa först* och *förklara sedan*. I första årskursen vilja vi derför inrymma *endast anvisningar* till uppställning och uträkning, och dessa anvisningar böra sluta sig till bestämda, valda exempel samt få ej ha formen af abstrakta redogörelse för huru man bör bära sig åt.[2]

I och med att växelundervisningsmetoden började fasas ut, kom eleverna att i allt större utsträckning ägna sig åt läroboken under tystnad. Fortfarande under denna tid betraktade man det tysta räknandet som huvudsakligen "mekaniskt", även om man, som Velander uttryckte det, givetvis kunde hoppas att en och annan kunskapsbit kunde komma med liksom "på köpet".[3] [Under denna fas blev det vanligare att inkludera muntliga övningar i läroböckerna, något Nyström inte ansåg nödvändigt i sin lärobok från 1853.]

Karaktäristiskt för den tredje fasen, som inleds kring mitten av 1870-talet, är att gränsen mellan muntlig förberedelse och efterföljande skriftlig räkning allt mer suddas ut. Istället för två skiljda faser, karaktäristiska av elevens tal respektive elevens tystnad, blir istället så att säga "hela vägen" inkluderad i läroboken. Eleven kan då på egen hand ta sig an en sorts skriftlig form av (extremt enkla) muntliga övningar, och därifrån – så var det åtminstone tänkt – röra sig från avsnitt till avsnitt helt på egen hand, med hjälp av ledningar, uträknade exempel och logiskt ordnade uppgifter av långsamt växande svårighet. En senare

[1] Ibid., 1.
[2] Velander, "Ämnet räkning i folkskolan," 403.
[3] Ibid.: 350?

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

generations skolmatematiker, Harald Dahlgren, skrev 1905 att de tidigare reglerna, följda av övningsuppgifter,

> mehr und mehr aus dem Gebrauch in den Schulen geschwunden und durch Aufgaben sammlungen ersetzt worden sind, in welchen man die Aufgaben so geordnet, dass sie Schritt für Schritt die mathematische Kunde der Schüler entwickeln und ihn dabei auch mit Rechenaufgaben des praktischen Lebens verteur machen werden. Wenn man in diesen Sammlungen von Beispielen Regeln gibt, so sind sie als Zusammenfassungen von dem eingeschaltet, was infolge einer Reihe von Beispielen verstanden sein muss. Die Gedankenfolge ist nicht mehr: mathematische Kenntnis auf praktische Aufgaben angewendet, sondern: mathematische Kenntnis bei und durch Auflösung praktischer Aufgaben. *Die heuristische Methode* ist somit immer mehr zum Durchbruch gekommen.[1]

Dahlgren beskriver här den tanke som låg till grund för de nya böckerna, nämligen att *läroboken* kunde fungera som ett utvecklande redskap – något som man inte hade kunnat acceptera 1850. Kanske kom aldrig denna av boken guidade lärogång att tillskrivas samma bildningsvärde som den muntliga räkningen, men bildningstänkandet kom å andra sidan under denna tid att på ett mer allmänt plan förlora mark. Oavsett vilket, kom skolmatematiken i och med detta än tydligare att framställa matematiken som en väg, och den process genom vilken matematiken bemästras som en väl reglerad rörelse från det lättare till det svårare.

Det finns här anledning att återknyta till räknelärornas sätt att presentera räknekonsten. Där kom reglerna först, följda av kommenterade exempel och sedan ett fåtal övningar. Angående sina övningsuppgifter på tillämpad sammansatt Regula de Tri skrev till exempel Roloff Anderson:

> Härefter följa några blandade Öfnings-Exempel, som hwar och en sjelf kan öfwa sig uti, att känna hwad slags exempel det är, och till hwilken förändring hwart och ett hörer. Den som will hafwa flere, kan sjelf formera sig så många och sådana han behagar.[2]

Räknekonsten, det vill säga den sorts elementär matematik som man ville att folkskolans elever skulle bemästra efter avslutad skolgång, framställdes i räknelärorna som ett system av regler. Dessa var man mer eller mindre tvungen att lära sig utantill, och för att kunna använda dem krävdes dessutom en hel del annan kunskap; man behövde kunna gånger tabellen, gärna den stora (upp till 20), relationen mellan en mängd olika sorter, och helst även ha memorerat en rad särskilda tabeller för reduktion av olika sorter för att kunna räkna "i part" utan att behöva ta till "griffel och tavla". Att ett bemästrande av räknekonsten krävde mycket övning framgick av räknelärornas framställningar. Räknelärorna överlät emellertid det praktiska utformandet av detta övande till sin läsare. Av Roloff Anderssons kommentarer framgår att han knappast ansåg sig veta vad varje enskild person behövde öva på, eller hur mycket, för att nå just den förmåga som han (eller hon) av en eller annan anledning eftersträvade.

Med utgångspunkt från den syn på räknekonsten som låg till grund för räknelärornas utformning framstår det givetvis som absurt att från en bok som är till för att ge en läsare kompetens i räknekonsten, utesluta räknekonstens regler.

Ytterligare ett exempel på skillnaden mellan den syn på räknekonsten som nu blivit gängse, och den som låg till grund för räknelärornas utformning, kan hämtas från A. W. Lavéns *Lärobok uti Mathematik* från 1842. Efter sin genomgång av sammansatt Regula de Tri ger han *ett* exempel:

> 27. 500 man, som arbetade 12 timmar om dagen, hafva användt 57 dagar för att gräfva en kanal, 1800 alnar lång, 7 alnar bred och 3 alnar djup; huru många dagar behöfva då 860 man använda, om de arbeta 10 timmar dagligen, för att gräfva en kanal 2900 alnar lång, 12 alnar bred och 5 alnar djup, uti en jordmån, som anses 3 gånger svårare att gräfva uti; och då man tillika utrönt att de förstnämndes arbetsförmåga förhåller sig till de sistnämndes som 7 till 5? (Svar 768 36/43 dagar).[3]

Efter en textrik och detaljerad lösning skriver han: "Detta exempel, hvilket är ett bland de mest sammansatta som gerna kunna komma i fråga, torde tillräckligt visa huru dylika frågor böra behandlas".[4] Tanken är klar: genom att se hur ett exempel behandlas, kan man *förstå*, och med utgångspunkt från förståelse kan man sedan lösa liknande problem på egen hand.

[1] Dahlgren, "Die Mathematik an den Volksschulen und volksschullehrerseminarien Schwedens," s. 15.
[2] Andersson, *Arithmetica Tironica*, s. 123.
[3] Lavén, *Lärobok uti mathematik: bok 1. räknelära*, s. 190.
[4] Ibid., s. 191.

Ett nytt läroboksparadigm

Som exempel på den nya typ av läroböcker i räkning som under 1900-talets första decennier kom att tränga ut de böcker som följde det zweigbergkska paradigmet, har jag valt de av Alfred Berg. Han första lärobok i räkning av *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor*, publicerad 1877.[1] Förutom att komma ut i ett antal nya upplagor under slutet av 1800-talet, låg denna bok till grund för hans *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, publicerade första gången 1888, och hans *Folkskolans räknelära* som kom ut ett år senare 1889.[2] Bearbetade av en rad, vad gäller den svenska skolmatematiken relativt prominenta herrar, kom dessa läroböcker ut i nya upplagor ända fram till slutet av 1940-talet. Då växte kraven på en "modernisering" av skolmatematiken, vilken ställde dessa äldre läroböcker i en sämre dager. Detta innebar emellertid inte alls att de nya läroböcker som kom vid denna tid på något avgörande sätt skiljde sig från det paradigm som Bergs räknelära kom att utgöra.[3] Under den period som står i fokus för det här kapitlet skapades en typ av läroböcker i räkning som höll eleverna tysta. Dessa böcker hade kommit för att stanna.

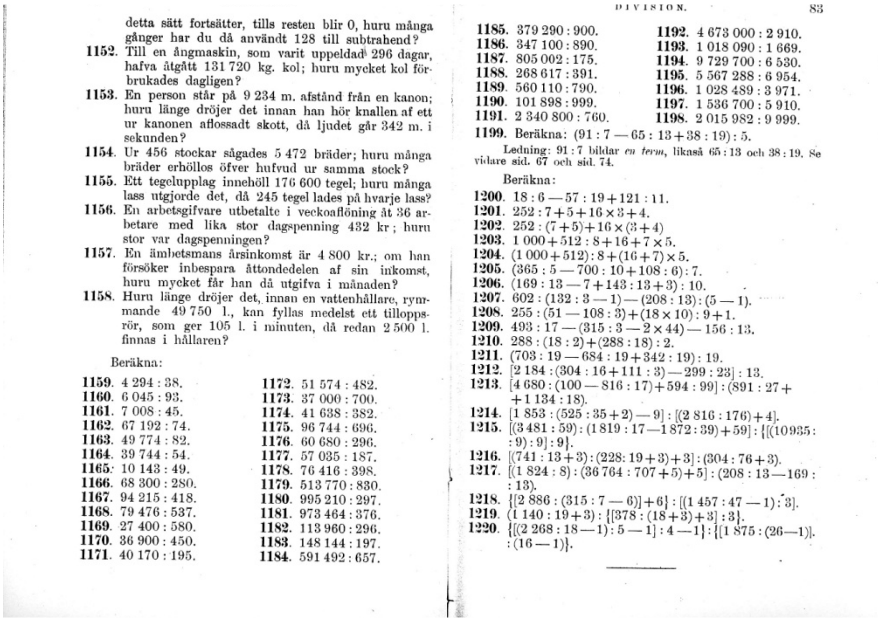
Räkneexempel för tyst övning

I förordet till sin första lärobok skriver Berg att hans mål varit att skriva en lärobok i aritmetik, "genom hvilken eleven borde kunna hufvudsakligen på egen hand utan att allt för mycket taga lärarens tid i anspråk lära sig räkna".[4] Att detta mål inte kan nås med hjälp av böcker fyllda av "regler" står nu klart, menar han. Reglerna, och Regula-de-Trins deras uppdelning av räknesätten i olika grupper, tenderade dessutom att leda till att eleverna, "i allmänna lifvet" inte kunde tänka ut vilket räknesätt de skulle använda då de skulle lösa en viss uppgift. Den lösning av båda dessa problem som Berg presenterar är att eleverna genom en följd av "tillämpade" exempel, fortskridande "från det lättare till det svårare", själva får "upptäcka" räknesätten. På så sätt "vänjes [eleven] vid att för en räknefrågas besvarande först sätta sig in i frågans natur och försöka att ur uppgifterna på genaste väg finna svaret, utan att hafva hela sin uppmärksamhet fäst vid bestämmandet af under hvilket räknesätt frågan bör rubriceras".[5] Till detta lägger Berg att han uteslutit "satsernas teoretiska bevisning", eftersom bokens syfte uteslutande är att eleven "då en räkneuppgift i det praktiska lifvet förekommer, må kunna [...] lösa densamma".[6]

Tittar man på innehållet i Bergs läroböcker ser man att de, föga oväntat, nästan uteslutande innehåller räkneexempel. Det går inte längre att tala om "övningsuppgifter" om man med detta syftar på ett övande av något som först "lärt sig". Istället är det här fråga om den typ av "skriftlig heuristik" som Nordlund bidrog till att introducera. Uppgifterna kommer varken före eller efter en explicit presentation av matematisk teori och teknik. Istället är matematiken presenterad *genom* exempel; den fullständiga titeln till den läroboks som utgjorde startpunkten för Bergs läroboksförfattande lyder följaktligen: *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor, framställd genom exempel.* Nedanstående figur visar ett uppslag ur denna bok.

[1] Alfred Berg, *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor* (Stockholm: Fritze, 1877).
[2] Alfred Berg, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor* (Stockholm: Fritze, 1888); Bernhard Alfred Berg, *Folkskolans räknelära* (Stockholm: Fritze, 1889).
[3] Här syftar jag till exempel på [referens].
[4] Alfred Berg, *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor*, 5. uppl. utg. (Stockholm: Fritze, 1886).
[5] Ibid.
[6] Ibid.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf



detta sätt fortsätter, tills resten blir 0, huru många gånger har du då användt 128 till subtrahend?

1152. Till en ångmaskin, som varit uppeldad 296 dagar, hafva åtgått 131 720 kg. kol; huru mycket kol förbrukades dagligen?

1153. En person står på 9 234 m. afstånd från en kanon; huru länge dröjer det innan han hör knallen af ett ur kanonen aflossadt skott, då ljudet går 342 m. i sekunden?

1154. Ur 456 stockar sågades 5 472 bräder; huru många bräder erhöllos öfver hufvud ur samma stock?

1155. Ett tegelupplag innehöll 176 600 tegel; huru många lass utgjorde det, då 245 tegel lades på hvarje lass?

1156. En arbetsgifvare utbetalte i veckoaflöning åt 36 arbetare med lika stor dagspenning 432 kr; huru stor var dagspenningen?

1157. En ämbetsmans årsinkomst är 4 800 kr.; om han försöker inbespara åttondedelen af sin inkomst, huru mycket får han då utgifva i månaden?

1158. Huru länge dröjer det, innan en vattenhållare, rymmande 49 750 l., kan fyllas medelst ett tilloppsrör, som ger 105 l. i minuten, då redan 2 500 l. finnas i hållaren?

Beräkna:

1159. 4 294 : 38.
1160. 6 045 : 93.
1161. 7 008 : 45.
1162. 67 192 : 74.
1163. 49 774 : 82.
1164. 39 744 : 54.
1165. 10 143 : 49.
1166. 68 300 : 280.
1167. 94 215 : 418.
1168. 79 476 : 537.
1169. 27 400 : 580.
1170. 36 900 : 450.
1171. 40 170 : 195.
1172. 51 574 : 482.
1173. 37 000 : 700.
1174. 41 638 : 382.
1175. 96 744 : 696.
1176. 60 680 : 296.
1177. 57 035 : 187.
1178. 76 416 : 398.
1179. 513 770 : 830.
1180. 995 210 : 297.
1181. 973 464 : 376.
1182. 113 960 : 296.
1183. 148 144 : 197.
1184. 591 492 : 657.

DIVISION. 83

1185. 379 290 : 900.
1186. 347 100 : 890.
1187. 805 002 : 175.
1188. 268 617 : 391.
1189. 560 110 : 790.
1190. 101 898 : 999.
1191. 2 340 800 : 760.
1192. 4 673 000 : 2 910.
1193. 1 018 090 : 1 669.
1194. 9 729 700 : 6 530.
1195. 5 567 288 : 6 954.
1196. 1 028 489 : 3 971.
1197. 1 536 700 : 5 910.
1198. 2 015 982 : 9 999.
1199. Beräkna: (91 : 7 — 65 : 13 + 38 : 19) : 5.

Ledning: 91 : 7 bildar *en term*, likaså 65 : 13 och 38 : 19. Se vidare sid. 67 och sid. 74.

Beräkna:

1200. 18 : 6 — 57 : 19 + 121 : 11.
1201. 252 : 7 + 5 + 16 × 3 + 4.
1202. 252 : (7 + 5) + 16 × (3 + 4)
1203. 1 000 + 512 : 8 + 16 + 7 × 5.
1204. (1 000 + 512) : 8 + (16 + 7) × 5.
1205. (365 : 5 — 700 : 10 + 108 : 6) : 7.
1206. (169 : 13 — 7 + 143 : 13 + 3) : 10.
1207. 602 : (132 : 3 — 1) — (208 : 13) : (5 — 1).
1208. 255 : (51 — 108 : 3) + (18 × 10) : 9 + 1.
1209. 493 : 17 — (315 : 3 — 2 × 44) — 156 : 13.
1210. 288 : (18 : 2) + (288 : 18) : 2.
1211. (703 : 19 — 684 : 19 + 342 : 19) : 19.
1212. [2 184 : (304 : 16 + 111 : 3) — 299 : 23] : 13.
1213. [4 680 : (100 — 816 : 17) + 594 : 99] : (891 : 27 + + 1 134 : 18).
1214. [1 853 : (525 : 35 + 2) — 9] : [(2 816 : 176) + 4].
1215. [(3 481 : 59) : (1 819 : 17 — 1 872 : 39) + 59] : {[(10935 : : 9) : 9] : 9}.
1216. [(741 : 13 + 3) : (228: 19 + 3) + 3] : (304 : 76 + 3).
1217. [(1 824 : 8) : (36 764 : 707 + 5) + 5] : (208 : 13 — 169 : : 13).
1218. {[2 886 : (315 : 7 — 6)] + 6} : [(1 457 : 47 — 1) : 3].
1219. (1 140 : 19 + 3) : {[378 : (18 + 3) + 3] : 3}.
1220. {[(2 268 : 18 — 1) : 5 — 1] : 4 — 1} : {[1 875 : (26 — 1)] : (16 — 1)}.

Figur 13. Ett uppslag ur Alfred Bergs *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*.[1] Observera "ledningen" på den högra sidan. *[bilden skall bytas ut!]*

På flera olika sätt försökte Berg underlätta för eleverna så att de inte skulle ta lärarens tid i anspråk. För det första givetvis genom att uppgifterna var ordnade i en sådan följd att eleven leddes framåt i mycket små steg. Till detta kom att varje nytt moment introducerades genom "minst två likartade" uträknade exempel, samt en mängd "ledningar" insprängda i texten. "Härigenom torde det ej vara omöjligt", skriver Berg

> att elever med god fattningsförmåga, *sjelfva* kunna dels ur svaret *finna* sättet för räkningens utförande och tillika *begripa* förfarandets riktighet, hvarigenom tillfälle beredes läraren att mera ingripande och längre sysselsätta sig med de mindre begåfvade eleverna.[2]

Här syns tydligt varför den metod som blev resultatet av att läroböckerna utformades för att passa de tysta övningarna kan kallas "skriftlig heuristik". Tanken är att den långa följden av räkneexempel skall vara resa där eleven, precis som alltid betonades av den heuristiska metodens talesmän, själv "upptäcker" matematiken.

Talsortsmetoden

Något Berg inte nämner i sitt förord är att han följer "talsortsmetoden". En följd av detta är att han ägnar synnerligen stort utrymme åt omvandling mellan olika sorter.[3] Dels "tillämpade" sorter, dels sorter som "tio", "hundra" och "trillion". Enligt talsortsmetoden bestod skolmatematikens viktigaste uppgift i att bibringa eleverna förståelse av dessa sorter, och förmåga att omvandla dem. Berg introducerar sorterna en i taget, och diskuterar relationen mellan dem i ledningarna som finns insprängda mellan exemplen. Så väl i dessa ledningar, som i formuleringen av de många exemplen "hjälper" han eleven att förstå med hjälp av bindestreck och särskrivningar. Så här kan det låta:

> För de tal, som äro större än 999 999, bildas en ny huvudgrupp, som kalas *million* och skrives till vänster om den första huvudgruppen; talen inom den bildas och skrivas på samma sätt som inom första huvudgruppen med en-tal, tio-tal, hundra-tal, tusen-tal, tiotusen-tal och hundratusen-tal. T. ex. sexhundrasjuttiotvå tusen fyrahundratrettiosex *millioner* tvåhundrafemtiotre tusen femhundraåttiosju skrives:
>
> 672 436 253 587 [4]

[1] Berg, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*.
[2] Berg, *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor*.
[3] Se Nyströms kommentar ovan, sid. 185. Nyström var *förundrad* över talsortsmetodiken, något som kanske inte framgår av min redogörelse.
[4] Alfred Berg, Karl Hagström, och Elis Hjalmar, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, 8. uppl. / utg. (Stockholm: 1930), s. 53-54.

Av Bergs användande av talsortsmetoden följer även en rad termer, specifika för denna metodik – vilka för eleverna givetvis framträder som specifika för matematiken, men som i själva verket snarare är knutna till *skolmatematiken*. I citatet ovan är "huvudgrupp" en sådan term. Genom Bergs läroböcker – som i viss mån kom att dominera den skolmatematiska scenen under 1900-talets första decennier (i kraftig konkurrens, skall sägas) – kom därmed talsortsmetodiken att bli en central del av skolmatematiken under en stor del av 1900-talet.

Läroboksförfattarens roll

Ett sista drag som är karaktäristiskt för Bergs läroböcker är att de i stor utsträckning är ett resultat av *anpassning*. Berg ställde sig genaste till efterrättelse, efter läroboksgranskningskommitténs utlåtande 1887 – något som påpekas på bokens titelblad; de följande upplagorna är hela tiden anpassade till något, om det så är en ny "normalplan", nya "kursplaner", en ny "organisation" eller nya "inträdesprövningar". Skolmatematiken som sådan kan i och för sig sägas ha tagit form som ett resultat av en anpassning till en mängd praktiska omständigheter. Men denna anpassning skedde som ett resultat av att lärare skrev läroböcker med utgångspunkt från sin egen erfarenhet. Den typ av anpassning som Bergs författarskap manifesterar är istället indirekt och så att säga "förmedlad". Berg förhåller sig till centralt utformade styrdokument, och senare till ett centralt reglerat system av institutioner. Dessa är i sin tur ett resultat av en process som det är tämligen svårt att överblicka. Berg tillhör den första generation läroboksförfattare som såg som sin uppgift att *implementera* idéer om undervisning uttänkta av någon annan.

Under 1880-talet gick den skolmatematiska diskussionens vågor höga. Som Harald Dahlgren skrev 1911 var det ett antal självständigt tänkande individer som möttes i denna diskussion.[1] De hade alla erfarenhet av undervisning, och med utgångspunkt från denna hade de flesta författat en egen lärobok som de använde i sin undervisning. Man får intryck av att de betraktade sig själva som *second-to-none* i fråga om matematikundervisning, med all rätt att ifrågasätta både metodiska anvisningar och kursplaner. Deras idéer var säkert ett resultat av anpassning, men väsentligen till vad de själva visste om undervisningens realiteter. Berg, och hans senare medförfattare, skrev inte med utgångspunkt från vad de *visste* utan med utgångspunkt från vad de *måste* skriva med anledning av centrala direktiv. Detta gör att de inte heller på samma sätt som 1880-talets diskutanter måste ta ansvar för lärobokens innehåll i förhållande till eleverna. Av förorden till Bergs läroböcker framgår att han skriver för lärare, som i sin tur vill måste följa direktiv. Det upprättas därmed ett avstånd mellan läroboksförfattandet, och skolmatematikens "riktiga" eller kanske "viktiga" frågor, kort sagt relationen mellan det eleverna gör i skolan och det de gör utanför skolan. Man kan tydligt se hur författarna av kursplaner i och med detta kan börja tala *om* läroböckerna, läroboksförfattarna kan börja tala *om* kursplanerna, och lärarna tala *om* både läroböcker, kursplaner och den skolans organisation som de måste anpassa sig till. I och med den förändrade författarrollen tas ytterligare ett steg mot skolan som den (autonoma) verklighet skolmatematiken är anpassad till. Det sker samtidigt som skolan blir ett utbildningssystem. Skolmatematikens roll i detta system står i fokus för kapitel 10 nedan. I nästa kapitel skall jag beskriva hur skolmatematiken förändrades under det att folkskolan sekulariserades, bildningstänkandet förlorade mark, och *vetenskapen* började ta plats i det svenska samhället.

En blick på undervisningen i räkning under första halvan av 1900-talet

I de förändringar som Bergs läroböcker genomgick kan man utläsa några tendenser hos skolmatematiken under 1900-talets första hälft. Som vi sett var boken ursprungligen utformad med tanke på elevernas sysselsättning – att den skulle låta eleverna räkna "på egen hand". Detta motiv till läroboksn utformning tappades tämligen omgående ur sikte. Istället börjar man tala om "räknefärdighet".[2] Bergs lärobok får 1902 en mer ändamålsenlig "löpande numrering" med detta nya syfte i åtanke, samtidigt som antalet uppgifter ökas. Tio år senare talar bokens då nytillkomne författare Karl Haglund om möjligheten att "driva" räknandet längre än vad många lärare enligt honom trodde var möjligt.[3] I detta skede nämns också ett nytt problem: hur exemplen skall "rättas", vilket pekar mot det framväxande examensväsende som jag skall berätta om i kapitel 10.

Även vid nästa växling av författare, då Elis Hjalmar tog vid 1930, ökades antalet uppgifter. Den här gången med det explicita syftet att göra boken till en hjälpreda vid förberedelsen inför utbildningssyste-

[11] Dahlgren, "Die Mathematik an den Volksschulen und volksschullehrerseminarien Schwedens," s. 11.
[2] Alfred Berg, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*, 12. uppl. utg. (Stockholm: Fritze, 1902).
[3] Alfred Berg och Karl Hagström, *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor* (Stockholm: 1911).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

mets examinationer. Här syns med andra ord tydligt en förskjutning av de många övningsuppgifternas syfte, från sysselsättning, till övning inför examinationer. I kapitel 10 skall vi se hur examinationerna inte bara ledde till ett intensifierat övande i klassrummen, utan också samspelade med synen på "kunskaper" och "lärande", vilka kom att allt mer förknippas med resultat på olika typer av mätningar.[1]

Några av de exempel som tillkom var enklare än de befintliga, och skulle fungera som en inledning. De som skulle förbereda inför examinationer var ofta tämligen svåra. De läroboksförfattare som tog över utgivningen av Bergs lärobok, tvekande inte att, med hjälp av de medel som stod till buds, göra uppgifterna krångliga. I de "obenämnda" uppgifterna var hans främsta redskap för att nå detta mål parenteser.[2] Henrik Petrinis beskrivning av dessa uppgifter i en uppsats 1905 är träffande: "ett sammelsurium af en massa bråkstreck öfver och under hvarandra och parenteser inuti hvarandra, alltsammans befolkadt med en heterogen blandning af bråk och decimalbråk".[3] Ändå hade han bara sett början – "fregatterna", som de ibland kallades,[4] blev allt större under 1900-talets lopp.[5]

En annan förändringstendens var en ökande differentiering mellan olika böcker, och olika kapitel inom böckerna, i samklang med den motsvarande ökande differentieringen inom utbildningssystemet – framför allt av olika "årskurser".

Sammantaget förstår jag dessa förändringstendenser huvudsakligen som en förlängning av den väg (lärogång) som skolmatematiken kom att utgöra. En förlängning kombinerad med ett mer exakt utstakande. Till början lades enklare uppgifter, till slutet svårare – och i mitten infogades fler uppgifter liknande de som redan fanns där. Eleverna fick i och med detta allt mer att göra i skolan – och vi skall se att en av de viktigaste frågorna under första halvan av 1900-talet var *bristen på tid*; lärarna kom att uppleva det som i det närmaste omöjligt att *hinna med* matematikkursen, så som den framträdde i kursplaner och läroböcker. I stor utsträckning låg den lärogång som Berg skapade kring mitten av 1870-talet fast ända fram till bokens sista upplaga.

8.5. Analys

Det här kapitlet har, som jag nämnde inledningsvis, två poänger. Den första är att den form den skolmatematiska undervisningspraktiken fick mot slutet av 1800-talet, och som sedan i stor utsträckning låg fast under första halvan av 1900-talet, huvudsakligen motiverades med utgångspunkt från undervisningens praktiska villkor – inte med utgångspunkt från överväganden rörande hur barn lär sig matematik. Till denna poäng hör att detta relativt omgående kom att glömmas bort under 1900-talets första decennier. Då kom denna praktik istället att tas för given, helt enkelt som det sätt på vilket man lär sig matematik. Det kom, kan man säga, att förankras i de objekt som den skolmatematiska undervisningen kretsade kring, vilket leder vidare till kapitlets andra poäng.

Matematikens blick

Den andra poängen är att det var under denna tid som matematikens blick av flera anledningar kom att utsträckas till en allt större del av det svensk samhället. De flesta av uppgifterna i Alfred Bergs lärobok utgör tillämpningar av Regula de Tri. De fördelar sig mellan de "räknesätt" som Zweigbergk gjorde till norm för skolmatematiken. Dessa konstituerar i sin tur ett antal olika serier av operationer som eleven måste behärska för att lösa uppgifterna. Berg har i viss mån, men inte helt, frångått det explicita rubricerandet av uppgifterna. Likväl kommer de i välkända grupper: ränteräkning, delningssräkning, blandningsräkning, kedjeräkning. Även det klassiska avsnittet om beskickning, som troligtvis var inaktuellt som handbokskunskap redan mot slutet av utgivningen av Roloff Anderssons räknelära, och givetvis fullständigt irrelevant 1877, hänger kvar ända fram till 1949, med uppgifter som

[1] Jag tänker till exempel på den syn på kunskap som syns i Edward L. Thorndike, *The psychology of arithmetic* (New York: Macmillan, 1922).
[2] Enligt Nordlund tog parenteser plats i läroböckerna under 1890-talet (Nordlund, *Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar*, s. V.).
[3] Petrini, "Matematiken i skolan."
[4] Tore Öberg, "Gymnasiets matematikkurs," *Elementa* (1970).
[5] I själva verket var det givetvis Haglund och Hjalmar som låg bakom denna utveckling.

549. Huru mycket främmande metall finnes i *a)* 36 g 14-lödigt silver, *b)* 1 kg 15-lödigt silver, *c)* 480 g silver, som håller 75 %, *d)* 70 g silver, som håller 63 %?[1]

Regula de Tri definierade med andra ord i stor utsträckning "vilken matematik" eleverna sattes att lära sig.

Detta system av tillämpningsmöjligheter applicerades på samma typer av illustrerande stoff som Zweigbergk, Nyström och flera andra använt tidigare. Arbetare gräver diken, hästar utfordras, löner fördelas. Delningsräkningen, som tidigare hette bolagsräkning eller ännu tidigare regula societatis, illustreras föga oväntat med hänvisning till ett bolag, som ett antal personer, A, B och C, har satsat pengar i. Även följande uppgift är typisk:

1 775. Om 3 kg bröd åtgå på 6 dagar i ett hushåll, bestående av 5 personer, huru många kg bröd böra då under lika omständigheter åtgå under 15 dagar i ett hushåll av 8 personer?

Ledning: Huru många kg åtgå per dag per person?[2]

Det är ett trivialt påpekande att den fixerade uppsättningen "möjliga" matematiska tekniker konstituerar en i allra högst grad begränsad uppsättning möjliga tillämpningar. De två funktioner som uppgiftslösandet skulle fylla – sysselsättning och övning inför examinationer – ledde till en upprepning in absurdum av variationer inom de teman som användandet av proportionalitet möjliggjorde.

För att återknyta till mitt övergripande teoretiska ramverk innebar detta att matematiken, användandet av de matematiska teknikerna, om och om igen knöts till verkligheten utanför skolan. Bara på det uppslag från vilket det ovanstående exemplet är hämtat talas för övrigt om: pris av kvicksilver, hur lång tid det tar att färdas en viss sträcka, att bereda smör av mjölk, arbetares löner, hur långt en häst hinner på en viss tid, hur långt en gosse hinner på en viss tid, priset på kaffe, byte av tyg mot andra varor, priset på "band", hur mycket väv som kan vävas av en viss mängd garn, garnnystans vikt, gemensamma tyginköp (delningsräkning), underhåll av hästar, åtgång av hästfoder, åtgång av utsäde, lastning av järnvägsvagnar, järnkubers vikt, arbetares löner (igen), åtgång av bröd (uppgiften ovan), och byggande av en mur.[3] Genom dessa "tillämpningar" framställdes matematiken som en del av verkligheten. Men den "tillämpning" det är fråga om är blott skenbar. Problemen som löses i räkneböckerna, uppstår sällan, om ens någonsin, i praktiken. Och när de uppstår, är det nästan alltid andra svar som sökes än de som lärobokens tillämpning av matematik resulterar i. Och om någon gång det "matematiska" svaret faktiskt efterfrågades, så är det likväl otroligt att de omständigheter (papper, penna, tid) skulle finnas till hands som hade möjliggjort det lösningssätt som man lär sig i skolan.

Den skolmatematiska diskussionen under 1900-talet var fullständigt impregnerad av insikten om hur ypperligt meningslöst det räknande som Bergs läroböcker kräver är, betraktat med utgångspunkt från livet utanför skolan (bortsett från betydelsen av examina).[4] Denna insikt hängde emellertid genomgående samman med åtskillnaden mellan å ena sidan den allmänbildande nödvändiga matematiken och å andra sidan det (felaktiga) sätt på vilket denna matematik hanterades i skolan.

Min tes är, enkelt uttryckt, att matematiken framstår som allmänbildande, just på grund av bland andra Alfred Bergs framställningssätt. Matematiken är allmänbildande bara i den mån den kan knytas till verkligheten utanför skolan, men detta är i sin tur bara möjligt i den mån man gör våld på denna verklighet, och beskriver den med utgångspunkt från de begränsade möjligheter som elementära matematiska tekniker erbjuder. Övergången från matematik som något partikulärt – om det så är en esoterisk vetenskap eller en uppsättning tekniker för specialister – till ett generellt allmänbildande redskap, *kräver* den distorsion som övningsuppgifterna manifesterar. Till detta kommer emellertid att distorsionen – uppgifternas icke-överensstämmelse med verkligheten – bara är synlig i den form den har antagit i själva uppgifterna. Vad som undgår kritikerna – och som jag vill lyfta fram – är hur deras kritik faktiskt utgår från en symbolisk identifikation med den "distorderade" verklighet som uppgifterna presenterar. Själva kritikens form är ett bevis på att striden redan är över – och att uppgifterna är segrare: bakom kritikernas rygg, under deras tid

[1] Bernhard Alfred Berg och Karl Hagström, *Räknelära för allmänna läroverk och flickskolor.: Förberedande skolans kurs. Utarb. av Elis Hjalmar. Med svar.* (Stockholm: 1934), s. 56.
[2] Bernhard Alfred Berg, *Berg-Hagström: Räknelära för allmänna läroverk och flickskolor. Tillägg till Berg-Hagström: Räknelära.: Andra delen. Av Elis Hjalmar. Med Svar.* (Stockholm: 1949), s. 123.
[3] Ibid., s. 122-23.
[4] En relativt grundlig samtid analys av denna typ av uppgifter finns i Guy Mitchell Wilson, *Teaching the new arithmetic*, 2nd utg., *McGraw-Hill series in education* (New York: McGraw-Hill, 1951), s. 388-91.

i skolan, planterade uppgifterna den allmänbildande matematiken i deras verklighet. Den verklighet skolmatematikens kritiker utgår från är med andra ord redan impregnerad av skolmatematikens blick – kvicksilver, tid, sträcka, smör, mjölk, löner, kaffe, tyg, garn, etc. – de har redan blivit beströdda med matematikens trolldamm, så alla *vet* att matematiken finns där ute.

9. Matematiken, barnet och vetenskapen

Det här kapitlet har två delar. Den första delen handlar om hur synen på matematik och vetenskap förändrades kring sekelskiftet 1900. Från att ha förknippat matematik med bildning förlorade bildningstänkandet nu mark, och istället tog en annan syn på matematiken plats – inom vilken den istället förknippades med vetenskapen och den vetenskapliga metoden. Jag illustrerar detta skifte med några textexempel hämtade från en internationell kontext, och visar sedan vad det fick för konsekvenser för den svenska skolmatematiska diskusisonen relaterad till läroverket. Förenklat kan man säga att denna diskussion utgör en läroverkets motsvarighet till den diskussion knuten till folkskolan som jag beskrev i det förra kapitlet. Fokus flyttades från bildningsmålet till studier som skulle förbereda för det praktiska livet, under det att det gängse matematiska stoffet och de gängse undervisningsmetoderna, på ungefär samma sätt som många gånger tidigare, utsattes för hård kritik. En process inleddes genom vilken undervisningen i aritmetik kom att bli mer fokuserad på "ekvationer", undervisningen i algebra blev mer inriktad på funktioner och grafisk framställning, försök gjordes att anpassa den geometriska geometrin såväl till barnets ståndpunkt som till den matematiska vetenskapens framsteg.

Kapitlets andra del handlar om den del av den skolmatematiska diskussionen som kretsade kring undervisning av barn. Även inom denna sfär skedde kring sekelskiftet 1900 betydelsefulla förskjutningar i sättet att tänka. Utanför Sverige började man på flera håll anlägga ett "vetenskapligt" perspektiv på barnet och den grundläggande undervisningen. Dessa vetenskapliga studier hängde samman med ett allmänt ökande fokus på barnens *handling* – man talade om arbets- eller aktivitetspedagogik. Jag skall dock visa att dessa förändringar påverkade den svenska skolmatematiska diskussionen i relativt liten utsträckning. Det sätt på vilket man talade om grundläggande undervisning i matematik under 1900-talets första decennier har stora likheter med hur man talade om denna undervisning under andra halvan av 1800-talet.

9.1. Matematiken och vetenskapen

Internationellt perspektiv

I kapitel 3 beskrev jag hur det från och med publikationen av Newtons *Principia* 1687, särskilt i England upprättades ett band mellan Gud, människan och matematiken. Efter att ha tagits för givet i ungefär 150 år kom detta band att lösas upp under andra halvan av 1800-talet. Historikern Joan L. Richards skriver att det var strax efter publikationen av Darwins *On the Origin of Species* (1859), som "the absolute truth of Euclidean geometry, the seemingly impregnable mathematical wall against agnosticism and doubt, was challenged".[1] Avgörande roller i denna utveckling spelade matematikerna Bernhard Riemann och David Hilbert. Riemanns habilitationsskrift "Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen" (1854, publicerad 1868) satte igång en rörelse som ledde fram till Hilberts *Grundlagen der Geometri* (1899).[2] I och med detta förflyttades den euklidiska geometrin definitivt från den vetenskapliga matematikens domäner. Den blev därmed i det närmaste uteslutande ett undervisningsämne.

Bandet mellan Gud och matematiken förutsatte en väsentligen statisk matematik som genom sina eviga lagar speglade människans rationalitet och naturens väsen. Nu framträdde istället en bild av den matematiska vetenskapen som stadd i förändring.

[1] Richards, "God, truth, and mathematics," 72.
[2] David Hilbert, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig: Teubner, 1899); Bernhard Riemann och Hermann Weyl, *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen* (Berlin: Springer, 1919 [1854, 1868]).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Kunskap och tro

I England hade man fäst stor vikt vid de matematiska sanningarnas karaktär av att vara "oundvikliga", och likheten mellan själva upplevelsen av dessa sanningar – känsla av insikt och förståelse – och känslan av gudomlig uppenbarelse. Ett illustrativt exempel på den nya syn på insikt som nu tog form är Charles Sanders Peirce uppsats "The fixation of belief".[1] Han argumenterar där för att man bör dra en skarp gräns mellan å ena sidan den *känsla av att veta* som då och då kan drabba oss, och å andra sidan sanningen. Han skriver:

> It is true that we do generally reason correctly by nature. But that is an accident; the true conclusion would remain true if we hade no impulse to accept it; and the false on would remain false, though we could not resist the tendency to believe in it.[2]

Konsekvenserna av detta resonemang är förödande för synen på matematiska bevis som verktyg för att forma tänkandet. Bevisens karaktäristiska drag är just att de upplevs som oundvikliga. Peirce säger nu att denna upplevelse inte alls är någon garanti för sanning.

Peirce var en av de första som betraktade slump som en oundviklig del av själva verkligheten.[3] Sanning – om verkligheten – var därmed för honom alltid en fråga om sannolikhet. Han var en del av en rörelse som kallas *pragmatismen*, och menade att tal om sanning alltid måste knytas till ett praktiskt förlopp, ett experiment, för att ha mening.[4] I och med detta gjorde han en tydlig åtskillnad mellan å ena sidan en subjektiv upplevelse förståelse, och å andra sidan "objektiv" kunskap om hur det verkligen ligger till.[5]

Med utgångspunkt från denna syn på verkligheten begränsade Peirce den matematiska vetenskapens anspråk. Han skrev att matematiken är den vetenskap som "drar nödvändiga slutsatser", men att detta bara är möjligt på grund av att den utgår från "rena" hypoteser som till sitt väsen är skiljda från verkligheten. Matematikern utgår, skriver han, från en idealiserad beskrivning av verkligheten, och "its necessary character is due simply to the circumstance that [its subject] is a diagram of our own creation, the conditions of whose being we know all about".[6] Det rör sig här om en sorts webersk avtrollning av matematiken. Från att ha varit sammanvävd med Gud och verkligheten, blir den i Peirce beskrivning knappt mer än ett formellt system för att dra slutsatser inom vissa tämligen snäva ramar.

Jag tycker att det är fascinerande hur lik Peirce beskrivning av matematikens natur är de beskrivningar som var gängse innan 1600-talets uppvärdering av matematiken som vetenskap. Historikerns Peter Dear, som jag citerade flera gånger i kapitel 3, tillmäter Isaac Barrow en central roll i matematikens vetenskapliggörande.[7] Då han var verksam kring mitten av 1600-talet tog matematiken plats i stor utsträckning som en garant för sanning i strid mot hotande skepticism och ateism. Det intressanta är att Barrow menade att man kunde resa anspråk på att nå säker kunskap inom matematiken, just på grund av att matematiken var en mänsklig skapelse. Mot slutet av 1600-talet blev det allt vanligare att påståenden om matematik betraktades som påståenden om verkligheten "så som den är" – utan inblandning av något mänskligt skapande moment. Det var just detta som många av de kritiker till naturvetenskapernas matematisering som Yves Gringas tar upp i sin artikel "What did mathematics do to physics?" reagerade mot.[8] De kunde inte acceptera matematikernas anspråk på att tala om naturen.[9] Med Peirce blev matematiken åter en mänsklig skapelse. Därmed kan man avgränsa en sorts matematikens epok, från slutet av 1600-talet till slutet av 1800-talet, då matematiken sågs som sammanvävd med såväl religion som naturvetenskap. Epoken tar slut kring sekelskiftet 1900, samtidigt som religionen lösgörs från den offentliga skolan.

[1] Charles Sanders Pierce, "The fixation of Belief," i *Pragmatism. The classic writings*, red. H. S. Thayer (Indianapolis/Cambridge: Hackett publishing company, [1877] 1970).
[2] Ibid., 64.
[3] Se Ian Hacking, *The taming of chance, Ideas in context, 17* (Cambridge: Cambridge University Press, 1990), 200-15.
[4] Charles Sanders Peirce, "How to make our ideas clear," i *Pragmatism. The classic writings*, red. H. S. Thayer (Indianapolis/Cambridge: Hackett publishing company, [1878] 1970), 88-91.
[5] Denna ambition till åtskilnad fick ett inflytelserikt uttryck av Karl Pearson i hans *The grammar of science* (1892), och senare i de logiska empiristernas försök att bygga upp en ny systematisk kunskap om världen.
[6] Charles Sanders Peirce, "The nature of mathematics," i *Philosophical writings of peirce*, red. Justus Butler (New York: Dover publications inc., [1898] 1970), 138.
[7] Dear, *Discipline & experience*, 220-43.
[8] Gringas, "What did mathematics do to physics?"
[9] T. ex. Ibid.: 401.

Vetenskap som religion

Samtidigt som bildningstänkandet och religionen förlorade, fick vetenskapen en allt starkare ställning kring sekelskiftet 1900. Vetenskapens talesmän ville gärna framställa denna förändring som en rörelse från en mängd olika sorters vidskeplig tro, till empiriskt grundad objektiv kunskap. Faktum är dock att vetenskapen i många avseenden framställdes i det närmaste som en ny religion.

Särskilt tydligt är detta i Karl Pearsons *The Grammar of science* (1892), som fick stort inflytande.[1] I centrum för denna bok står den "vetenskapliga metoden", vilken han beskriver som

> the careful and often laborious classification of facts, in the comparison of their relationships and sequances, and finally in the discovery by aid of the disciplined imagination of a brief statement or *formula*, which in a few words reumes a wide range of facts. Such a formula, we have seen, is termed a *scientific law*. The object served by the discovery of such lars is the economy of thought ; the suitably association o sonceptions drawn from stored sense-impressions, permits the fitting exertion to follow with the minimum of thought upon the receipt of an immediate sense-impression. The knowldge of scientific law enables us to replace or supplement mechanical association, or instinct, by mental association, or thought.[2]

Pearson såg denna metod som ett sätt att frigöra sig inte minst från det tidigare bildningstänkandet. På en rad punkter står det dock klart att den vetenskapliga metoden han beskriver, åtminstone vad gäller skolan leder till undervisningspraktiker snarlika de som tidigare motiverades med hänvisning just till deras bildande egenskaper.

Pearson skriver att "Modern Science, as training the mind to an exact and impartial analysis of facts, is an education specially fitted to promote sound citizenship".[3] Det är den vetenskapliga metoden han syftar på här, och han beskriver den som en träning för tänkandet, vilken, precis som det bildande arbete som tidigare förknippades med klassiska språk och geometri, gör människor till goda medborgare. Han menade att den vetenskapliga metoden skulle placeras i centrum för den obligatoriska skolan, för att på så sätt träna de blivande medborgarna i det vetenskapliga sättet att tänka.[4] De skulle på så sätt lära sig fatta objektiva, det vill säga korrekta, beslut, grundade i fakta – till samhällets fromma.

Precis på samma sätt som bildningstänkandets talesmän gjorde tidigare, betonar Pearson att det är *metoden* och inte det partikulära innehåll som studeras, vilket utgör den goda formande kraften. Det är, skriver han, mycket bättre att elevens uppmärksamhet koncentreras på "a small range of phenomena" än om han leds till en ytlig kunskap "over wide fields of knowledge".[5] Även i detta avseende finns uppenbarligen en klar parallell till exempelvis Pestalozzi, som ju betonade vikten av att begränsa kunskapsstoffets mängd och istället ta sig an ett litet material på ett grundligt sätt.

Resultatet av en tillämpning av den vetenskapliga metoden beskriver Pearson som en "konstruktion" av den yttre verkligheten.[6] Det fascinerande är att Pearson, trots att ett av hans viktigaste syften är att kritisera idealismen, här skapar en metafysik som är tämligen snarlik till exempel Fichtes, så till vida att han ser den "yttre världen" som helt och hållet ett resultat av hur den föreställs i tänkandet, och att han tillmäter det största vikt att detta föreställande "följer en regel", i Pearsons fall den vetenskapliga metoden.[7]

På ett sätt helt snarlikt hur man i England tidigare uppfattat de euklidiska bevisens kraft att tvinga tanken som den egenskap genom vilken de stod i förbindelse till den religiösa uppenbarelsen, skriver Pearson att ett av vetenskapens kännetecken är just dess förmåga att tvinga de rationella tänkandet att acceptera dess slutsatser.[8]

Likheterna med bildningstänkandet gäller även det sätt att relatera till verkligheten som Pearson föreslår. Här spelar nämligen mätning en central roll. Mätandet kom för övrigt från och med början av 1900-talet att inta en mer central plats i den svenska skolmatematiska diskussionen. Det finns ett tydligt band mellan detta fokus på insamlande av erfarenheter, och Pestalozzis bildningstänkande. Pearson talar till och med om "linjer och ytor" på ett sätt mycket snarlikt hur man i Pestlozzis efterföljd, i den svenska skolmatematiska diskussionen under 1800-talet talade om "åskådningsgeometri".[9]

---

1 Karl Pearson, *The grammar of science*, New utg. (Gloucester,Mass.: 1957 [1892]).
2 Ibid., 78.
3 Ibid., 9.
4 Ibid., 28.
5 Ibid., 7, not 1.
6 Ibid., 82.
7 Jag syftar här på det Fichte skriver i Fichte, *Tal till tyska nationen*, 33,107.
8 Pearson, *The grammar of science*, 10, 78.
9 Ibid., 197.

Den vetenskapliga metod Pearson beskriver är i grunden induktiv. Den består i ett man "utgår från sinnesintryck", vilka man samlar in och klassificerar. Med hjälp av sitt rationella tänkande går man därifrån till allt mer generella, sammanfattande beskrivningar av dessa. Mot bakgrund av kapitel 7 ovan, kan vi se att det han beskriver i skolmatematiska termer tämligen exakt motsvarar den heuristiska metoden.

Pearson introducerade den vetenskapliga metoden som ett medel att förbättra samhället, genom att med dess hjälp få alla medborgare att fatta objektivt riktiga beslut. Det kan nämnas att den viktigaste slutsats med relevant för samhället som Pearson själv drog med utgångspunkt från sin vetenskapliga metod rörde fattigvårdens relation till ärftlighetslära, två ämnen hans egen statistiska och sannolikhetsteoretiska forskning i stor utsträckning kretsade kring. Pearson var socialdarwinist, och menade att de som var framgångsrika i samhället, var detta i kraft av sina bättre anlag. Han menade att samhällets skulle fördela sina resurser med tanke på samhällets fortsatta evolution, och att det därför var helt förkastligt att så att säga slösa bort dem på de skikt inom samhället som uppenbarligen inte hade något att tillföra, utan istället utgjorde en belastning.[1] På ungefär samma sätt som tomheten i Descartes vetenskapliga metod visar sig i samma ögonblick som Descartes skall exemplifiera dess tillämpning, visar sig de obehagliga konsekvenserna av att lägga den vetenskapliga metoden till grund för "medborgarskap" redan i den första samhälleligt betydelsefulla slutsats Pearson drar i *The Grammar of Science*.

Internationell forskning om skolmatematik

Under 1900-talets första decennier tog en verksamhet form i USA inom vilken man försökte ge skolmatematiken en vetenskaplig förankring. En viktig roll i denna rörelse spelade Edward Thorndikes *The psychology of arithmetic*.[2] En något senare viktig bok är Guy M. Wilsons *Teatching the new arithmetic*.[3] I båda böckerna presenteras, mot bakgrund av nya "vetenskapligt förankrade" teorier om barnet och kunskapens natur, en skarp kritik mot den gängse skolmatematiken.[4]

Rörande kritiken kan man dock notera att den hade stora likheter med den typ av kritik som jag gav exempel på i kapitel 7 och 8. Möjligen var de amerikanska forskarna något mer kategoriska i sin förkastelsedom.

Karaktäristiskt för de nya teorierna är att de i stor utsträckning gav stöd åt just de praktiker som tidigare syftat till bildning. I synnerhet gäller detta Thorndikes teori om kunskaper.

Nyheter introducerades emellertid också. En viktig sådan nyhet var idén att låta eleverna inte som tidigare blott med papper och penna (eller griffel och tavla), som jag beskrivit i tidigare kapitel "simulera" verklihgeten utanför skolan. Nu försökte man flytta verkligheten in i skolan på ett mer radikalt sätt, till exempel genom att låta barnen "leka affär".[5]

Den svenska diskussionen

På ett övergripande plan kan man säga att en ny epistemologi tog form kring sekelskiftet 1900 inom vilken vetenskapen stod i centrum. Detta var en *ny* vetenskap så till vida att den var sekulär, professionell, och till sitt väsen stadd i förändring. I och med detta förändrades radikalt relationen mellan vetenskap och skola. Bo Lindberg beskriver förändringen med formeln "från *bildning till utbildning och forskning*".[6] Tämligen komplicerat att förstå är hur matematiken å ena sidan kontinuerligt får växande betydelse i skolan under såväl 1800-talet som första halvan av 1900-talet, men hur matematikens innebörd samtidigt förändras. Den närmar sig skolans och samhällets centrum, men när den väl är där, är den i centrum av något annat än det som den tidigare rörde sig inom. Man kan särskilja tre aspekter av det som matematiken delvis redan 1900 var en del av, delvis var på väg att bli en del av.

För det första betraktades matematiken som en del av en professionell matematisk vetenskap, helt skild från skolan. En viktig konsekvens av detta blev att den bildande funktion som under 1800-talet hade börjat tillskrivas de matematiska studierna, hamnade i en problematisk dager. De professionella matematikerna kom nämligen att betrakta skolmatematiken med betydande skepsis.

---

[1] Ibid., 25-28.
[2] Thorndike, *The psychology of arithmetic*.
[3] Wilson, *Teaching the new arithmetic*; Wilson, *What Arithmetic Shall We Teach?*
[4] Wilson, *What Arithmetic Shall We Teach?*
[5] Wilson, *Teaching the new arithmetic*, 353-415. Att inte heller denna handlingsbaserade simulering ledde till de praktiskt nyttiga kunskaper de syftade till att förmedla visas i Walkerdine, *The mastery of reason: cognitive development and the production of rationality*.
[6] Bo Lindberg, *Humanism och vetenskap: den klassiska filologien i Sverige från 1800-talets början till andra världskriget, Lychnos-bibliotek, 37* (Grillby; Stockholm: Lärdomshistoriska samf.; Almqvist & Wiksell International distributör, 1987), 232.

För det andra kom matematiken att förknippas med praktisk nytta. Detta andra mål, som under 1800-talet ofta placerats i skuggan av bildningsmålet, blev nu, i synnerhet vad gällde de övre delarna av den offentliga skolan, ibland betraktat som de matematiska studiernas *enda* mål.[1]

För det tredje kom matematiken att betraktas som ett instrument för att mäta viktiga mänskliga egenskaper. Jag tar upp denna aspekt i kapitlets avslutande analys. Den står sedan i fokus för kapitel 10.

Läroverkskommitténs betänkande

Som vi såg i förra kapitlet gick den skolmatematiska diskussionens vågor höga under 1880-talet. Ett av de meningsutbytena jag beskrev[2] – det mellan K. P. Nordlund och Birger Rollin – ägde rum något senare, under 1890-talet. Till skillnad från de övriga, hade detta en tydligare anknytning till läroverket. Detta tycks inte vara någon slump. Det var folkskollärarna som var först med att föra en öppen kritisk diskussion rörande skolmatematiken, framför allt, som vi sett, i *Svensk Läraretidning*. En motsvarande diskussion rörande den matematiska undervisningen i läroverket blommade upp något senare, under 1900-talets första decennium.

1902 blev den 1899 tillsatta kommittén för "utredning af vissa frågor rörande de allmänna läroverken" färdig, och i detta presenterades ett antal förslag som väckte reaktioner.[3] Dessa reaktioner kom huvudsakligen från läroverkslärare som kände sig mer hemma i universitetsmatematiken än med den matematik som undervisades vid läroverken. Flera av dem var kritiska, och som samlande beteckning på kritikens föremål använde de termen *skolmatematik*.[4] Det var vid denna tidpunkt som denna term började användas mer allmänt.

I fokus för 1880-talets kritiska diskussion av skolmatematiken – vilket fördes huvudsakligen av individer knutna till folkskolan – stod Regula-de-Trins regler och den "mekaniska" räkning man menade att dessa regler resulterade i. Undervisningen i läroverket högre klasser kretsade kring algebra och euklidisk geometri, snarare än Regula de Tri. Inte desto mindre var den kritik som riktades mot denna undervisning ganska lik den som riktades mot undervisningen i folkskolan (och läroverkets första klasser). *Regler* framställdes av läroverkskommittén som roten till mycket av det onda. Här emellertid algebrans regler snarare än aritmetikens.

Undervisningen i algebra hade kring sekelskiftet 1900 en form som i stor utsträckning lades fast genom den våg av skolmatematiska läroböcker som kom kring 1840, framför allt E. G. Björlings *Elementar-lärobok i algebra* från 1832.[5] I och med denna bok avstannade en process som (vad gäller svenska förhållanden) inleddes av Celsius och Palmqvist kring mitten av 1700-talet, och sedan gick till Björling via Nils Petter Beckmark och Olof Forsell, vilka skrev läroböcker i algebra kring sekelskiftet 1800.[6] Karaktäristiskt för den lärogång som blev resultatet av denna process, är att den huvudsakligen uppehåller sig vid algebrans "grunder", det vill säga räkning med bokstäver, och först avslutningsvis når fram till användandet av algebra för att lösa "verkliga" problem.

Läroverkskommitténs första ärende vad gällde realskolans matematikkurs, var att ändra på denna lärogång. Som ett viktigt problem betraktades nämligen att många av eleverna vid läroverket avbröt sina studier innan de ens hunnit komma fram till bokstavsräkningens tillämpning. Den färdighet i manipulation av algebraiska uttryck de vunnit under år av övande, blev därmed, menade man, tämligen värdelös efter det att de slutat skolan. Och än värre blev situationen, skrev kommittén i sitt betänkande, i och med att denna övning på bokstavsräkning, under de sista skolåren tagit all tid från övning på *aritmetik* – vilket gjorde att lärjungarna hann glömma bort det som de lärt sig i folkskolan och läroverkets första klasser.[7] När de kom ut hade de därför en ytterst liten behållning, menade läroverkskommittén, av skolans mate-

---

1 Ett tydligt exempel på ett sammanhang där den matematiska undervisningen uteslutande skulle leda till praktiskt nyttiga kunskaper är de praktiska fortsättningsskolorna som inrättades 1918.

2 [OBS: Detta avsnitt finns inte med i den här versionen av avhandlingen.]

3 Läroverkskommittén, *Betänkande afgifvet den 8 december 1902 af den för utredning af vissa frågor rörande de allmänna läroverken den 26 maj 1899 i nåder tillsatta kommitté.*

4 Olof Josephson, "Till frågan om gymnasiets matematikkurser.," *Pedagogisk Tidskrift* (1905); Petrini, "Matematiken i skolan."; Agne Wahlgren, "Om kurserna i matematik på latingymnasiet," *Pedagogisk Tidskrift* (1905).

5 Björling, *Elementar-lärobok i Algebra*.

6 Celsius, *Arithmetica Eller Räkne-Konst*. Palmqvist, *Inledning til algebra (I-II)*. Beckmark, *Utkast*. Forssell, *Algebra för Begynnare*.

7 "Korteligen, lärjungen, som på det ifrågavarane skolstadiet lämnar läroverket, har i allmänhet icke nått till en god och användbar kunskap vare sig på det aritmetiska eller det algebraiska området, och särskildt torde han sakna den fasta insikt i vanlig aritmetik och den praktiska räknefärdighet, som ute i lifvet äro honom af största gagn" (Läroverkskommittén, *Betänkande afgifvet den 8 december 1902 af den för utredning af vissa frågor rörande de allmänna läroverken den 26 maj 1899 i nåder tillsatta kommitté*, s. 148-49.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

matikundervisning. Även bortsett från det faktum att många lärjungar avbröt studierna i förtid var man kritisk till det rådande sättet att studera algebra. Man skrev:

> Öfver huvud taget kan ifrågasättas, huruvida icke det tvååriga öfvande af ren bokstafsräkning, som nu förekommer, allt detta jämförelsevis innehållslösa och mekaniska arbete med transformering af algebraiska uttryck, ofta vida mer invecklade än de, med hvilka lärjungen under sina senare studier får anledning att taga befattning, i någon mån innebär ett öfverskattande af den formella färdighetens värde. Visst är, att den färdigheti bokstafsräkning, som däraf kan erhållas, är af tvifvelaktigt värde, om den icke vunnits i förning med verklig insikt i den algebraiska räkningens betydelse.[1]

Kommittén betraktade övandet som "tomt" och "formellt", vilket gjorde det meningslöst. Det som saknades var, menade man, anknytningen till matematikens praktiska användning.

Man kan här se en tydlig likhet med diskussionen rörande folkskolans matematikundervisning under 1880-talet. Mot det formella, "rena", bokstavsräknandet ställde nämligen kommittén en undervisning som skulle leda till vana "vid behandling af praktiska räkneuppgifter", en undervisning som var mer "enhetlig" och vad gällde det matematiska stoffet mer begränsad, och som därmed skulle göra det möjligt för eleven att känna sig "hemmastadd", och genom övning bli förtrogen med stoffet.[2] Denna ambition till begränsning och förtrogenhet visar på en rörelse inom läroverket mot en förenkling av skolmatematiken som förde den allt närmare folkskolan. Läroverkskommittén föreslog helt enkelt att uppgifterna skulle göras lättare. Är uppgifterna för svåra, menade man, kan lärjungen inte lösa dem annat än "genom ett mekaniskt användande af gifna räkneregler", vilket leder till "osäkerhet och gör honom modlös och ointresserad".[3] Framför allt var det, menade man, viktigt att algebran hölls samman med aritmetiken och dess praktiska räkneuppgifter.

Medlet att förena dem såg läroverkskommittén i *ekvationsläran*. Det finns en slående likhet mellan hur läroverkskommittén argumenterade för denna ekvationslära, och hur argumentationen tidigare gått rörande folkskolans räkneundervisning. Den gemensamma nämnaren är ambitionen att till varje pris undvika alla typer av regler. Lärjungarna skall, skriver man, "på ett långsammare och omärkligare sätt för[as] in i algebran". Metoden skall, "såsmåningom framgå ur hans eget arbete".[4]

I rätt stor utsträckning kan skolmatematikens förändringar under 1800-talet och början av 1900-talet förstås som en serie försök att "domesticera" först och främst den allt för praktiska och irrationella räknekonsten, men å andra sidan även den allt för abstrakta matematiska vetenskapen. Man försökte ge skolmatematiken en form som kunde framstå som anpassat till skolmatematikens mål, och samtidigt på en praktisk nivå passade barnet och undervisningens förutsättningar.

Nyströms "enhetsmetod" för lösning av Regula-de-Triuppgifter kan ses som ett tidigt sådant försök. I och med detta togs ett första kliv från räknekonsten som praktiskt användbar teknik (för vuxna), inom vilken till exempel Praxis Italica spelade en viktig roll, mot räknekonsten som ett föremål för barnarbete i skolan.[5] Enhetsmetoden framstod som ett logiskt och systematiskt sätt att lösa Regula-de-Triproblemen, men i första hand med utgångspunkt från skolan och undervisningen. Historien förtäljer inte om enhetsmetoden någonsin kommit till användning utanför skolan.

Redan 1849 argumenterade Johan Otterström för att räknekonsten borde ersättas genom att algebra introducerades mycket tidigt i den aritmetiska undervisningen. Han gav dessa tankar ett koncist uttryck i skriften *Till skolbildningens upplyste vänner* som kom ut 1880.[6] Även om ingen av hans läroböcker blev särskilt populära, fick hans idéer stort inflytande.[7] De kan ses som ytterligare ett försök att ge räknekonsten en mer logisk struktur.

Mot slutet av 1800-talet kom "ekvationsläran" som man kallade det (i motsats till algebra) att vinna mark. Intressant nog var det i första hand med utgångspunkt från skolmatematikens interna problem som ekvationsläran framstod som mest lockande, nämligen som ett sätt att slippa från de många räknesätten, vilka vid denna tid framstod som tämligen uppenbart meningslösa och föråldrade – i synnerhet som det

---

1 Ibid., s. 149.

2 [sida?]

3 Läroverkskommittén, *Betänkande afgifvet den 8 december 1902 af den för utredning af vissa frågor rörande de allmänna läroverken den 26 maj 1899 i nåder tillsatta kommitté*, s. 150-51.

4 Ibid., s. 151.

5 Nyström, *Räknelära för fruntimmer: Omsl.: Med åtföljande särskildt häftad facitbok.* Angående Praxi Italica, se ovan [s. X] samt Andersson, *Arithmetica Tironica*, 85.

6 J. Otterström, *Till skolbildningens upplyste vänner* (1880).

7 Se även Dahlgren, "Die Mathematik an den Volksschulen und volksschullehrerseminarien Schwedens," 12.

nu inte längre var gångbart att betrakta dem som "bildande".[1] I ett referat från ett av pedagogiska sällskapet i Stockholms förhandlingar 1895 kan man läsa att "de flesta torde aldrig ha räknat någon sammansatt reguladetri, sedan de lämnat skolan".[2] Utifrån skolmatematikens perspektiv framstod ekvationsmetoden som ytterligare ett steg i den utveckling som jag skissade ovan, genom vilken skolmatematiken rörde sig bort från såväl den allt för praktiska räknekonsten och den allt för abstrakta matematiken.[3]

Med utgångspunkt från positioner utanför skolmatematiken tedde sig emellertid ekvationsmetoderna som föga användbara. Det var trivialt att påpeka att man inte behövde ekvationer för att lösa det praktiska livets uppgifter.[4] Även om ekvationsmetoden under 1900-talets första sekler fick större spridning, kom den därför aldrig att betraktas som en tillfredställande lösning på skolmatematikens problem.

Kritik mot läroverkets undervisning i aritmetik och algebra

Den svenska diskussionen rörande läroverkets matematikundervisning var under 1900-talets första decennier kraftigt influerade av Tyskland, där bland andra matematikern Felix Klein kommit med förslag till en grundläggande reformering av skolmatematiken.[5] Läroverksläraren Edvard Göransson spelade en viktig roll för att introducera dessa idéerna i Sverige.[6] Deras främsta kännetecken var en uppvärdering av den matematiska analysen, eller "funktionsläran" som man kallade den.[7] Göransson föreslog att funktioner och koordinatbegreppet skulle få en större plats i undervisningen, och menade att det var helt otroligt att man, så som undervisningen nu bedrevs, inte lät lärjungarna "upprita de få typer av kurvor, som vid de i skolan hittills behandlade problemen rörande maxima och minima kunna komma i fråga".[8]

Här skall jag ge några exempel på den kritik som, med den matematiska vetenskapen som utgångspunkt, riktades mot skolmatematiken vid denna tid. En av skolmatematiken skarpaste kritiker av Henrik Petrini. Han menade att de matematiska kurserna i läroverket var "bedröftligt små i jämförelse med andra länders".[9] Jag citerade hans förklaring till detta i förra kapitlet, nämligen att matematiken introducerades i läroverkets huvudsakligen som ett instrument för att förhindra att läroverkets "rötägg" "slog dank" när resten läste latin.[10] Därmed blev kursens omfång av underordnad betydelse – en underordning som fick stöd i synen på matematiken som instrument för bildning.

Petrini var även kritisk mot den särskilda "skolmatematiska" terminologi och formalism som vuxit fram. Han ondgjorde sig över parentesräkning och bråkräkning, och över att "småbarnen ej få använda samma multiplikationstecken som äldre".[11] Petrini menade dock att det värsta var "den ohyggligt dumma logaritmdrifningen med olika baser".[12]

Han tillmätte inte den strävan efter "grundlighet" som vi sett karaktäriserade skolmatematiken något som helst värde, utan betraktade den istället som en nödvändig följd av kravet att eleverna skulle kunna hantera lärarnas "invecklade och snärjande exempel".[13] Ekvationsläran har, skrev Petrini: "urartat till en samling inkrånglade räknegåtor, som framställas med pretention på att vara praktiska uppgifter".[14] På det hela taget menade han att matematiken i skolan hade "urartat till ett tankedödande mekaniskt innötande af regler i stället för att vara det mest tankeutvecklandet ämne som finns".[15]

Även proportionsläran, ett av de matematiska "ämnen" som A. T. Bergius förespråkade på 1860-talet för att göra skolmatematiken *mer* vetenskaplig, fick nu möta skoningslös kritik från matematikerhåll. Lektorn P. G. Laurin skrev att: "I intet annat land har i skolan så mycken tid och så mycket arbete förspillts på denna, ingenstädes ha så många kvasivetenskapliga framställningar däraf fabricerats".[16] Petrini

---

[1] Se Wahlgren, "Om kurserna i matematik på latingymnasiet," 66.
[2] A.;m. fl. Lindhagen, "Räkneundervisningen," *Svensk Läraretidning* (1895): 578.
[3] Otto Gallander, "Om lösning af reguladetriuppgifter medelst ekvationer," *Skolan*, no. 1 (1901).
[4] P. G. Laurin, "Är skollagskommitténs förslag rörande den matematiskt-naturvetenskapliga undervisningen tidsenligt?" *Verdandi* (1891): 57.
[5] Felix Klein och Ernst Hellinger, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 14-16* (Berlin: Springer, [1908] 1968).
[6] T. ex. genom Edvard Göransson, "Nyare riktlinjer för matematikundervisningen," i *Årsredogörelse för högre realläroverket å Norrmalm* (Stockholm: 1907), 81.
[7] Josephson, "Till frågan om gymnasiets matematikkurser.," 304-05.
[8] Göransson, "Nyare riktlinjer för matematikundervisningen," 82.
[9] Petrini, "Matematiken i skolan," 194.
[10] Ibid.: sida?
[11] Ibid.: 197.
[12] Ibid.: 207.
[13] Ibid.: 204.
[14] Ibid.: 204-05.
[15] Ibid.: 203.
[16] P. G. Laurin, "Om matematiken och fysiken i kommittébetänkandet.," *Skolan*, no. 2 (1902): 259.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

kallade den "ett slags kvasivetenskaplig lära om allmänna storheter m. m. [...] som hvarken pojkarna eller lärarna själfva förstå".[1]

En annan läroverkslärare, Olle Josephson, talade om de "ur innehållssynpunkt värdelösa uppgifterna" i läroverket.[2] "Rör sig icke", skrev han, "skolmatematiken, särskildt hvad gäller algebran, delvis inom ofruktbara, för den allmänna likaväl som för den speciellt matematiska bildningen skäligen värdelösa områden?".[3] Agne Wahlgren talade om vikten av att "utgallra kapitel, som för lärjungarna äro värdelösa".[4] Efter en genomgång av en algebrabok såg han sig nödgad att konstatera att "problemen äro från praktisk synpunkt fullkomligt meningslösa".[5] Synen på skolmatematikens uppgifter som orealistiska löpte som en röd tråd genom den kritiska diskussionen.[6]

Intressant är för övrigt att såväl Petrini som Wahlgren redan 1905 identifierade studentskrivningarna som den huvudsakliga orsaken till skolmatematikens defekta innehåll. Wahlgren skrev att problemen i dessa skrivningar tycktes ha gjorts tillkrånglade och svåra för att "endast de, som äro värde högsta betyget, skola kunna lösa alla".[7] Jag skall återkomma till examinationernas inverkan på undervisningen i kapitel 10.

Kritiken mot Euklides

Den matematiska vetenskapens förändrade syn på den euklidiska geometrin fick givetvis konsekvenser för synen på Euklides *Elementa* som lärobok. I en artikel om geometriundervisningen i England berättade Otto Gallander att undervisningen där var helt fokuserad på examina. "En medveten eller omedveten hufvudsynpunkt för valet af metod vid deras undervisning", förklarade han, "blir att preparera eleverna för examen alldeles som i våra s. k. studentfabriker".[8] Han hade talat med engelska lärare, och på frågan om varför de använder Euklides har han fått svaret: "Det är så lätt att examinera efter Euklides".[9] En annan fördel var: att uppgifterna blir "vackra".[10]

I England kom kring sekelskiftet 1900 en stark reaktion mot denna användning av Euklides i skolan kallad "perryrörelsen" efter ingenjören John Perry. Inom denna rörelse menade man att geometriundervisningen skulle utgå från praktisk mätning och uteslutande syfta mot praktiskt användbara kunskaper.[11] Föga oväntat hade Perryrörelsen betydande stöd inom universitetsvärlden – där man inte längre kunde se värdet av studier fokuserade på Euklides *Elementa* – medan den mötte motstånd bland matematiklärare.[12]

I Sverige utgjorde Perryrörelsen bara ett av flera sätt att tillskriva geometriundervisningen nya betydelser. Matematikern Frans de Brun ville till exempel inte alls se matematiken som i första hand en praktisk vetenskap, utan pekade istället på hur matematiken gav stöd åt filosofin, genom att "klargöra begreppen tal, rum [och] tid".[13] Han menade även att geometriundervisningen hade ett "estetiskt ändamål", och att man därför mer borde betona matematikens "skönhet" i undervisningen.[14] I kontrast mot dessa argument framförde euklidesöversättaren Klas Vinell det i läroverkssammanhang nya argumentet att de euklidiska metoderna kunde vara praktiskt användbara för att "behärska ritbrädets alla resurser".[15]

Signifikativt för den nya synen på geometrin är övergången från att förknippa matematik med bildning, till att se matematiken som en vetenskap. I samma mån som matematiken tidigare givits en särställning i förhållande till naturen och det rationella tänkandet, kom nu vetenskapen att inta denna plats. Matematikern Gustav Cassel skrev att:

1 Petrini, "Matematiken i skolan," 199.
2 Josephson, "Till frågan om gymnasiets matematikkurser.," 301.
3 Ibid.
4 Wahlgren, "Om kurserna i matematik på latingymnasiet," 65.
5 Ibid.: 70.
6 Einar Öije, "Realitet och skolmässighet i matematiska problem," *Pedagogisk Tidskrift* (1918).
7 Wahlgren, "Om kurserna i matematik på latingymnasiet," 65.
8 Otto Gallander, "Om geometriundervisningen i England," *Verdandi* (1902): 123.
9 Ibid.: 124.
10 Ibid.: 125.
11 Göransson, "Nyare riktlinjer för matematikundervisningen," 79. Se även "Från Pedagogiska sällskapets i Stockholm förhandlingar. Den första undervisningen i geometri," *Verdandi* (1898): 202.
12 Gallander, "Om geometriundervisningen i England," 126.
13 Frans de Brun, "Några ord om matematiken och matematikundervisningen i våra elementarskolor," *Pedagogisk Tidskrift* (1908): 291.
14 Ibid.: 289.
15 Klas Vinell, "Om Euklides och den första undervisningen i geometri," *Verdandi* (1899): 31.

undervisningen bör vara strängt vetenskaplig, och den bör vara lämpad efter barnets fattningsförmåga. Dessa fordringar äro för öfrigt icke att betrakta såsom väsentligen skilda. Det är nämligen min uppfattning, att den strängt vetenskapliga metoden i allmänhet också är den i pedagogiskt afseende mest tillfredsställande.[1]

Detta resonemang känns igen från pseudonymen "Robinson" som jag citerade i förra kapitlet, det vill säga att matematiken till sin *vetenskapliga* natur är speciellt lämplig som något för barn att ägna sig åt.[2] Bildningstänkandet stod vid denna tid lågt i kurs. Läroverksadjunkten A. H. Blidberg gav tydligt uttryck åt detta då han skrev att:

om alla dessa med sträng logik anförda bevis verkligen hade en så stor formellt bildande kraft, borde man väl också kunna spåra verkningar däraf, och det tyckes då, som om dessa särskildt borde framträda vid repetitionen i öfre sjunde klassen. Och då vill jag säga, att min mångåriga erfarenhet i detta afseende ej är af glädjande art.[3]

Han menade att "en stor del af den till geometrien anslagna tiden [var] alldeles bortkastad".[4] Det var framför allt som föremål för kritik som Euklides kom att framträda i den skolmatematiska diskussionen under första halvan av 1900-talet. Man menade att undervisning baserad på Euklides *Elementa* för det första var ovetenskaplig, för det andra inte ledde till några praktiskt nyttiga kunskaper, och för det tredje inte var anpassad till barnens sätt att tänka.

Under 1900-talet kan man särskilja tre perioder av särskilt intensiv diskussion av den euklidiska geometrins ställning i skolan. Det är från den första av dessa perioder, kring mitten av 1900-talets första decennium, som citaten ovan är hämtade.[5] Till den andra perioden hör ett antal artiklar publicerade drygt 10 år senare, från 1917-1927.[6] För sista gången blossade en diskussion om Euklides upp mot slutet av 1930-talet.[7]

De två senare av dessa diskussioner utgjorde föremålet för den uppsalabaserade utbildningshistorikern Johan Prytz' avhandling *Speaking of Geometry* från 2007.[8] Istället för att redogöra för diskussionernas innehåll, skall jag därför i stort sett begränsa mig till en övergripande analys.

I och med den vetenskapliga matematikens avståndstagande från Euklides och det samtidiga nedvärderandet av bildning som utbildningsmål blev det redan mot slutet av 1800-talet tämligen svårt att argumentera för den euklidiska geometrins värde som undervisningsämne. Den blev däremot, som vi sett ovan, desto lättare att kritisera. Som ytterligare ett i den långa raden av förödande omdömen kan nämnas P. G. Laurin som 1902, angående den förmåga att lösa geometriska problem som man fick läroverket, skrev att "ingen – utom lärare och lärjungar på nuvarande reallinje – har behof af den, matematiker af facket icke undantagna".[9]

Utbildningssystemets företrädare tog emellertid den euklidiska geometrin i försvar. Tämligen intressant är hur argumenten känns igen från den bildningsdiskurs som var dominerande under andra halvan av 1800-talet. Matematiklektorn och läroboksförfattaren Hjalmar Olsson menade att geometrin före 1905

[1] Gustav Cassel, "Om den Euklidiska geometrin såsom undervisningsämne," *Pedagogisk Tidskrift* (1892): 348.
[2] Robinson, "Mera om "Geometrin såsom läroämne i flickskolan," 217.
[3] A. H. Blidberg, "Geometrin på latinlinjen," *Pedagogisk Tidskrift* (1904): 349.
[4] Ibid.: 347.
[5] Se E. F. Gustrin, "Euklides Elementa," *Pedagogisk Tidskrift* (1881)., V. Bjerknes, "Om matematiken i skolen.," *Skolan*, no. 1 (1901)., Laurin, "Om matematiken och fysiken i kommittébetänkandet." Wahlgren, "Om kurserna i matematik på latingymnasiet.", Göransson, "Nyare riktlinjer för matematikundervisningen." Petrini, "Matematiken i skolan."
[6] Hit hör: Henrik Petrini, "De geometriska axiomen i skolundervisningen," *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* (1918); Henrik Petrini, "Det Euklideiska systemet i geometrin," *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* (1924); Henrik Petrini, "Om geometrins grunder enligt Hilberg och lektor Perssons avhandling därom.," *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* (1917)., J. S. Hedstöm, "Om geometriundervisningen i realskolans 4:e klass," *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* (1919)., T. Bonnesen, "Om Geometriundervisning paa Grundlag af Erfaringen.," *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* (1920). och Hjalmar Olson, "Om geometriundervisningen, mål och metod," *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* (1925).
[7] De centrala inläggen var: Ragnar Nyhlén, "Geometriläroböckerna. Replik till lektor Hj. Olson.," *Elementa* (1939); Ragnar Nyhlén, "Om grundbegreppen och axiomsystemen i våra geometriläroböcker.," *Elementa* (1938). Hjalmar Olson, "Geometrien och realskolan. Slutreplik till lektor C. E. Sjöstedt," *Elementa* (1939); Hjalmar Olson, "Om geometriens grunder och geometriundervisningen i realskolan," *Elementa* (1938); Hjalmar Olson, "Om realskolans geometriundervisning. Slutreflexioner.," *Elementa* (1939)., C. E. Sjöstedt, "Geometriens grundbegrepp och axiom, särskilt i undervisningen," *Elementa* (1938); C. E. Sjöstedt, "Realskolans geometriundervisning," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1937).
[8] Prytz och Uppsala universitet. Matematiska institutionen, *Speaking of Geometry: a study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates*.
[9] Laurin, "Om matematiken och fysiken i kommittébetänkandet.," 260.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

handlade om problemlösning och att "en dylik uppdriven förmåga att lösa geometriska problem [ej kunde ha] stort praktiskt värde".[1] Med andra ville Olsson, på ett sätt som vi nu vet är typiskt för skolmatematiken, distansera sig i förhållande till dess förflutna. I linje med denna retoriska figur fortsätter hans artikel med följande beskrivning av geometrins och geometriundervisningens likväl stora betydelse:

> Geometrien är ju vetenskapen om de begrepp, av vilka vår rumsuppfattning av tillvaron är sammansatt. Men vår rumsåskådning, seendet i rummet, är ej, i motsats till färgseendet, medfött, utan den kommer så småningom genom erfarenheten; den kan därför göras tillföremål för uppfostran och undervisning.[2]

Även om Olson inte nämner bildning, utgör detta resonemang ett glasklart exempel på hur det formalbildande tänkandet under denna tid levde vidare, den förändrade synen på vetenskapen till trots. Olson skrev att "undervisningen i geometri faktiskt har tagit sin början redan i hemmet, långt innan barnet börjar skolan",[3] vilket innebar att barnet "redan då det börjar skolan [har] vissa geometriska kunskaper".[4] Det är ingen slump att återknytandet till matematiken som bildningsmedel sker parallellt med en rörelse från de äldre till de yngre eleverna. Som jag strax skall visa, var det i förhållande till barnet som den syn på matematiken som präglade 1800-talets skolmatematiska diskussion, levde vidare under 1900-talet.

Problemet med läroverkets undervisning i euklidisk geometri var relationen mellan denna undervisning och den matematiska vetenskapen. Det var trots allt i egenskap av idealt exempel på logisk stringens som Euklides ursprungligen tog plats i skolan. Henrik Petrini var en av de som försökte försvara Euklides med hänvisning till möjligheten att så att säga korrigera hans framställning med hjälp av den matematiska vetenskapens senaste landvinningar.[5] Han menade att det var "den nuvarande generationens skyldighet att om möjligt göra den Euklideiska framställningen ännu mer exakt", och därmed ännu mer bildande.[6] Denna ambition kröntes emellertid inte med någon större framgång.

Som jag förstår utvecklingsförloppet utdelade matematikern Ragnar Nyhlén en dödsstöt mot den Euklidiska geometrin i ett par artiklar 1938 och 1939.[7] Euklides motiverades vid denna tid huvudsakligen som "tanketräning" med hänvisning till att den euklidiska geometrin utgjorde ett särskilt gott exempel på vetenskapliga logisk stringens. Läroböckerna utgjorde emellertid inte direkta översättningar av Euklides *Elementa*. Istället hade det blivit gängse bland läroboksförfattarna att konstruera egna axiomatiska system, med ambitionen att både förbättra Euklides utifrån en vetenskaplig synvinkel och att göra framställningen bättre anpassad till lärjungarna. Vad Nyhlén gjorde var att granska några av dessa läroböcker, med den vetenskaplig matematiken som utgångspunkt. Föga oväntat fann han att läroböckerna i mycket begränsad utsträckning levde upp till den samtida matematiska vetenskapens krav på stringens. Lika väntat är emellertid att läroboksförfattarna inte uppfattade denna observation som särskilt komprometterande: "Det torde vara omedelbart klart", skrev Hjalmar Olsson, vars *Plan geometri för realskolor, mellanskolor, högre folkskolor och därmed jämförliga läroanstalter* var en av de böcker Nyhlén kritiserat, "att man ej kan låta geometriundervisningen vid våra elementarskolor avse att meddela en sträng deduktiv lärobyggnad".[8] Olson menad att Nyhléns kritik därför var "ett slag i luften",[9] och dessutom vittnade om "brist på pedagogiskt verklighetssinne".[10] Olson menade att läroverkseleverna saknade förmåga att ta till sig vetenskaplig geometri, att läroboksförfattarnas uppgift var att på ett pedagogiskt sätt förmedla en sorts geometrins grundtankar, och att detta med nödvändighet gjorde det omöjligt att leva upp till vetenskapliga krav på stringens. C. E. Sjöstedt, en annan av den euklidiska geometrins försvarare, menade – helt i linje med Olsons resonemang och i polemik mot Nyhlén – att man måste ha särskilda krav på "skolgeometrin", och där "den logiska synpunkten aldrig [får] tillgodoses på bekostnad av den pedagogiska".[11]

Men Nyhlén visade att "skolgeometrin" faktiskt inte bara utgjorde en sorts neutral förenkling av den vetenskapliga geometrin. "Det mest utmärkande draget för våra läroböcker i geometri", skrev han, "är stor

---

[1] Olson, "Om geometriundervisningen, mål och metod," 13.
[2] Ibid.
[3] Ibid.: 17.
[4] Ibid.
[5] Petrini, "Om geometrins grunder enligt Hilberg och lektor Perssons avhandling därom.," 10.
[6] Petrini, "De geometriska axiomen i skolundervisningen," 195.
[7] Nyhlén, "Geometriläroböckerna. Replik till lektor Hj. Olson."; Nyhlén, "Om grundbegreppen och axiomsystemen i våra geometriläroböcker."
[8] Olson, "Om geometriens grunder och geometriundervisningen i realskolan," 90. Hjalmar Olson, *Plan geometri för realskolor, mellanskolor, högre folkskolor och därmed jämförliga läroanstalter*, 5., oförändr. uppl. utg. (Stockholm: J. Beckman, 1935).
[9] Olson, "Om geometriens grunder och geometriundervisningen i realskolan," 94.
[10] Ibid.: 96.
[11] Sjöstedt, "Geometriens grundbegrepp och axiom, särskilt i undervisningen," 165.

oreda ifråga om begreppsbildningen samt olämpligt valda axiom", för att sedan avsluta: "Den till leda omvittnade logiska uppbyggnaden (se t. ex. O:s förord) är också närmast en myt".[1] Han menade att det till och med för en skolad matematiker var svårt att sätta sig in i det "puzzelspel" som han menade att Olsons axiomatik utgjorde.[2]

Varken Olson eller Sjöstedt ifrågasatte det matematiskt riktiga i Nyhléns kritiska synpunkter. Därmed uppstod givetvis frågan vilken nytta läroverkseleverna kunde ha av att ägna sig åt denna geometri, som å ena sidan motiverades med hänvisning till logik och stringens, men å andra sidan uppenbarligen varken var logisk eller stringent. Frågan fick aldrig något tillfredsställande svar. Inte desto mindre levde den euklidiska geometrin vidare som undervisningsämne i läroverket ända fram till början av 1960-talet. Den euklidiska geometrins främsta försvarare var C. E. Sjöstedt.[3] I en av hans sista artiklar om geometri skriver han:

> I våra dagar finns en tendens att betrakta Euklides som hopplöst antikverad och inaktuell. Det kan vara anledning att något granska en dylik uppfattning och det med desto större skäl som uttalanden av framstående matematiker – vilka givetvis får förutsättas ha en riktig uppfattning av Euklides' betydelse – ej sällan förgrovas eller förvanskas, så att de missuppfattas av icke initierade.[4]

Åtskillnaden mellan initierade och icke initerade kom att utgöra en allt viktigare komponent i argumentationen för den euklidiska geometrin i synnerhet och skolmatematiken i allmänhet. Sjöstedt menade att det bara var dem som tillhörde skolans värld, som hade rätt att uttala sig rörande skolans ämnen. Tämligen problematiskt var emellertid att universitetsmatematikerna i allmänhet inte så såg den euklidiska geometrin som särskilt värdefull. Strax efter det att Sjöstedt skrev den artikel från vilken det ovanstående citatet är hämtad, inleddes den era som går under namnet *den nya matematiken*. Den sträckte sig över ungefär 15 år, och dess karaktäristiska drag var att skolmatematiken under denna tid i stor utsträckning hade lagts i händerna på några av den vetenskapliga matematikens talesmän. Detta är en instressant historia, som jag dock lämnat utanför den här avhandlingen.

9.2. Barnet och vetenskapen

Internationellt perspektiv

Kring sekelskiftet 1900 togs de första stegen, utanför Sverige, mot en "vetenskaplig" pedagogik. Processen som då inleddes liknar den som för matematikens del ägde rum under 1600-talet. Sättet att tala om barnens verksamhet i skolan förändrades och uppvärderades, samtidigt som den nya terminologin vävdes samman med tankesystem rörande utveckling, intelligens, normalitet, och så vidare.

Väsentligt för mitt resonemang är emellertid att den nya pedagogiken i många avseenden bara utgjorde ett nytt sätt att tala om de idéer som redan tidigare kommit till uttryck i den skolmatmatiska diskussionen. En av pedagogikens viktigaste talesmän under början av 1900-talet var John Dewey. Ett avsnitt i hans artikel "My pedagogic Creed" från 1897 utgör ett tydligt exempel på samstämmigheten med det tidiga 1900-talets pedagogiska idéer och de som kom till uttryck i den svenska skolmatematiska diskussionen efter mitten av 1800-talet och som jag redogjorde för i kapitel 7.[5]

Den pedagog som under 1900-talet fick särklassigt störst inflytande över skolmatematikens utveckling är Jean Piaget. Även hans teori stämmer – om man bortser från terminologin – väl med det skolmatematiska tänkesättet.[6]

---

[1] Nyhlén, "Geometriläroböckerna. Replik till lektor Hj. Olson.," 40.
[2] Ibid.: 39.
[3] Se t. ex. C. E. Sjöstedt, "Geometri," *Folkskollärarnas tidning* (1956); C. E. Sjöstedt, "Geometri och geometriundervisning," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1948); C. E. Sjöstedt, "Geometrin och provräkningen i realexamen," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1953); C. E. Sjöstedt, "Geometriundervisningen i den obligatoriska skolan," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1961).
[4] Sjöstedt, "Geometriundervisningen i den obligatoriska skolan."
[5] John Dewey, "Mitt pedagogiska credo," i *Individ, skola och samhälle. Pedagogiska texter av John Dewey.*, red. Ulf P. Lundgren och Sven G. Hartman (Stockholm: Natur och Kultur, 1980 [1897]).
[6] T. ex. så som den kommer till uttryck i Jean Piaget, *Psykologi och undervisning* (Stockholm: Bokförlaget Aldes/Bonniers, [1969] 1972).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Till de gemensamma dragen hos Pestalozzi, Dewey och Piaget hör att de tillmäter barnets handling central betydelse för bildande av kunskaper; att de ser kunskaper som "konstruktioner" vilka tar form under det att barnet interagerar med sin omgivning; att de betonar att undervisningen måste utgå från barnet, och hela tiden vara anpassad till barnets "ståndpunkt" eller "utvecklingsnivå"; att de tillmäter barnets intresse en avgörande betydelse; att de menar att siffror och symboler inte hör hemma i den första undervisninge och slutligen att de sätter det formalbildande målet före målet att bibringa eleven faktiska kunskaper.

Den svenska diskussionen

Under decennierna kring sekelskiftet 1900 kom diskussionen av de små barnens undervisning att i stor utsträckning tas över av de då allt fler småskollärarinnorna. Allt fler barn gick i småskola och folkskola, och i takt med att undervisningen av yngre barn blev ett större samhällsfenomen, kom "barnet" att inta en mer central position i den pedagogiska diskussionen. Jag har två poänger rörande denna diskussion. För det första att den bara i relativt liten utsträckning påverkades av de vetenskapliga idéer jag gav exempel på ovan. För det andra att dessa idéer, i den mån de togs upp i diskussion, snarast fungerade som ett extra stöd åt "traditionella" skolmatematiska ståndpunkter.

Jag skall visa detta genom att ge några exempel på hur man talade om skolmatematikens mål, dess hinder och metoderna att övervinna hindren. Därefter ger jag några exempel på hur man i diskussionen hänvisade till vetenskapen.

Skolmatematikens mål

Anna Rönström, den första kvinna som tog plats på den skolmatematiska scenen, skrev 1915 att: "[e]n blomstringstid skall komma äfven för geometrin som undervisningsämne", och att "[d]en skall komma, när den allmänna opinionen hunnit befria sig från traditionela fördomar och lärt sig döma på grund af en självständig uppfattning".[1] Typiskt för Rönström var att hon såg "uppfostran [som] skolans förnämsta mål".[2] Anna Kruse, som tillhörde en senare generation, skrev 1909 i sin *Åskådningsmatematik*, att skolmatematikens viktigaste mål var "klart logiskt tänkande, omdömesförmåga och praktisk blick".[3] "Rätt skött" skall, skriver hon vidare, matematikämnet: "ingjuta respekt för det lagbundna, känsla för sammanhang, vördnad för eviga lagar och syn på det oändliga".[4]

Denna så att säga romantisering av skolmatematikens mål kan kontrasteras mot den skepsis som den vetenskapliga matematikens företrädare vid denna tid uttryckte rörande skolmatematikens möjligheter. Det är ganska klart att dessa i allra högsta grad "högre" mål knyter an till en syn på matematiken som allmänt bildningsmedel, ett synsätt som i stor utsträckning nu gått förlorat i de delar av den offentliga skolan som befann sig närmare den vetenskapliga matematiken. Detta är också min tes: att en tämligen oproblematiserad syn på matematiken som bildningsmedel så att säga kunde leva vidare i diskussionen av undervisning av små barn. Detta underlättades av att folkskolan och småskolan just decennierna kring 1900 – efter det att folkskola och småskola fått en tydligare organisation, men innan det att folkskola och läroverk smält samman till ett enhetligt utbildningssystem – hade en viss autonomi i förhållande till såväl läroverket som det omgivande samhället.

Min poäng är inte att de mål som Rönström och Kruse satte för skolmatematiken var samma mål som till exempel Bergius, Nyström eller Velander strävat mot 50 år tidigare. Likheten ligger i själva sättet att framställa målen, deras mångfald och deras tämligen långsökta band till matematiken. Elsa Ericsson, något yngre än Kruse, författade metodiska anvisningar för den skolmatematiska undervisningen och gjorde en rad inlägg i den skolmatematiska diskussionen under 1920-talet och början av 1930-talet. Angående räkneundervisningens mål skrev hon: "Räknelektionerna på skolans alla stadier böra och kunna, rätt tagna, fostra våra ungdomar till viljestarka, självständigt tänkande, ansvarskännande och handlingskraftiga människor och dugande samhällsmedlemmar".[5] På frågan om vilken matematik man skall läsa svarar hon aningen undvikande: "Vår kurs, en enda för hela skoltiden, vare sig den är kortare eller längre,

---

[1] Rönström, "Geometrin såsom läroämne i flickskolan. Föredrag vid femte allmänna flickskolemötet i Lund.," 158.
[2] Anna Rönström, "Om en praktisk anordning af räkneundervisningen," *Verdandi* (1894): 191.
[3] Anna Kruse, *Åskådningsmatematik: Ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikens område*, 2. uppl. utg. (Stockholm: Norstedt, [1910] 1921), Förord.
[4] Ibid.
[5] Elsa Ericsson, "Nya vägar i matematikundervisningen. Rön och experiment ur min praktik," *Svensk Läraretidning* (1925).

bör vara att väcka krafter, skulle jag vilja säga, ej att lagra stoff".[1] En gemensam nämnare för de kvinnor jag nämnt ovan är som synes att de, liksom de flesta av 1800-talets skolmatematiker, inte tillmätte det matematiska stoffet någon större betydelse. De hade vad man kan kalla en monolitisk syn på matematiken, som instrument för att forma människan och som något – dock i en tämligen diffus mening – praktiskt nyttigt. Vad gäller det matematiska innehållet fäste de sig som jag strax skall visa vid det allra mest elementära.

Skolmatematikens hinder

Angående skolmatematikens problem skriver Anna Rönström 1894:

> Enligt de flestas mening är matematiken, äfven i sin populäraste form, aritmetiken, ett torrt, tråkigt, begränsadt, ofruktbart ämne. Man medgifver dess nödvändighet; men gör icke klart för sig, hvarför det är nödvändigt.[2]

Vi känner igen sättet att framställa den faktiskt existerande skolmatematiska verkligheten som defekt från redogörelsen i kapitel 7 ovan, och raden av exempel från 1900-talet kunde göras mycket lång. Vendela Wester Åström, ytterligare en av de många kvinnorna i den skolmatematiska diskussionen under början av 1900-talet, delger oss 1920 följande erfarenhet:

> Jag handledde en gång i världen under några år undervisningsövningar i räkning och har bl. a. från detta arbete en beklämmande erfarenhet av vilket gungfly den s.k. matematiken även hos begåvat folk bottnar i. Den bottnar rättare sagt inte alls. Jag frestas att stanna här för att beskärma mig över de arma stackare, som varit "dumma i matematik" i skolan. Unga lärare till varnagel må det i sanningens namn sägas, att skeva och osäkra talföreställningar samt oförstådda hokus pokus med krumelurer, som kallas siffror, kort sagt, att en ohållbar grund för räkneundervisningen varit verkliga orsaken till otroligt mycket av den matematikskräck, som förbittrat så mångas barndomsdagar och ungdomsår. Förresten tror jag också, att folks intellektuella ärlighet farligt avtrubbats genom den av skolan godtagna humbugen, att man håller god min och bygger vidare utan att solitt grundmura. Betydelsen av den grundläggande undervisningen kan icke överskattas.[3]

Det är en dyster bild som Wester Åström målar upp av skolmatematiken. I hennes två sista meningar ser man var hon förlägger problemets orsak, nämligen i en bristande "grund". Hon utgår från "barnet", som hon menar inte fått sina behov tillfredställda, och ser lösningen i ett större fokus på "den grundläggande undervisningen".[4]

Skolmatematikens medel

På ett praktiskt plan var de medel som under 1900-talets första decennier föreslogs för att övervinna skolmatematikens hinder snarlika de som föreslagits tidigare. Hit hörde till exempel betonandet av vikten att vänta med att introducera siffror i undervisningen. I *Svensk Läraretidning* kunde man 1900, angående Marshall Jackmans experimentskola i USA, läsa att han upptäckt att man "vida överskattat barnens förmåga, och att en stor del av den tid, som ägnats denna undervisning, därför varit helt och hållet bortkastad".[5] Barnens förmåga till "logiskt tänkande" var allt för dåligt utvecklad för att förstå tanken bakom de skriftliga räknesätten och därför, hade han upptäckt, lärde de sig att räkna "helt mekaniskt".[6] Lösningen han föreslog var att skjuta upp den skriftliga räkningen, och ägna de första åren åt uteslutande muntlig räkning. I sin *Om undervisning i räkning* från 1924 instämde Torsten Dahlgren i denna uppfattning. Han skrev att skolmatematikens problem var otillräcklig anpassning till barnet – att man allt för mycket utgick från den vuxnes ståndpunkt, vilket gjorde att barnen inte fick "insikt", utan istället ägnade sig åt "sifferexcersis".[7] Liksom så många andra föreslog han att man skall ägna mer tid åt det mest elementära.[8]

Helt i linje med 1800-talets bildningstänkandet gjorde man en skarp åtskillnad mellan tecknet och det "talbegrepp" som betecknades. Till skillnad från tidigare hänvisade man emellertid nu inte lägre till tal-

[1] Ibid.
[2] Rönström, "Om en praktisk anordning af räkneundervisningen," 177.
[3] Vendela Wester-Wåhlström, "Om räkneundervisning. Några funderingar med anledning av en utkommen räknelära för nybörjare.," *Svensk Läraretidning* (1920).
[4] Ibid.
[5] K. E. L., "Ett pedagogiskt experiment," (1900).
[6] Ibid.
[7] Torsten Dahlgren, *Om undervisning i räkning* (Stockholm: Norstedt, 1924), 2-3.
[8] Ibid., 3.

sortsmetodens ganska exakt definierade talbegrepp. Istället kom termen talbegrepp att syfta på en sorts "inre bild" av själva talet. [1] Det höga värderandet av begreppet, och det låga värderandet av siffrorna, hängde samman med en tämligen ambivalent hållning till elevernas förmåga att prestera. I en metodanvisning från 1913 kan vi läsa om skillnaden mellan räknefärdighet och bildning:

> Endast den omständigheten, att man i praktiken når "resultat" med ett förfaringssätt, är icke tillräcklig att rekommendera detsamma. Man bör alltid först undersöka, huruvida ej dessa resultat äro blott skenresultat, som förespegla verklig bildning. En lärjunge, som på frågan: "Huru mycket är 5+3?" genast svarar åtta – och lika hastigt avfärdar alla frågor i den första räkneundervisningen -, behöver icke på långt när ha god utbildning i räkning. Ty för att avgöra detta måste man först genom ytterligare undersökningar taga reda på om lärjungen verkligen förmår att medvetet tänka igenom uppgiften på det sätt, som måste ske i varje människas inre vid dess lösning, om han således icke enbart till följd av en ordassociation mekaniskt framsagt resultatet utantill.[2]

Vi får alltså reda på att elevernas prestationer knappast säger något om den bildning man vill att räkneundervisningen skall leda till, och att man istället måste fästa sig vid "vad som sker i en människas inre, när hon föreställer sig tal och räknar".[3] Man kan här skönja en sorts misstänksamhet mot barnet som är karaktäristisk för skolmatematiken. Ett återkommande tema i metodiska anvisningarna, från denna tid liksom både tidigare och senare, är vikten av vaksamhet i förhållande till vad som *ser ut som* matematisk förmåga, men som, menar man, är blott ord, utan begrepp. Så skriver till exempel Magda Carlsson, angående den stolthet över att kunna räkna långt som många barn bär med sig till skolan:

> Till sin stora förtrytelse märker han emellertid, att lärarinnan ej är så överdådigt belåten med hans räknekunskaper. Hon låter honom nämligen länge, länge syssla med de första små talen, innan han får användning för de stora talen, som tyckas klinga bäst i hans öron. Hon har för avsikt att bibringa honom en rätt uppfattning om talen, emedan den viktigaste förutsättningen för att man skall kunna korrekt utföra en räkneoperation och rätt bedöma ett visst antal är, att man har tydliga och klara talföreställningar.[4]

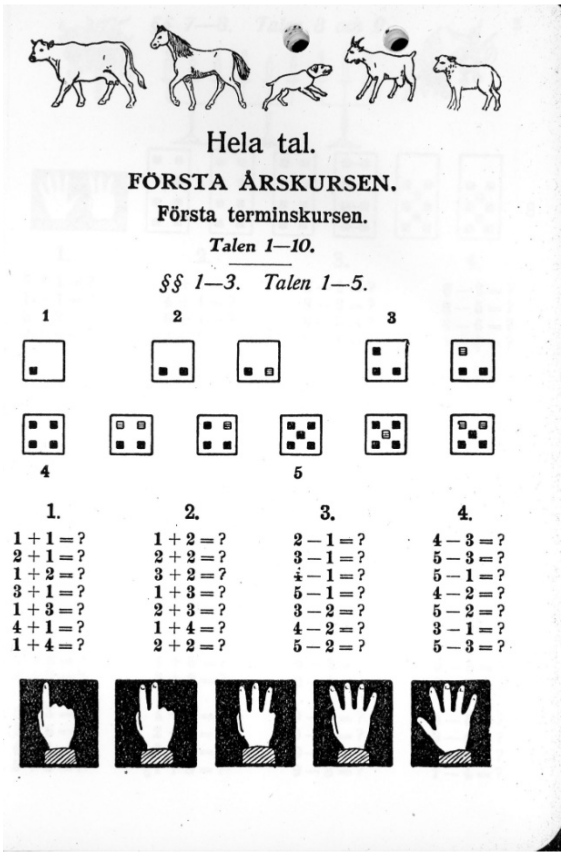
Det faktum att ett barn kan räkna, betraktades med andra ord inte alls som något entydigt gott. Man betraktade "talbegreppet" som utgångspunkten för allt räknande, och detta talbegrepp var något som bara kunde växa fram gradvis. "Det lilla barnet har nog i allmänhet", skriver Elsa Ericsson, "redan när det börjar sin skolgång, en hel del *räkneord* bland sitt övriga ordförråd", men, fortsätter hon

> När lärarinnan emellertid närmare undersöker *barnets uppfattning av den verkliga innebörden av desamma*, torde hon nog komma underfund med att det för henne nu gäller *att sätta begrepp bakom orden* samt att fortsättningsvis söka att befästa och vidga barnets taluppfattning.[5]

Viktigt för mitt resonemang är att den undervisningspraktik som tidigare motiverats med hänvisning till ett religiöst färgat bildningstänkande, vid denna tidpunkt framstår som ett oundvikligt faktum. Man talar om talbegreppet, utan något särskilt teoretiskt eller metafysiskt ramverk. Det har blivit en del av självklar och oproblematisk del av verkligheten, med egenskaper som man i undervisningen måste anpassa sig till.

Följande lärobokssida illustrerar hur man vid denna tid kombinerade åskådning med övning i läroböckerna:

[1] G. E. Lindgren, "Den första räkneundervisningen. Talbegreppet måste vila på konkret underlag.," *Svensk Läraretidning* (1936).
[2] Hermann Haase och Petrus Norberg, *Den första räkneundervisningens metodik*, 3 uppl. / utg., *Pedagogiska skrifter, 65* (Lund: Lindstedts bokh., 1913), 69.
[3] Ibid., 69-70.
[4] Magda Carlsson, "Räkneundervisningen," *Småskolan* (1929).
[5] Elsa Ericsson, "Några synpunkter på den grundläggande räkneudnervisningen," *Svensk Läraretidning* (1931).



Hela tal.

FÖRSTA ÅRSKURSEN.

Första terminskursen.

Talen 1—10.

§§ 1—3. Talen 1—5.

1 2 3

4 5

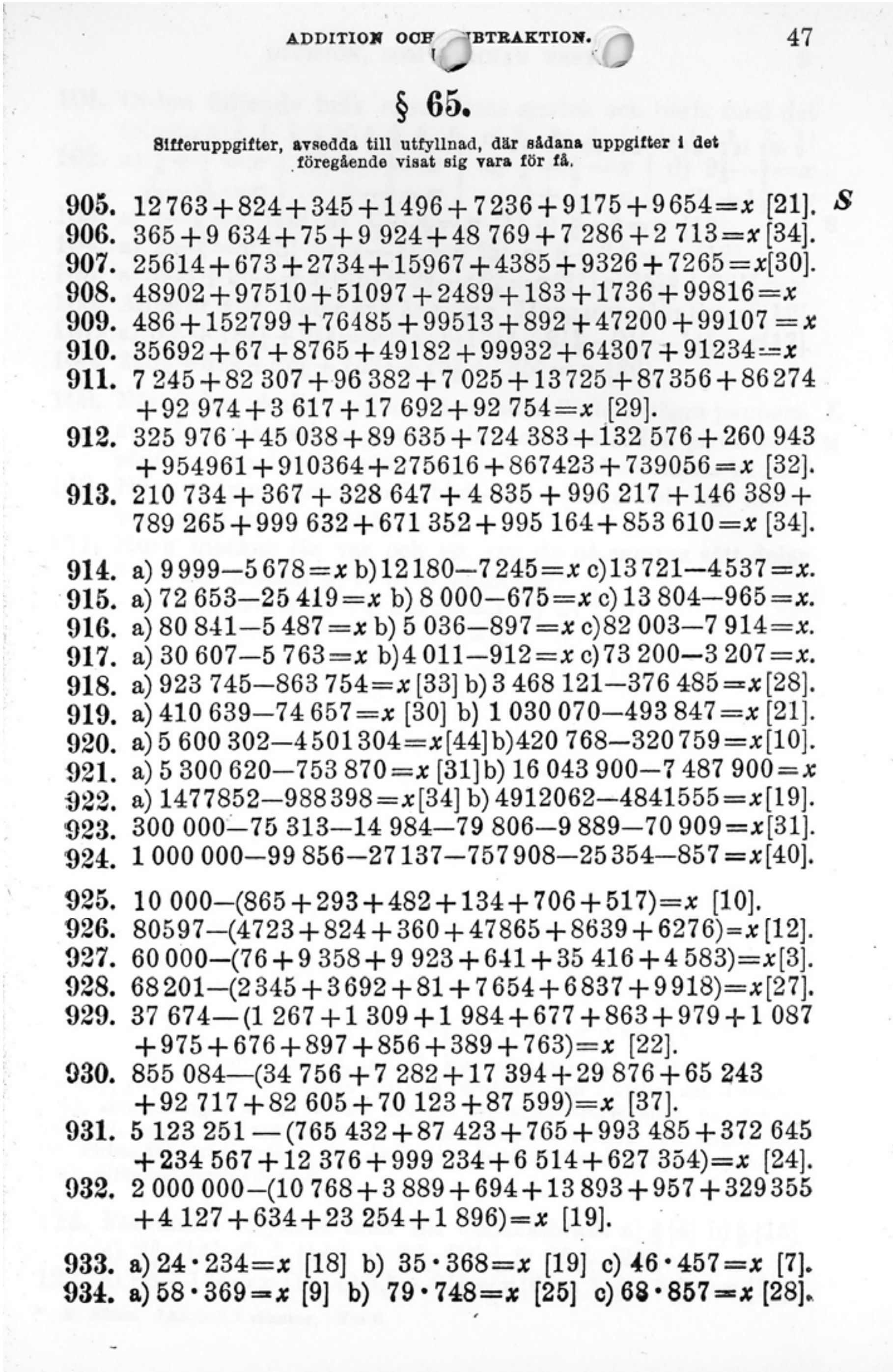
1.	2.	3.	4.
1 + 1 = ?	1 + 2 = ?	2 − 1 = ?	4 − 3 = ?
2 + 1 = ?	2 + 2 = ?	3 − 1 = ?	5 − 3 = ?
1 + 2 = ?	3 + 2 = ?	4 − 1 = ?	5 − 1 = ?
3 + 1 = ?	1 + 3 = ?	5 − 1 = ?	4 − 2 = ?
1 + 3 = ?	2 + 3 = ?	3 − 2 = ?	5 − 2 = ?
4 + 1 = ?	1 + 4 = ?	4 − 2 = ?	3 − 1 = ?
1 + 4 = ?	2 + 2 = ?	5 − 2 = ?	5 − 3 = ?

Figur 14. Andra sidan i Erik Ehlins *Lärobok i räkning: för barndomsskolans 1:a-7:e årsklass*.[1] Vi ser hur övning kombineras med åskådlighet, i syfte att grundlägga barnens talbegrepp.

Nedanstående sida kan tjäna som påminnelse av den betydelse övningsräknande fortfarande fyllde för att hålla barnen sysselsatta:

[1] Erik Ehlin, *Lärobok i räkning: för barndomsskolans 1:a -7:e årsklass*, Ny uppl. utg. (Stockholm: Ehlin, 1918), 2.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf



ADDITION OCH [illegible]BTRAKTION. 47

§ 65.

Sifferuppgifter, avsedda till utfyllnad, där sådana uppgifter i det föregående visat sig vara för få.

905. 12 763 + 824 + 345 + 1 496 + 7 236 + 9 175 + 9 654 = x [21]. S
906. 365 + 9 634 + 75 + 9 924 + 48 769 + 7 286 + 2 713 = x [34].
907. 25614 + 673 + 2734 + 15967 + 4385 + 9326 + 7265 = x [30].
908. 48902 + 97510 + 51097 + 2489 + 183 + 1736 + 99816 = x
909. 486 + 152799 + 76485 + 99513 + 892 + 47200 + 99107 = x
910. 35692 + 67 + 8765 + 49182 + 99932 + 64307 + 91234 = x
911. 7 245 + 82 307 + 96 382 + 7 025 + 13 725 + 87 356 + 86 274 + 92 974 + 3 617 + 17 692 + 92 754 = x [29].
912. 325 976 + 45 038 + 89 635 + 724 383 + 132 576 + 260 943 + 954961 + 910364 + 275616 + 867423 + 739056 = x [32].
913. 210 734 + 367 + 328 647 + 4 835 + 996 217 + 146 389 + 789 265 + 999 632 + 671 352 + 995 164 + 853 610 = x [34].

914. a) 9 999—5 678 = x b) 12180—7 245 = x c) 13 721—4 537 = x.
915. a) 72 653—25 419 = x b) 8 000—675 = x c) 13 804—965 = x.
916. a) 80 841—5 487 = x b) 5 036—897 = x c) 82 003—7 914 = x.
917. a) 30 607—5 763 = x b) 4 011—912 = x c) 73 200—3 207 = x.
918. a) 923 745—863 754 = x [33] b) 3 468 121—376 485 = x [28].
919. a) 410 639—74 657 = x [30] b) 1 030 070—493 847 = x [21].
920. a) 5 600 302—4 501 304 = x [44] b) 420 768—320 759 = x [10].
921. a) 5 300 620—753 870 = x [31] b) 16 043 900—7 487 900 = x
922. a) 1477852—988398 = x [34] b) 4912062—4841555 = x [19].
923. 300 000—75 313—14 984—79 806—9 889—70 909 = x [31].
924. 1 000 000—99 856—27 137—757 908—25 354—857 = x [40].

925. 10 000—(865 + 293 + 482 + 134 + 706 + 517) = x [10].
926. 80597—(4723 + 824 + 360 + 47865 + 8639 + 6276) = x [12].
927. 60 000—(76 + 9 358 + 9 923 + 641 + 35 416 + 4 583) = x [3].
928. 68 201—(2 345 + 3 692 + 81 + 7 654 + 6 837 + 9 918) = x [27].
929. 37 674—(1 267 + 1 309 + 1 984 + 677 + 863 + 979 + 1 087 + 975 + 676 + 897 + 856 + 389 + 763) = x [22].
930. 855 084—(34 756 + 7 282 + 17 394 + 29 876 + 65 243 + 92 717 + 82 605 + 70 123 + 87 599) = x [37].
931. 5 123 251 —(765 432 + 87 423 + 765 + 993 485 + 372 645 + 234 567 + 12 376 + 999 234 + 6 514 + 627 354) = x [24].
932. 2 000 000—(10 768 + 3 889 + 694 + 13 893 + 957 + 329 355 + 4 127 + 634 + 23 254 + 1 896) = x [19].

933. a) 24 · 234 = x [18] b) 35 · 368 = x [19] c) 46 · 457 = x [7].
934. a) 58 · 369 = x [9] b) 79 · 748 = x [25] c) 68 · 857 = x [28].

Figur 15. Sidan 46 i Erik Ehlins *Lärobok i räkning: för barndomsskolans 1:a-7:e årsklass.* [1] Observera texten överst på sidan: "Sifferuppgifter, avsedda till utfyllnad, där sådana uppgifter i det föregående visat sig vara för få".[2] Till saken hör att de "föregående" sidorna i boken innehållit tämligen många sifferuppgifter redan. Sidan som figurn visar, utgör inget undantag.

Små hänvisningar till vetenskap

Samtidigt som det finns en hög grad av kontinuitet kan man följa en långsam förskjutning , under första halvan av 1900-talet, i sättet att tala om barnet. Vad som händer är att man allt mer börjar hänvisa till vetenskapen som källa till kunskap om barnet. Man kan säga att barnet, fram till ungefär 1920, var ett huvudsakligen religiöst fenomen. Det var syndigt och ofullkomligt, och behövde därför "bildas till frihet".[3] Under 1900-talets lopp blev barnet istället allt mer ett den psykologiska vetenskapens föremål.

[1] Ibid., 46.
[2] Ibid.
[3] Fineman, *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*, s. xxviii. Se även Anjou, Kastman, och Kastman, *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Pedagogik.*, s. 3-4.

Även om termen "utveckling" redan tidigare var tämligen vanlig i undervisningssammanhang, fick den nu en mer central plats i diskussionen, samtidigt som det blev något mindre vanligt att tala om barnens undervisning i termer av "bildning". Denna förändring i sättet att tala fick emellertid inga avgörande konsekvenser för undervisningspraktiken. Enkelt uttryckt kom den psykologiska vetenskapen vid denna tid nästan uteslutande att fungera som ett stöd för just de ståndpunkter som sedan tidigare varit kännetecknande för den del av skolmatematiken som ägnade sig åt yngre barn.

Låt mig ge några exempel på hur man vid denna tid hänvisade till vetenskapen. Anna Kruse talade om "psykologiska forskningar" som gjorde att man nu fått en "ny syn på tingen".[1] Centralt i denna nya syn var, menade hon, en föreställning om barnets, utveckling och dess "utvecklingsgrad" eller utvecklingsnivå. [2] Att Pestalozzi hade rätt bekräftas idag, skrev Gösta Setterberg, "av moderna barnpsykologiska undersökningar, vilka ha ådagalagt, att talföreställningarna äro alltför abstrakta för att rymmas i småbarnens hjärnor".[3] Han hänvisade till Binet, och hittade där bekräftelse på skolmatematikens idé att barnens egna "upptäcker" utgör den enda vägen mot matematiska kunskaper.

Den "psykologiska principen" måste bli den härskande, skriver Torsten Dahlgren 1924.[4] I artikeln "Några nutida strävanden inom skolundervisningen" kunde man 1913 läsa att de pedagogiska framstegen beror på "ett ökat förstående av barnets natur", vilket i sin tur möjliggjorts dels genom "den moderna biologin[s]" utvecklingsbegrepp, dels genom "psykologiens upptäckter rörande själslivet i det hela och särskilt barnpsykologiens på dess specialfält".[5]

Elsa Ericsson ger i förordet till sin *Barnens räknearbete under de sex första skolåren: metodiska anvisningar för lärare* ganska tydligt uttryck för den typiskt skolmatematiska paradoxen rörande relationen mellan förståelse och mekanik. Hon skriver att det inlärda skall vara så säkert grundlagt, så självfallet, att det inte "glider över i en död och ofruktbar mekanisering".[6] Man skall, förklarar hon, anpassa undervisningen till vad "vetenskapen" anger är möjligt vid varje "mognadsnivå". Hon tar särskilt upp det problem som införandet av siffror utgör, och menar att "om siffrorna tidigt införas – vilseledes lär:n lätt angående barnens ståndpunkt i uppfattning och *förståelse* av det genomgångna". Risken är nämligen att barnen i och för sig lär sig siffrorna, men att de inte får något "storleksbegrepp bakom".[7]

I själva verket växte den psykologiska vetenskap som det hänvisas till i citaten ovan i stor utsträckning fram just kring skolan, och i synnerhet kring de prestationsmätningar som under 1900-talets första decennier tog allt större plats i skolorna.[8] Detta framgår till exempel tydligt i den första svenska "skolmatematiska" doktorsavhandlingen, K. G. Jonssons *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp* från 1919.[9] Jonsson studerade den "problemräkning" som vid denna tid kommit att bli en så central del av den skolmatematiska undervisningspraktiken. Han problematiserade inte dess relation till varken verkligheten utanför skolan eller den matematiska vetenskapen, och inledde därmed en vetenskaplig genre som idag fortfarande är i allra högsta grad levande. Resultatet blev ett vetande om barnet – och mer allmänt om människan – bestämt av skolans praktiska verklighet.

9.3. Analys

Decennierna kring 1900 genomgick de europeiska samhällena en genomgripande transformation. Det var under detta skede som den svenska skolan i organisatoriskt avseende lösgjordes från kyrkan. Åtminstone vad gäller skolmatematiken hade bildningstänkandet alltid haft religiösa övertoner, och i takt med sekulariseringen förlorade därför även bildningstänkandet mark. Framför allt hamnade den euklidiska geometrin i en annan dager. Lärjungarnas arbete med geometri hade tidigare framstått som arbete med geometrins eviga sanningar. Nu kom det istället allt mer att framstå som i och för sig logiskt krävande arbete, men

---

[1] Kruse, *Åskådningsmatematik: Ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikens område*, sida? Inledningen.
[2] Gösta Setterberg, "Åskådlig matematikundervisning," *Verdandi* (1910): 184.
[3] Ibid.: 185.
[4] Dahlgren, *Om undervisning i räkning*, 5.
[5] "Några nutida strävanden inom skolundervisningen," *Svensk Läraretidning* (1913).
[6] Elsa Ericsson, *Barnens räknearbete under de sex första skolåren: metodiska anvisningar för lärare* (Stockholm: Bonnier, 1928), Förord.
[7] Ibid.
[8] Se Gerd Gigerenzer, *The empire of chance: how probability changed science and everyday life, Ideas in context, 12* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989), s.?
[9] K. G. Jonsson, *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp* (1919).

med en del av matematiken som vetenskapen lämnat bakom sig. Det var inte bara den euklidiska geometrin som drabbades av den "nya" vetenskapliga matematikens kritiska blick, även räknekonsten kom att framstå som hopplöst föråldrad och irrelevant, både som bildningsmedel och som förberedelse för det praktiska livet.

Dessa förändringar speglade en förändring i den svenska skolans organisation. Fram till slutet av 1800-talet hade den en dikotom struktur, där folkskolan, med sitt fokus på religion, i första hand fungerade som en ordnande och disciplinerande institution, medan läroverket, med sin bildande undervisning, fungerade som vad man med Bourdieu kan kalla en konsekrerande instans. Den examen läroverksstudierna ledde fram till fungerade som en tröskel som skiljde en liten social elit från resten av samhället. Redan tidigt under 1800-talet var i och för sig denna sociala funktion långt ifrån glasklar. Många studenter fullbordade inte sina studier, vilket satte frågetecken bakom hur dessa studier skulle värderas. Matematiken inträde i läroverket kan ses som en sorts institutionalisering av den sociala "mellanposition" som de ofullbordade läroverksstudierna ledde till. Läroverket blev därmed inte längre *en* tröskel, utan – åtminstone – två.

Inte desto mindre kom även de matematiska studierna att fungera just som en tröskel. Matematiken kunde fungera som sådan genom att framträda som en sort realbildningens motsvarighet till de klassiska språken. Med en metafor kan man säga att matematiken fungerade som något man "klev upp på", för att därmed skilja sig från mängden. När vetenskapen så att säga lämnade skolmatematiken nedanför sig, blev detta inte längre möjligt. Istället kom de matematiska studierna i läroverket att framträda som ett litet första steg på en väg mot en i det närmaste ouppnåelig professionell matematisk vetenskap. I sammanhanget kan nämnas att något liknande hände studiet av klassiska språk: kring sekelskiftet blev det inte längre möjligt att bemästra dem, eftersom filologin då, liksom matematiken, blivit en professionell vetenskap stadd i förändring.[1]

Man kan säga att tre av skolans viktigaste objekt – de klassiska språken (latinet), den euklidiska geometrin och religionen – ungefär samtidigt "gick förlorade". Denna förlust samspelade med en förändrad syn på skolans funktion. Från att ha lett fram till två väsensskilda trösklar, bemästrandet av katekesen i folkskolan, bemästrandet av latin eller matematik i läroverket, kom den att framstå som utbildning, vilken skulle leda till två olika mål: å ena sidan förberedelse för vidare vetenskapliga studier, å andra sidan till praktiskt nyttiga kunskaper – vilket man kring sekelskiftet kallade medborgerlig bildning. Man kan säga att den organisatoriska process under första halvan av 1900-talet genom vilken den svenska offentliga skolan blir ett enhetligt utbildningssystem, delvis föregrips av den idémässiga transformation genom vilken de "bildande objekten" ersätts av en enhetlig vetenskap.

För matematikens del innebar detta en förändrad syn på matematikens potential. Från att tidigare varit förknippad med verklighetens essens, eviga sanningar och (i viss mån) Gud, kom den istället att få sitt värde i egenskap av professionell vetenskap, det vill säga som redskap för teoretiskt bemästrande. Vad gäller dess praktiska nytta kom idén om nytta "genom förståndsbildning" – som man såg det i folkskolan – att förlora mark, för att ersättas av en föreställning om matematiska kunskaperna som praktiskt användbara i en mer direkt, instrumentell mening.

Denna omvandling av synen på matematiken hade dock uppenbara gränser. Den påverkade i långt mindre utsträckning än vad man kanske kunde förvänta sig synen på den första undervisningen i matematik. Diskussionen av undervisning av yngre barn kom under denna period att växa kvantitativt, i och med att allt fler barn nåddes av folkskolans (inklusive småskolans) undervisning. En ny grupp – lärarinnorna – tog plats på den skolmatematiska scenen.

Deras skolmatematiska diskurs framstår som relativt homogen vad gäller synen på matematiken och synen på barnet. Karaktäristiskt är ett stort mått av överensstämmelse mellan dessa kvinnors syn på skolmatematikens mål, hinder och medel, med hur dessa frågor diskuterats tidigare, från 1860-talet och framåt.

En om man så säger "äldre" syn på matematiken kan sägas ha levt vidare i denna diskussion, relativt opåverkad av de radikala förändringar i synen på matematiken som vid denna tid präglade diskussionen av de äldre barnens matematiska studier. I förhållande till yngre barn fortfor matematiken att framstå först och främst som ett bildningsmedel. Vad gäller skolmatematikens hinder, uppfattade man dessa på i stort sett samma sätt som under 1860-talet, det vill säga: otillräcklig anpassning till barnets förutsättningar, allt för tidigt införd abstraktion, allt för tidigt införande av siffror och tecken, allt för lite omsorg om talbegreppets formande, för lite användande av åskådningsmateriel, och så vidare.

---

[1] Se Lindberg, *Humanism och vetenskap: den klassiska filologien i Sverige från 1800-talets början till andra världskriget.*

I och med vad man kan kalla den matematiska vetenskapens avståndstagande från skolmatematiken, framträder under denna period, tydligare än tidigare, en skillnad mellan vad man kan kalla "vetenskapens matematik" och "skolans matematik". Mer exakt kan man skilja mellan en syn på skolmatematikens förankrad i den vetenskapliga matematiken, och en syn på skolmatematiken förankrad i en föreställning om *barnet*. Den vetenskapliga matematikens företrädare kritiserade skolmatematiken med utgångspunkt från sin expertis inom den vetenskapliga matematiken. Småskollärarinnorna talade om matematiken med utgångspunkt från sin – ännu inte vetenskapliga – expertis rörande barnen. Med utgångspunkt från barnet kunde matematiken fortsätta att framstå som det (statistiska, eviga) bildningsmedel som den från vetenskapens synvinkeln inte längre var.

Den skolmatematiska diskussionen fokuserad på yngre barn var dock inte opåverkad av att vetenskapen nu började segla upp som ny fokuseringspunkt för det svenska samhället. Snarare än att tala om barnens "ståndpunkt" i allmänhet, blev det allt vanligare att tala om barnets utveckling. Sättet att förstå "talbegreppet" påverkades av denna terms användning i sammanhang närmare den vetenskapliga matematiken. Väsentligt är även att man började hämta stöd för sina ståndpunkter rörande skolmatematiken med hänvisning till vetenskaplig kunskap om barnet. Här är det dock viktigt att dra en skarp gräns mellan dessa hänvisningar, och själva det "vetenskapliga" sättet att skriva om barnen som vid denna tid tagit plats på sina håll utanför Sverige, men som inte kom till Sverige förrän efter 1900-talets mitt. Lärarinnorna hänvisade i och för sig vid denna tid till "psykologiska forskningar",[1] men tycks inte desto mindre först och främst ha förankrat sina ståndpunkter i egen praktisk erfarenhet av undervisning.

Även vad gäller den del av skolmatematiken som kretsade kring undervisning av äldre barn levde föreställningen om matematiken som bildningsmedel vidare. Man kan tala om en sorts fragmentisering och eufemisering av den tidigare relativt enhetliga bildningsdiskursen. Istället för att tala om bildning började man tala om att "påverka själskrafterna i god riktning",[2] om "tankegymnastik",[3] om "tankereda" och liknande. På detta sätt kunde man fortsätta att motivera delar av skolmatematiken som i det nya sättet att tänka om de skolmatematiska studierna – det vill säga som antingen förberedelse för vidare studier, eller som förberedelse för det praktiska livet – framstod som mindre lyckade. Under 1900-talets första hälft blev dock detta allt mer problematiskt.

Givetvis kan man också se det faktum att man vid denna tid talade om matematiska studier i termer av formandet av begrepp – även på en högre nivå – som ett uttryck för ett kvarlevande bildningstänkande. Den heuristiska metoden – det vill säga att några regler aldrig skulle presenteras för eleverna, utan att de skulle själva så att säga "upptäcka" matematiken – blev under 1900-talet i stor utsträckning skolmatematikens praxis.[4] Denna metod hade tidigare motiverats med hänvisning till samstämmigheten mellan matematiken, människan, Gud och naturen – vilket skulle göra det möjligt för barnet att liksom av sig själv upptäcka den. Vi såg också hur metoden kom att ta form som ett praktiskt medel för att strukturera undervisningen i det skede då klassundervisningen trängde ut växelundervisningssystemet. I takt med att bildningstänkandet trängdes ut, började man helt enkelt betrakta denna metod som det sätt på vilket man lär sig matematik.

En viktig aspekt av förändringen i synen på matematiken under början av 1900-talet, vilken sprider ljus över de jag talat om hittills, är att prestationer i matematik nu hamnade i diskussionens centrum. Om man tidigare, genom att ha tagit sig igenom en viss kurs i, säg, euklidisk geometri, ansågs bemästra den och därmed ha uppnått en viss (matematisk) bildning, kom matematiska prestationer under 1900-talet att allt mer betraktas som ett tecken på så att säga fysiologiskt grundade mänskliga egenskaper. Matematiken blev under denna tid ett instrument för att mäta människan, och i synnerhet för att mäta barnets "utveckling", dess vuxenblivande. Den enhetlighet som tidigare präglat talet om matematiken som medel att forma människan, kom därmed att ersättas av en lika enhetlig diskurs rörande matematiken som medel att mäta henne.

Jag visade i förra kapitlet hur den skriftliga heuristiken kunde förklaras med hänvisning till behovet av att strukturera undervisningspraktiken, och mer exakt att hålla barnen sysselsatta. Med sättet att tala om matematiken om mätinstrument följde ett helt komplex av idéer. I nästa kapitel skall jag visa hur dessa

---

[1] Kruse, *Åskådningsmatematik: Ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikens område,* sida? Inledningen.

[2] Frits Wigforss, *Den grundläggande matematikundervisningen: översikt av folkskolans kurs i räkning och geometri ur metodisk synpunkt* (Stockholm: Bergvall, 1925), 5.

[3] [referens i Tidning för Sveriges Läroverk]

[4] Abel Bergsten, *Folkskolans räkneundervisning: kurser och arbetssätt: en utredning, Pedagogiska skrifter, 163* (Lund: 1939), 8.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

kan förstås mot bakgrund av matematikens roll i det utbildningssystem som tog form under första halvan av 1900-talet.

10. Utbildningssystemet, skolmatematiken och vetenskapen

Det här kapitlet handlar om den roll skolmatematiken under 1900-talets första hälft kom att spela som en del av det då framväxande utbildningssystemet. Prestationer i matematik fick en stor betydelse för att fördela elever mellan olika vägar inom detta system. Jag beskriver först vad detta fick för konsekvenser för själva undervisningspraktiken, och sedan hur det kom att sätta agendan för den skolmatematiska diskussionen. Genom utbildningssystemet blev det svenska samhället en meritokrati, inom vilken matematiken kom att fylla liknande funktioner som de jag beskrev i kapitel 4 angående undervisningen vid krigsakademin på Karlberg. Matematiken skulle få utbildningssystemets sortering av individer att framstå som relevant och rättvis. Detta förutsatte inte bara en centraliserad kontroll över skolmatematiken i organisatoriskt avseende, utan även kontroll över de betydelser som den kom att tillmätas. I kapitlets tredje avsnitt visar jag (i linje med Theodor Porters resonemang i *Trust in Numbers*[1]) hur skolmatematikens vetenskapliggörande, decennierna efter 1900-talets mitt, kan förstås som ett svar på utbildningssystemets behov av kontroll över den skolmatematiska diskussionen och ett sätt att flytta den bortom det politiska samtal den var en del av under 1900-talets första hälft. Detta samtidigt som den skolmatematiska praktiken i stor utsträckning fortsatte att följa det mönster som lades fast under andra halvan av 1800-talet.

Skolmatematiken växer under 1900-talet, och blir därmed ett i en sociologisk mening än mer komplicerat fenomen än tidigare. Jag kommer inte, i det här kapitlet, att ge en beskrivning av något som skulle kunna kallas "skolmatematikens utveckling under 1900-talet". Istället kommer jag, med hjälp av exempel, att illustrera några aspekter av denna utveckling som är relevanta i förhållande till min frågeställning.

10.1. Utbildningssystemet

I det förra kapitlets avslutning beskrev jag skolmatematiken som en väg. I själva utgjorde den då inte *en* väg, utan en mängd i stor utsträckning separata vägar. Matematiken som skolämne var uppdelad i ett flertal ämnen – räkning och algebra, linearteckning och geometri – vilka var för sig utgjorde *en*, i viss mån separat, lärogång. Till detta kommer den administrativa uppdelningen mellan folkskola, läroverk och andra skolformer, som gjorde att flera olika kurser med likartat matematiskt innehåll delvis löpte sida vid sida utan samordning.

Decennierna kring 1900 började dessa delar fogas samman. Folkskolan knöts till läroverket och man gjorde upp planer för en fullständig sammansmältning. Läroplaner och styrdokument satte allt tydligare agendan för såväl undervisningen av elever som för lärarutbildning och läromedelsproduktion. Relationen mellan olika skolformer tydliggjordes och man började eftersträva systematik och enhetlighet.

Som en del av denna process fick examinationer och betyg en centralt planerad funktion som instrument för reglering av flödet av elever mellan olika skolformer och olika utbildningsnivåer. I och med detta kan man från 1920-talet tala om den svenska skolan som *en* sammanhängande institutionell struktur, det vill säga som ett utbildningssystem.

Utbildningssystemet kan förstås som en kompromiss. En centralstyrd byråkrati växte fram. Denna kom att utgöra en del av en samtidigt framväxande "stat". Skolan blev ett sammanhängande system. Inom detta system erbjöds möjligheter för socialt avancemang. Samtidigt inrättades emellertid en rad spärrare genom vilka reglerades *vilka* som skulle avancera.

Tidigare skedde reproduktionen så att säga passivt, genom att de som skulle vara kvar där nere, inte fick medel att ta sig upp. Systemet som växte fram under 1900-talet innebar att utsträngning istället skedde aktivt. Alla barn skulle nu identifiera sig med målet att avancera, alla skulle glädjas åt samma skolarbete. Men obönhörligt skulle det nu visa sig att vissa var med "lämpade" än andra för att realisera det mål som skolan inplanterat.

---

[1] Porter, *Trust in numbers: the pursuit of objectivity in science and public life.*

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

I samband med denna förändring hördes för övrigt röster som krävde hårdare tag för att se till att alla verkligen gick i skolan. Nedanstående citat är ett exempel:

> Varje olovligen försummad skoldag borde medföra ett fixt bötesbelopp, som kunde å exekutiv väg uttagas hos målsmannen. Detta anses vara den enda väg, på vilken man kan komma ifrån det gäckande av lag och ordning beträffande barnens skolplikt, som synes bli alltmer vanligt.[1]

Skolan blev vid denna tid en obligatorisk del av alla människors uppväxt.

Examensväsendet

På grund av den roll prestationer i matematik spelade inom utbildningssystemet hamnade skolmatematiken nu betydligt närmare centrum av den politiska arenan än tidigare. Matematiken, och därmed på ett mer konkret plan matematiklärarna, kom att fungera som sorteringsinstrument – och alla var inte nöjda med att just prestationer i matematik skulle tillmätas avgörande betydelse för det uppväxande släktets fördelning över olika positioner i samhället. Matematiken fick under denna tid, liksom alla andra skolämnen, talesmän vilka försvarade den såväl mot kritik från företrädare för andra skolämnen, som mot kritik från andra håll.

Skolkommissionens betänkande som blev klart 1922 kritiserades med anledning av den roll det tillskrev lärarna som administratörer av skolans sorterande funktion. I *Sammanfattning av utlåtanden och yttranden i anledning av skolkommissionens den 28 april 1922 avgivna betänkande* syns sådan kritik.[2] Många ansåg att det var omöjligt att med utgångspunkt från de "prövningar" som föreslogs att bedöma elevers potential för fortsatta studier.[3] Man kritiserade det "ödesdigra ansvar" som "vid tillämpande av kommissionens förslag rörande dylika prövningar, skulle vila på lärarna", och menade att lärarna "borde förskonas från en så svår uppgift".[4] Man menade också att "förslagets tillämpande innebure en kränkning av föräldrarnas rätt att själva bestämma över sina barns uppfostran".[5] Det påpekades att de intelligensmätningar som föreslogs var en "kulturfara", på grund av att "lätteligen lärjungar kunde komma att utestängas, vilkas begåvning vore djup och originell, men vilka saknade de egenskaper, som gjorde det möjligt att lysa i en examen".[6]

Skolkommissionen föreslog en inträdesprövning till realskolan. Denna kallar någon en "examen rigorosum", som skulle vara "ett psykologiskt oting", en "självstortyr för barnen", som skulle resultera i "de grövsta misstag" och "de mest flagranta orättvisor".[7] Den skulle "förrycka arbetsglädjen och arbetslugnet" i de skolformer som föregår realskolan.[8] Från Anna Sandströms skola i Stockholm kom synpunkten att "det låge något beklämmande däri, att till och med den egentliga barndomen skulle indragas i kampen för tillvaron genom att skolan redan på ett lågt stadium ställdes inför uppgiften att förbereda för en karriär".[9] Någon menade att betänkandet vittnade om en "allt för hög värdesättning av den rena intelligensen".[10]

Det vi idag tar för givet – att man får *betyg* i skolan, och att dessa får livsavgörande betydelse efter som de betraktas som mätare av begåvning – var då en nyhet. Kollegiet vid folkskoleseminariet i Kalmar skrev:

> Slutligen torde det ej kunna anses annat än mycket olyckligt, om vissa samhällsmedlemmar genom avläggande av bestämda examina bleve officiellt hallstämplade som "begåvade". Då nämligen begåvningen som sådan, enligt vad all erfarenhet nogsamt visade, ingalunda utgjorde någon garanti för vare sig moraliskt värde eller socialt sinne och handlingssätt, vore en begåvningarnas diktatur lika olämplig som varje annat klassvälde.[11]

---

[1] "Bötesstraff för skolstrejk. Folkskolinspektörerna framhålla nödvändigheten av skärpta bestämmelser," *Folkskollärarnas tidning* (1927).
[2] Kungl. Skolöverstyrelsen, *Sammanfattning av utlåtanden och yttranden i anledning av skolkommissionens den 28 april 1922 avgivna betänkande* (Stockholm: 1922).
[3] Ibid., 232.
[4] Ibid.
[5] Ibid.
[6] Ibid., s. 233.
[7] Ibid., 234.
[8] Ibid., 234-35.
[9] Ibid., 235.
[10] Ibid., 236.
[11] Ibid., 237.

Man säger att den "begåvning" som kan mätas, kanske inte är så viktig att den borde bestämma det värde som skolan i samhällets namn tillskriver människor. Samma folkskoleseminarium riktade även kritik med utgångspunkt från undervisningspraktiken:

> ur rent pedagogisk synpunkt icke mindre allvarliga invändningar riktas mot hela examensväsendet. Kollegiet ansåge uppenbart, att dessa återkommande prövningar och examina – ej mindre än 3 före studentexamen- måste komma att utöva att högst ogynnsamt inflytande både på arbetsdugligheten i skolan och på lärjungarnas fysiska och psykiska välbefinnande. Kollegiet ville för sin del livligt framhålla nödvändigheten av att examensväsendet i möjligaste mån reducerades.[1]

Man var alltså påtagligt *medveten* om den effekt examinationer skulle få på skolarbetet. Farhågorna besannades också in i minsta detalj; undervisningen blev definierad av de förestående examinationerna.

Låt mig avsluta redogörelsen för synpunkter på skolkommissionens förslag med några pressröster. Göteborgs Handelstidning skrev att "allt bleknar inför den fara, som hotar i och med förslaget att medelst några slags prov avgöra, vilka barn som skola få fortsätta sina studier och vilka icke".[2] Och mer från samma tidning:

> Skolkommissionens förslag skulle sätta uniformeringen i sysem, ty vi skulle få en och samma skoltyp i hela landet, en och samma metod, ett och samma kunskapsmått, en över hela linjen triumferande likformighet, vilket allt skall erbjuda fullgod säkerhet mot varje individualitetens och det enskilda initiativets självfsvåld Vi få normalbarn, rentvättade och vattenkammade gossar och flickor, som genomgå sina prövningar och undan för undan sorters ut till olika yrken. Det går alldeles, som när man i en kullagerfabrik prövar det färdiga fabrikatet och kultorna ramla ned i för de olika storlekarna avsedda hål och rulla bort till sina uppsamlingsställen.[3]

Göteborgs Morgonpost skrev:

> Icke blott otidsenligt och reaktionärt utan rent av kinesiskt verkar ett annat av förslagets genomgående drag – den starka böjelsen för ideligen återkommande större och mindre prövningar, [...] Därtill kommer den nästan ohyggliga makt, som blir lagd i lärarnes hand vid elevenas övergång till olika linjer och fack – ett ansvar som säkerligen lärarkåren själv icke med någon större entusiasm kan tänkas åtaga sig.[4]

De ovanstående citaten är tänkta att fungera som bakgrund till den skolmatematiska diskussion som jag strax skall redogöra för. Den kritik som i denna diskussion riktades mot skolmatematiken kan ses som en fortsättning av den kritik som jag gett exempel på ovan.

Krav på gallring

Utbildningssystemet i egenskap av sorteringsinstrument hade kommit för att stanna, och man kunde höra röster som tog det i försvar. Till exempel följande:

> Vi äga redan nu en överproduktion av studenter, som trives gott tillsammans med en naturlig föräldraglädje inför den vita mössan. Häremot måste skolan i samhällsnyttans namn reagera och reagera starkt.[5]

Även matematikens roll som gallringsinstrument försvarades:

> Skall det bli någon mening med den nyspråkliga linjen såsom en intellektuell pövningsanstalt i likhet med de övriga gymnasielinjerna, är det nödvändigt, att där beredes mera plats för ämnen, som lättare kunna utnyttjas vid en dylik prövning. De ämnen, som därvidlag främst böra ifrågakomma, äro latin *eller* matematik.[6]

Läroverksläraren Sven Emrik Ohlon, som författat den artikel från vilket det ovanstående citatet är hämtat, argumenterar för att man skall välja ut matematiskt stoff inte minst med utgångspunkt från kravet på

[1] Ibid.
[2] Göteborgs Handelstidning den 8 maj 1922 i "Skolkommissionens verk bedömt av pressen," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1922): 145.
[3] Ibid.
[4] Göteborgs Morgonpost den 9 maj 1922 i Ibid.: 146.
[5] Sydsvenska Dagbladet Snällposten den 9 maj [?] 1922 i Ibid.
[6] Sven Emrik Ohlon, "Skolkommissionens kursplaner i matematik, fysik och kemi. Några randanmärkningar.," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1922): 199.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

att det med hjälp av matematiken skall bli möjligt att "pröva elevernas förståndsmognad".[1] Man kan här observera en förskjutningen i argumentationen från att bilda och utveckla eleverna, till att mäta och kontrollera deras "bildningsnivå". För övrigt kan sägas att behovet av mätning intar en liknande plats i det tidiga 1900-talets diskussion som de tysta övningarna gjort på 1880-talet, det vill säga i bisatser, tillsammans med annat.

Ett konkret och sammanhängande uttryck fick ståndpunkten att det var nödvändigt att skapa ett gallrande utbildningssystem i en offentliga utredning som tillsattes i början av 1930-talet, "i anledning av tillströmningen till de intellektuella yrkena".[2]

10.2. Undervisningspraktiken

Examinationernas ökande betydelse påverkade undervisningspraktiken i riktning mot intensifierat lösande av övningsuppgifter. Sambandet mellan utbildningssystemets sorterande funktion och undervisningspraktiken blir särskilt tydlig åren efter 1927 då prov i modersmål och räkning blev obligatoriska för inträde i läroverket. I och med detta kunde folkskolans räkneundervisning på ett annat sätt än tidigare sägas leda fram emot vad som liknade en avslutande examen. Att de betyg som sedan länge delats ut i folkskolan inte hade någon betydelse var väl känt. Redan 1895 kunde man läsa: "Folkskolebetygens praktiska betydelse är som bekant i de allra flesta fall så godt som ingen, och detta förhållande ses med ledsnad af hvarje folkskolevän".[3]

1927 finns en artikel införd i *Folkskollärarnas tidning* med följande budskap: "En välkommen nyhet för folkskolornas lärarkår torde de från Hjärtstädts förlag, Kristinehamn, nyligen utgivna räkneproven för klasserna 2-6 bli".[4] Denna artikel är den första i en lång rad artiklar i vilka provräkningar introduceras i folkskolan, tillsammans med förklaringar av deras mångfaldiga nytta.

A. Rydman berättar att provräkningars värde "ej kan överskattas".[5] Vid denna kontroll får man nämligen "någonting högst värdefullt på köpet: ett stegrat intresse hos barnen och en därav framsprungen iver att söka komma till klarhet med orsaken till begångna räknefel och sättet för deras förebyggande".[6]

Ungefär på samma sätt som vi såg Knut Kastman beklaga sig över att det gick trögt att få de tysta övningarna accepterade i folkskolan, skriver Emil Dalin – själv författare av räkneprov: "Att provräkningen ännu inte i önskvärd omfattning slagit igenom i våra folkskolor, har flera anledningar [...]".[7] Han gör sedan reklam, för sina egna provräkningsblad, bland annat genom att påpeka att de "anpassas efter de olika begåvningarna bland barnen".[8] Det vill säga:

> De flesta exemplen böra kunna lösas av de flesta barnen. Men så bör det även finnas mera krävande uppgifter för de mera försiggkomna. Kort uttryckt böra uppgifterna i avseende på svårighetsgraden vara så beskaffade, att lösningarna avspegla de olika barnens kunskapsståndpunkt och tankeutveckling.[9]

Dalin föreslår regelbundet återkommande prov, som redskap för att "göra arbetsresultatet fast och varaktigt".[10]

Ett viktigt argument för provräkningar var att de skapar möjligheter för läraren att kontrollera att "ett föregående moment är väl inhätat, innan man övergår till nästa", något man redan tidigare tillmätt stor betydelse.[11]

Proven utgjorde ett viktigt steg mot den standardisering av folkskolebetygen som genomfördes under 1940-talet.[1] Från 1929 kunde man köpa sammanställningar av tidigare inträdesprov. L. J. Mårtensson, en

---

[1] Ibid.
[2] Ecklesiastikdepartementet, *Betänkande med undersökningar och förslag i anledning av tillströmningen till de intellektuella yrkena. SOU 1935:52, Statens offentliga utredningar* (1935).
[3] "Folkskolebetygens praktiska betydelse," *Svensk Läraretidning* (1895).
[4] Gustav Karlström, "Räkneprov för folkskolan," *Folkskollärarnas tidning* (1927).
[5] A. Rydman, "Provräkningsblad, Emil Dalin," *Folkskollärarnas tidning* (1927).
[6] Ibid.
[7] Emil Dalin, "Provräkning som undervisningsmedel," *Småskolan* (1927).
[8] Ibid.
[9] Ibid.
[10] Ibid.
[11] Fr., "Provräkningsuppgifter till Folkskolans räknebok av Värner Rydén, Karl Frank och Hedvig Norgren. Första-fjärde delarna. Fjärde-sjätte årsklassernas kurser.," *Svensk Läraretidning* (1928).

av de flitigaste läroboksrecensenterna under 1920- och 1930-talet kommenterade en sådan sammanställning på följande sätt:

> Lärare eller föräldrar, vilka ha elever eller barn som ämna söka inträde i realskolans första klasser, torde i första hand ha intresse av denna bok. Nära 100 prov ha medtagits varför man av dem kan få en föreställning om hur de nya bestämmelserna i allmänhet tillämpas.[2]

Intressant är att han tillägger: "Även för skolpolitikern är boken av betydelse. Fordringarna äro, om man ställer de svåraste proven mot de lättast, ganska olika".[3]

Just åren kring 1930 kan man se ett ökande fokus på å ena sidan "mekanisk färdighet" och å andra sidan kontroll av elevernas kunskaper (i folkskolan).[4] Man menade även att införandet av räkneprov hade lett till att räkneundervisningen "ryckts upp betydligt och vunnit mycket i intresse, sedan regelbundet återkommande provräkningar börjat anordnas".[5]

Till de mer oväntade argumenten för räkneprov hör kanske att de skulle väcka "självtillit" hos eleverna.[6]

De första proven var anpassade till särskilda läroböcker. Kring mitten av 1930-talet blev det vanligare att använda generella räkneprov. Så här skrev man angående dessa:

> Åtskilliga författare till läroböcker i räkning har redan utarbetat prov till sina arbeten. Nu föreligger en samling dylika, som är avsedda att användas i vilken skola o. tillsammans med vilken lärobok som hälst. Kan sådana prov värkligen framställas, frågar den som har någon kännedom om den brokiga läroboksfloran på aritmetikens område. Förff. tycks ha funnit en lämplig lösning av denna uppgift. De har först sammanställt en serie prov, där varje sådant endast behandlar ett visst kursmoment. Därefter följer en annan serie prov, repetitionsprov, som avser även förut genomgångna kursmoment.[7]

Dessa generella räkneprov utgjorde ytterligare ett viktigt steg på vägen mot en mer enhetlig bedömning av folkskoleelevernas prestationer. Man skrev att: "Föreliggande väl genomtänkta o. avvägda prov kan med skäl jämföras med en rikslikare som blir till ovärderlig nytta för läraren vid bedömandet av den egna avdelningens standard.[8]

Det är tämligen fascinerande att se samspelet mellan provens uppenbara nödvändighet i förhållande till prestationsmätningarnas funktion inom utbildningssystemet, och det positiva värde de kom att tillskrivas från helt andra utgångspunkter. Följande är ett tydligt exempel på detta:

> Proven skola intaga en dominerande ställning, och därför ville talaren förorda ännu ett slag av prov, vilkas nödvändighet han för icke så väl insåg, nämligen hastighetsprov. Det är nödvändigt att sätta upp krav på en viss hastighetsstandard, ty långsamhet bevisar oftast ringa övning, och det, som är litet övat, faller snart i glömska.[9]

I diskussionen av folkskolans räkneprov kan man även skönja rörelsen mot den mångfald av mätande praktiker som från 1950-talet skulle ta plats i skolan för att klassificera och "hjälpa" elever som inte lyckades prestera på ett "normalt" sätt. Frits Wigforss skriver, angående provräkningarna han konstruerat: "Man upptäcker genast om en eller annan elever är onormalt långsam vilket kankse annars skulle undgått ens uppmärksamhet. Vad skall man då göra? Jo, underkasta det barnet en individuell undersökning".[10]

Det restes givetvis kritik mot det myckna mätandet av elevernas förmåga. En synpunkt gick ut på att man, om man baserade sina omdömen på enskilda mätningar, riskerade att missuppfatta elevens verkliga

---

[1] Carita Hassler-Göransson et al., *Betänkande med utredning och förslag angående betygssättningen i folkskolan, Statens offentliga utredningar, 1942:11* (Stockholm: 1942).
[2] L. J. Mårtensson, "Inträdesprov i modersmål och räkning av K. I. Asplund," *Folkskollärarnas tidning* (1929).
[3] Ibid.
[4] L. J. Mårtensson, "Uppgifter för provräkning i folkskolan av J. O. Laurin och Tage Lundholm," *Folkskollärarnas tidning* (1930).
[5] B. E., "Provräkningsuppgifter till Folkskolans Räknebok. Av Värnder Rydén och Hedvig Norgren. 5:e delen. 7:e årsklassen och fortsättningsskolan.," *Svensk Läraretidning* (1930).
[6] Ibid.
[7] L. J. Mårtensson, "Räkneprov för folkskolan av Anna Maria Roman och Fritz Wigforss," *Folkskollärarnas tidning* (1932).
[8] Ibid.
[9] Frits Wigforss, "Lektor Wigforss om provräkningar i folkskolan," *Lärarinneförbundet* (1933).
[10] Ibid.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

förmåga på grund av tillfälligheter. Skolmatmatikens talesmän försvarade sig: "verkan av en tillfällig opasslighet [kan inte] förorsaka någon felbedömning, om man har tillräckligt många prov".[1]

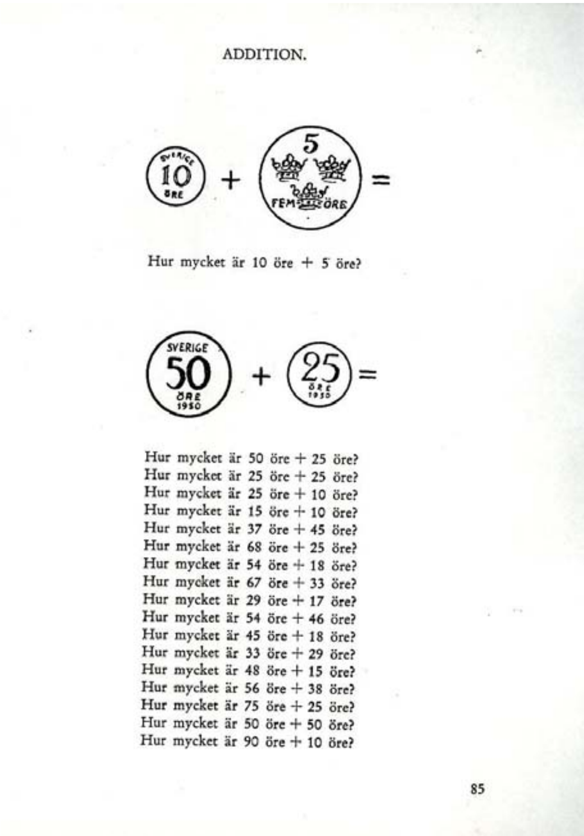
Under 1940-talet inleddes en process genom vilken folkskolans betygssystem gjordes om från grunden. På de inledande sidorna i den utredning "Angående betygssättningen i folkskolan" vars betänkande publicerades 1942, kan man läsa att student- och realskrivningarna gett viss uniformitet för läroverket, men något motsvarande har "ej kunnat ske för folkskolornas del":

> Sedan folkskolan genom 1927 års skolreform blivit bottenskola, har denna brist på likformihget i folkskolornas betygssättning börjat bli besvärande, och genom den vid 1939 års riksdag beslutade intagningen av inträdessökande från folkskolan till vissa läroverk utan inträdesprövning har en reform av folkskolans betygssättning blivit nödvändig.[2]

Med den ovanstående redogörelsen har jag velat visa på konsekvenserna för undervisningspraktiken av skolmatematiken roll inom utbildningssystemet. Bortsett från att eleverna fick ägna allt mer tid åt övning, förändrades inte läroböckernas struktur på något genomgripande sätt under denna tid. Jag skall nu visa detta med två exempel på läroböcker från 1950-talet.

Läroboksexempel

Följande bild visar en sida ur en lärobok publicerad 1951:


ADDITION.

10 + 5 =

Hur mycket är 10 öre + 5 öre?

50 + 25 =

Hur mycket är 50 öre + 25 öre?
Hur mycket är 25 öre + 25 öre?
Hur mycket är 25 öre + 10 öre?
Hur mycket är 15 öre + 10 öre?
Hur mycket är 37 öre + 45 öre?
Hur mycket är 68 öre + 25 öre?
Hur mycket är 54 öre + 18 öre?
Hur mycket är 67 öre + 33 öre?
Hur mycket är 29 öre + 17 öre?
Hur mycket är 54 öre + 46 öre?
Hur mycket är 45 öre + 18 öre?
Hur mycket är 33 öre + 29 öre?
Hur mycket är 48 öre + 15 öre?
Hur mycket är 56 öre + 38 öre?
Hur mycket är 75 öre + 25 öre?
Hur mycket är 50 öre + 50 öre?
Hur mycket är 90 öre + 10 öre?

85

Figur 16. Sidan 85 i Evert Lundqvists och Stig Perssons *Lärobok i räkning* från 1951.[3]

Vi ser här hur åskådlighet kombineras med övning på ett för skolmatematiken karaktäristiskt sätt. Som jag nämnt tidigare flera gånger har en viktig ambition inom skolmatematiken allt sedan 1700-talet varit att knyta de uppgifter som eleverna ägnar sig åt, till verkligheten utanför skolan. Mot slutet av 1950-talet kunde denna ambition ta sig följande uttryck:

[1] Georg Olsson, "Om provräkningar," *Svensk Läraretidning* (1933).
[2] Hassler-Göransson et al., *Betänkande med utredning och förslag angående betygssättningen i folkskolan*, 13.
[3] Evert Lundqvist och Stig Persson, *Lärobok i räkning* (Stockholm: V. Petterson, 1951).

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Mjölk Smör Ost

Mjölken är vårt enda fullständiga födoämne, dvs. det enda födoämne som innehåller alla ämnen som fordras för kroppens tillväxt och underhåll.
Alla de i mjölken ingående näringsämnena är också av högsta kvalitet.
Mjölk är ju den lilla nyfödda varelsens enda föda under en längre tid och det är naturen själv, som har berett den.
På bilden till vänster ser man en jämförelse mellan näringsvärdet hos $\frac{1}{3}$ *l* mjölk och andra vanliga födoämnen (ägg, fisk, socker, potatis och bananer.)
Här nedanför är en tabell, som visar de olika näringsämnena i 1 *l* mjölk.

Äggviteämnen	34	gram
Mjölksocker	47	»
Fett	35	»
Mineralämnen	8	»

Vitaminer av olika slag samt vatten.

När man druckit $\frac{1}{3}$ *l* mjölk, kan man uträtta lika mycket arbete som efter att ha ätit 67 g ägg. (Se bilden ovanför.)

1. Hur många g näringsämnen finns det i 1 *l* mjölk?
2. Hur många g bananer ger samma energimängd som 1 *l* mjölk?
3. Hur många g potatis ger samma energimängd som 1 *l* mjölk?
4. Hur många g vatten finns det i 1 *l* mjölk?

44 Mjölk Smör Ost

Figur 17. Sidan 44 i *Räkneboken: 4-6 skolåren* författad av Torsten Husén, Anders Olsén, Ruth Wikström och Sven Ingvar.[1]

Man kan notera hur den "praktiska" information som presenteras för eleverna formats med utgångspunkt från bokens skolmatematiska ändamål. Man får till exempel reda på att man "[n]är man druckit $\frac{1}{3}$ lite möjlk" kan "uträtta lika mycket arbete som efter att ha ätit 67 g ägg", ett påstående som knappast har någon mening utanför det skolmatematiska sammanhanget.[2] Den första av de räkneuppgifter som utgår från de "fakta" som presenteras i sidans övre hälft, består i att beräkna den totala vikten av alla de näringsämnen som sägs finnas i en liter mjölk, det vill säga äggviteämnen, mjölksocker, fett och mineralämnen. Att resultatet av en sådan operation helt saknar mening behöver knappast påpekas.

10.3. Den skolmatematiska diskussionen

Den skolmatematiska diskussionen kom under 1900-talets första hälft att präglas av skolmatematikens nya roll som del av utbildningssystemet. Den kom, kort sagt, i stor utsträckning att bestå i ett försvar av skolmatematiken plats och funktion i skolan – ett försvar som blev nödvändigt på grund av kritik, både från företrädare för andra skolämnen, och från personer utanför skolans värld.

Kampen om matematiken

En stor del av diskussionen kom att kretsa kring den *tid* som matematiken tilldelades i skolan. Jag skall här ge en några exempel på denna aspekt av diskussionen.

1922 års skolkommission hade föreslagit att de lärjungar som läste latin skulle få en avkortad kurs i matematik. Detta motsätter sig matematiklärarna.[3] De vill även att kursplanen skall göras "fylligare" med tydligare metodiska anvisningar, som skall "anbefallas".[4] Det som eftersträvas är alltså en ökad centraliserad styrning. Man kräver att matematikämnet skall få mer tid.[5]

[1] Torsten Husén et al., *Räkenboken: 4-6 skolåren* (Stockholm: Svenska bokförlaget, 1958).
[2] Ibid., 44.
[3] "Uttalanden av sektionen för matematik och fysik vid läroverksläraremötet," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1922): 309.
[4] Ibid.
[5] Ibid.: 310.

Redan i utredningen 1858 inför 1859 års stadga, var frågan om tid central. Matematiken fick då, som vi såg, funktionen att fylla ut tiden, utan att inkräkta på de klassiska språken. Särskilt från 1930-talet blir en kamp tydlig, mellan ämnesföreträdare, om fördelningen av tid mellan olika ämnen. Intressant är att 1824 års skolrevision, angående ämnesläsning som alternativ till klassläsning, förutsåg just att ämnesläsning skulle orsaka "split och oenighet mellan lärarna".[1]

I början av 1930-talet minskades den tid som skulle ägnas åt matematik i realskolan. Någon skriver i Tidning för Sveriges Läroverk:

> Den nya timplanen medför en stympning av en viktig gren i vår nationella bildning och medför för undervisningen vid de allmänna läroverken en allvarlig förlust utan någon motsvarande vinst, som kompenserar, ännu mindre, överväger förlusten.[2]

Skolmatematikens företrädare protesterade, och 1933 bildades *Föreningen för matematisk-naturvetenskaplig undervisning*. Föreningens syfte var att verka för en stärkt ställning för matematik och naturvetenskap, och genom sin verksamhet åstadkom den en stadgeändring, så att matematiken återfick en del av sin förlorade tid.

1918 inrättades en ny typ av "fortsättningsskolor". Matematik fanns inte med på schemat i denna skolform, vilket resulterade i protester. Carl A. Molin skriver i en motion till riksdagen:

> Enligt mångas uppfattning bör detta ämne alltid ha sin särskilt givna plats å en skolas läsordning och alltså även i fortsättningsskolan. Det kan helt säkert ha sina praktiska fördelar att icke läraren är för strängt bunden vid för många ämnen å läsordningen, men att överlämna i lärarens godtycke, hur lång tid han vill eller kan använda för matematik, måste anses väl riskabelt.[3]

Man bör observera glidningen mellan "räkning" och "matematik". Liksom den vaga hänvisningen till "mångas uppfattning", som sen allt oftare kallades "den allmänna opinionen". Vidare skriver Molin:

> I våra dagar ställas allt större anspråk på medborgaren, och den, som icke fått tillräckliga kunskaper i matemati, har svårt att i det praktiska livets skiftande förhållanden nöjaktigt kuna reda ut sådana saker, som sätta hans matematiska insikter på prov.[4]

Man kan observera den vaga hänvisningen till behov, och cirkelresonemanget: man behöver matematik för situationer som kräver matematik, eftersom man inte klarar av dessa situationer utan matematik. Molin kräver att "ämnet räkning måste få en särskild plats å schemat med ett visst antal undervisningstimmar".[5] Motionen avslås först, och diskuteras fram och tillbaka. Den avslås först med hänvisning till att det även är många andra ämnen som också har sina talesmän. Riksdagen skriver dock slutligen bland annat:

> Riksdagen delar emellertid motionärens uppfattning, att färdighet i räkning utgör en viktig förutsättning för att lärjungarna sedermera skola kunna reda sig i livets skilda förhållanden. För fortsättningsskolans fortsatta utveckling torde det också hava sin folkpsykologiska betydelse, att icke den meningen vinner insteg, att detta ämne försummas.[6]

Man kan här ana att något har hänt med bilden av matematiken. Vad menar de egentligen, när de talar om att matematikens plats i skolan har "folkpsykologisk betydelse"? Vad man kan se är att matematiken allt mer tydligt motiveras med hänvisning till vad som närmast framstår som allmänt vedertagna värden. Josef Weijne motionerar 1928 i riktsagen "angående beredande åt ämnena modersmålet och räkning en stärkt ställning vid rikets folkskolor".[7] Han inleder med att ta upp den vanliga kritiken mot folkskolans undervisning, och fortsätter:

[1] Citat hämtat ur Göransson, "Bidrag till kännedom om undervisningen i Sverige under 1800-talet," s. 21.
[2] [TfSL, 1933, B. Söderborg, s. 323]
[3] Carl A. Molin, "Motioner i Andra kammaren, Nr. 49," (1923), 5.
[4] Ibid., 6.
[5] Ibid.
[6] Riksdagen, *Riksdagens skrivelse till Konungen, angående upptagande av ämnet räkning å fortsättningsskolornas läsordning, Nr. 137.* (1923), 13.
[7] Josef Weijne, "Motioner i Andra kammaren, Nr 406, angående beredande åt ämnena modersmålet och räkning en stärkt ställning vid rikets folkskolor," (1928).

> Mera fruktbart än att diskutera kritikens berättigande är emellertid att granska möjligheterna att nå bättre resultat i de omnämnda ämnena [modersmålet och räkning]. Det bör då redan från början poängteras, att dessa ämnen äro folkskolans viktigaste. Det är nog bra med kunskaper i skolans övriga ämnen, men modersmålet och räkning utgöra själva grunden för den medborgliga bildning som folkskolan avser att bibringa. Dessa ämnen skola ge eleverna verktygen för inhämtande av vetande på andra områden.[1]

Modersmålet och räkning har blivit folkskolans formalbildningsämnen – resonemanget är snarlikt det kring latinet och geometrin. Om och om igen påpekar Weijne och andra matematikens talesmän, att den är ett "verktyg för inhämtande av en fortsatt utbildning". Weijne tar upp det faktum att antalet ämnen i folkskolan nu blivit fler med anmärkningen:

> Säkerligen har det inte enbart varit till gagn för skolan, att den haft så utmärkta förespråkare för de olika ämnena. Allt har måste beredas plats. Många vackra ord ha sagts om än det ena och än det andra ämnet för att i trängseln ge det så gott utrymme som möjligt. Det är självklart, att skolans båda huvudämnen blivit lidande, trots att de bort inta en särställning.[2]

Och vidare: "Vid varje ämne står en gårdvar som säger: tag för all del inte bort detta, det är viktigare än allt annat".[3] Fascinerande nog menar Weijne, och många med honom, att just modersmålet och räkning inte borde räknas som ett ämne bland andra. Det tycks i det närmaste ha varit huggsexa om elevernas tid: "För min egen del", skriver Weijne, "håller jag före, att man skulle kunna minska tiden för undervisning i historia, geografi och naturkunnighet [...]".[4] I en reservation till utskottets hemställan om avslag på Weijnes motion skriver Englund, Mårtenson, Vessman och Weijne att "tid kunna tagas från ämnet hembygdskunskap med arbetsövningar".[5] Ståndpunkten att hembygdskunskapen är föga nyttig delades av många vid denna tidpunkt. Den var på väg bort. Till exempel skrev en viss Hallén att "de timmar, då barnen sitta och pjollra och leka med lerbitar och klippa julgransprydnader, tycka vi kunde användas nyttigare".[6] Samma Hallén talar också om att "mångfaldiga småskollärare [...] kunnat konstatera ett försvagande såväl av barnens läsfärdighet som deras grundläggande ksunkaper i matematik".[7]

Att matematiken nu framträdde som ett allmänt formalbildningsämne är tydligt i följande citat:

> Det är ju så, herr talman, att läsa, skriva och räkna äro de tre nycklar, som gå till vetandets kassaskåp, där bildningens skatt ligger, och det synes mig vara alldeles självklart, att en mycket väsentlig del av skolundervisningen måste inriktas på dessa tre ämnen.[8]

I en artikel i tidskriften *Småskolan* kan man angående riksdagsdebatten läsa följande:

> Ett bifall till motionen vore att tillmötesgå en allmän utbredd önskan och fordran från föräldrar och målsmän. Det skulle också stärka folkskolans ställning bland den stora allmänheten, ty det är efter resultatet i modersmålet och räkning som folkskolans effektivitet mätes.[9]

Den plats katekesläsandet intog under 1800-talet (det vill säga som folkskolans huvudsak i föräldrarnas ögon) tycks nu ha övertagits av matematiken. Och det är inte svårt att se en koppling: under 1800-talet var det lagstadgat krav på att barnen skulle kunna sin katekes för att bli konfirmerade och därmed kunna ta anställning. Som jag visat ovan var det nu prestationer i matematik som utgjorde nyckeln – inte så mycket kanske till vetandets kassaskåp – som till avancemang inom utbildningssystemets noga reglerade hierarki.

Studentexamen och skolans autonomi

Under 1900-talets första hälft kom studentexamen att utgöra utbildningssystemets kanske viktigaste gallringsinstrument (för att nu använda den term som användes). Det är därför inte förvånande att det också

[1] Ibid., 11.
[2] Ibid.
[3] Weijne, Lördagen den 14 mars 1931, fm, s. 13
[4] Weijne, "Motioner i Andra kammaren, Nr 406, angående beredande åt ämnena modersmålet och räkning en stärkt ställning vid rikets folkskolor," 12.
[5] Riksdagen, *Andra kammarens första tillfälliga utskotts utlåtande Nr. 5* (1928), 5.
[6] Hallén, i riksdagsdebatten lördagen den 14 april 1928, på förmiddagen.
[7] [samma debatt – hur referera?]
[8] Tisdagen den 29 maj, fm, s. 47
[9] "Stärkt ställning i folkskolan åt modersmål och räkning," *Småskolan* (1931): 93.

var studentexamen som i stor utsträckning utgjorde föremålet för den kritik som riktades mot matematikens plats i skolan.

En av skolmatematikens viktigaste försvarare från 1930-talet till 1950-talet var C. E. Sjöstedt. Hans försvarsstrategi hade två komponenter: först att upprätta en skillnad mellan skolans "fackmän" och övriga "lekmän", sedan att kräva rättning i ledet bland fackmännen.

En artikel i Tidning för Sveriges Läroverk från 1942 exemplifierar hans ståndpunkter. Som många gånger förr har "den höga kuggningsfrekvensen" på studentskrivningarna i matematik kritiserats. Han skriver:

> Mången torde hysa den uppfattningen, att reallinjen genom 1933 års stadga gjort lättare än latinlinjen. Det enda "svåra" obligatoriska ämnet på reallinjen är matematik (allmän kurs). Där böra följaktligen fordringarna upprätthållas. Bidragande till den högre kuggningsprocenten i skrivningen i detta ämne torde också vara, att realinjen såsom mera "matnyttig" väljes av ganska många av de för teoretiska studier mindre lämpade, [jag kursiverar] *vilka med nuvarande gymnasieorganisation icke kunna effektivt utestängas eller utgallras.* Jag finner därför ingen anledning att udner nuvarande förhållanden midiviera min uppfattning om skrivningen i matematik (allmän kurs) i detta hänseende.[1]

Någon har klagat på att uppgifter i allt för stor utsträckning kräver "finurlighet", snarare än "matematisk kunskap". Även detta försvarar Sjöstedt. Han skriver:

> För min del finner jag uttrycket "finurlighet" föga lyckat. De uppgifter, som här avses, äro sådana, där lärjungarnas matematiska begåvning kommer till sin rätt. Skulle man alltför mycket begränsa antalet dylika uppgifter, så skulle differentiering efter matematisk begåvning försvåras. Genom flit och noggrannhet skulle en lärjunge med ringa matematisk begåvning kunna i större omfattning nå de högsta betygen, under det att han nu icke torde nå högre än mellan betygen.[2]

Som så många gånger tidigare och senare står alltså de matematiska kunskaperna – vad detta än betyder – i andra rummet, bakom något annat, här "matematisk begåvning", som skolan, menar Sjöstedt, bör använda som utgångspunkt för gallring. Några år senare skriver han, i en artikel med samma rubrik och med anledning av samma typ av kritik:

> Låt mig nu först som sist som min mening framhålla, att jag anser det beklagligt, att lärare i dagspressen kritisera förhållanden i skolan. Icke därför at kritik framföres och att den nästan genomgående kommenteras av osakkunniga på sätt, som oftast ger en alldeles felaktig bild av förhållandena. Vi skolmän äro så infamt påpassade, att det är alldeles tillräckligt med vad som skrives overderhäftigt om oss, utan att vi själva behöver hjälpa till att leverera stoff åt osakkunniga kommentatorer.[3]

Denna gång kom kritiken från en läroboksförfattare, vilket alltså inte uppskattades av Sjöstedt. Han vill upprätta en gräns – endast "skolmän" skall få tala om skolan. Och i offentliga sammanhang bör de inte *kritisera den*. Tiden då skoltidningarna var ett forum för kritiskt möte mellan olika konkurrerande ståndpunkter är nu definitivt förbi. Skolan bör, menar Sjöstedt, ha en enad front mot det omgivande samhället.

Sjöstedt brukade i sina artiklar understödja sina ståndpunkter med hjälp av statistik. I detta fall hade han frågat "skolfolk" vad de tyckte om skrivningarna och deras syfte. Föga oväntat tyckte de, liksom Sjöstedt, att skrivningarna borde mäta "matematisk begåvning". Det Sjöstedt gör motsvarar att försvara köttproduktion med hänvisning till köttbönder.

Tydligen ansågs vissa att matematikskrivningen 1950 var "orimligt svår". Angående detta skrev Sjöstedt att "det mesta av det som skrivits i pressen om ifrågavarande matematikskrivning och som kommit till min kännedom, härör från icke fackmän, främst journalister och målsmän". Det behövde med andra ord inte bemötas. Undantaget utgjordes av ett inlägg från Hjalmar Olsson. Det problem Sjöstedt ser med denna artikel är att den vänder sig till "den icke initierade allmänheten". Dessa kan, menar Sjöstedt, lätt förledas att tro på det Olsson skriver. Han ser som sin uppgift att korrigera och ge den fullständiga och riktiga bilden. Den skolans bild av skolan som bara skolan kan och har rätt att producera.[4]

[1] [TfSL 1942, s. 20, C. E. Sjöstedt: "Studentskrivningarna i matematik"]
[2] [ibid]
[3] [TfSL 1948, s. 152, C. E: Sjöstedt: "Studentskrivningarna i matematik"]
[4] [TfSL 1950, s. 173-174, C. E. Sjöstedt: "Den 'orimligt svåra' matematikskrivningen"]

Matematiken får kring 1930 en tydlig politisk funktion. Samtidigt uppstår mekanismer för att *skydda* skolmatematiken från politiken. Att Sjöstedt om och om igen får rycka ut till skolmatematikens försvar visar att detta försvar då ännu inte var institutionaliserat.

10.4. Skolans vetenskaper

Perioden från 1900 till 1960 var en tid med tilltagande centralisering, samtidigt som man utifrån skolmatematikens perspektiv kan säga att prestationer i matematik fick en växande betydelse som "gallringsinstrument" – vilket var en term man under denna period ofta använde för att beskriva utbildningssystemets sociala funktion. Nästan precis samtidigt som målet om en enhetlig skola genom inrättande av grundskolan (1962) och gymnasiet (1965) var på väg att nås förlorade emellertid den statliga byråkratin i vissa väsentliga avseenden kontrollen över detta system och en process av decentralisering inleddes.

Utbildningssystemet utsattes redan från början för skarp kritik. Många menade att det inte var lämpligt att *lärare* med hjälp av *prov* skulle avgöra vilka i den kommande generationen som skulle hamna på vilken plats i samhället. Än mindre självklart var det att prestationer i just matematik skulle spela en så central roll. Den centrala byråkratins talesmän hade svårt att få utbildningssystemets gallring att framstå som relevant – det vill säga att det verkligen placerade "rätt man eller kvinna på rätt plats" – och rättvis.

Ett problem utgjordes av det allt sedan sekelskiftet 1900 uppenbara avståndet mellan skolmatematiken och den vetenskapliga matematiken. C. E. Sjöstedt, skolmatematikens främste försvarare under 30 år från början av 1930-talet till början av 1960-talet, fick till exempel ingen lätt uppgift att lösa när tre av den svenska vetenskapliga matematikens främsta representanter (Gårding, Frostman, Pleijel) gick till storms mot vad de menade var en irrelevant skolmatematik.[1] Ett annat problem för skolmatematiken utgjordes av att den del av diskussionen som kretsade kring yngre barn inte hade något tydligt vetenskapligt stöd.

Under det att den svenska diskussionen under första halvan av 1900-talet i stor utsträckning kretsat kring elevernas prestationer, hade emellertid på andra håll i Europa, och i Amerika, ett antal vetenskaper tagit form som så att säga "passade" skolmatematiken. Den svenska diskussionen hade inte varit opåverkad av dessa vetenskaper, men det var inte förrän under 1950-talet, och framför allt mot slutet av 1950-talet, som dessa vetenskaper tog plats på den svenska skolmatematiska scenen. Det skedde då en ganska plötslig generationsväxling, som fick stöd av att motsvarande förändringar skedde samtidigt på andra håll i världen. Man talade om "Sputnikkrisen", det vill säga en rörelse i USA som satts igång med anledning av att Sovjetunionen 1957 lyckats skicka upp satteliten Sputnik i omloppsbana runt jorden.

De tre vetenskaper jag tänker på är: vetenskapen om prestationsmätning, vilken utgjorde en del av den matematiska statistiken, vetenskapen om barnets utveckling, och för det tredje den för matematiken speciella "matematikpedagogiken" eller som den senare kom att kallas "matematikdidaktiken".

Genom dessa vetenskaper kom skolmatematiken att få en vetenskaplig förankring, genom vilken den lättare kunde framstå som relevant och rättvis. Men denna förankring skedde till priset av en sorts arbetsdelning mellan den centraliserade byråkratin och ett antal nya "vetenskapliga fält".

Helt väsentligt för mitt resonemang är att denna förändrade struktur inte ledde till någon genomgripande förändring varken av den skolmatematiska undervisningspraktiken eller de grundläggande "retoriska figurr" vilka som vi sett i tidigare kapitel varit typiska för skolmatematiken alltsedan 1860-talet. De nya vetenskaperna kom snarast att så att säga "kapsla in" skolmatematiken, och genom sin vetenskaplighet göra den onåbar för den politiska diskussionen.

Till att börja med var det framförallt två grupper av vetenskaper som fick stor betydelse för skolmatematiken: vetenskaperna som kretsade kring mätning av människans egenskaper, och vetenskaper som kretsade kring barnet och dess utveckling. Karaktäristiskt för båda dessa grupper av vetenskaper är att de utgår från människan, och mer specifikt oftast barnet eller den unga människan, *så som hon framträder inom utbildningssystemet*. Vetenskapernas huvudsakliga effekt i förhållande till samhället var att de fick skolans objekt – för skolmatematikens del barnet och barnets prestationer i matematik – att framstå som vetenskapens föremål, det vill säga som objekt vars innebörd har en vetenskaplig förankring.

Vad gäller vetenskaperna om mätning har bland andra Theodore Porter visat hur dessa tog form i USA som ett instrument just för att upprätta en gräns mellan den nationella administrativa systemets insida och

[1] Lars Gårding et al., "Matematiken på det nya gymnasiet," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1953).

utsida.[1] I Sverige, i förhållande till skolmatematiken, tog de plats som ett sätt att göra utbildningssystemets prestationsmätningar objektiva, och därmed rättvisa.

10.5. Analys

Gallring stod i diskussionens centrum för den skolmatematiska diskussionen under första halvan av 1900-talet, och man svävade inte på målet angående att det fanns studenter "för teoretiska studier mindre lämpade", vilka endast genom matematiska prestationsmätningar kunde "effektivt utestängas eller utgallras".[2] Utbildningssystemet hade utformats för att fungera som ett gallringsinstrument, och det var i egenskap av sådant det försvarades. De "gallrande" examinationerna utformades därför inte enbart – eller inte ens i första hand – för att mäta i vilken mån eleverna behärskade att visst matematiskt stoff. Ett bemästrande av matematiskt stoff tycktes möjligt att nå enbart genom "flit och noggrannhet" – medan det man ville mäta istället var "matematisk begåvning".[3] Därmed kom, kan man säga, förmåga att lösa en viss typ av matematiska problem att framstå som en instrumentalisering av den i människan inneboende egenskap som skulle utgöra utgångspunkten för utbildningssystemets sorterande funktion.

En följd av prestationernas ökade sociala betydelse var att dessa hamnade i diskussionens centrum, snarare än det matematiska stoffet. Under 1900-talets första decennium hördes kritik mot "betygsstatistikens" utbredning.[4] Den tystnade dock snart och under 1930-talet fick statistik från real- och studentskrivningarna en självklar plats i skoltidningarna. Skrivningsresultaten blev, kan man säga, det främsta föremålet för den skolmatematiska diskussionen. Resultaten ersatte den tidigare publikationen av själva skrivningsuppgifterna, vilka tillsammans med några särskilt eleganta lösningar, utgjorde föremål för diskussion under andra halvan av 1800-talet. Frågor kring uppgifternas matematiska egenskaper ersattes av frågor kring i vilken mån de utgör goda mätinstrument. Fokus på prestationer tillkom därmed som ytterligare ett i raden av moment inom skolmatematiken som tagit fokus från det matematiska innehållet. Tidigare hade, som vi sett, bildningstänkandet och undervisningens praktiska ordnande utgjorde sådana moment.

Prestationernas betydelse ledde till en förskjutning inom den skolmatematiska diskursen rörande vilken typ av "matematiska kunskaper" som man menade att eleverna behövde. Som sagt talade man på ett övergripande plan om skolan som ledandes till två olika mål: dels att den skulle förbereda för fortsatta vetenskapliga studier, dels att den skulle ge eleverna praktiskt nyttiga kunskaper. För ernåendet av båda dessa mål kom man under 1900-talets lopp allt mer att betona förmågan att "snabbt och säkert" kunna lösa matematiska problem. Man börjar tala om matematiken som ett ämne där "den ständiga träningen och innötningen" är av största betydelse".[5] Under denna tid fick därmed faktiskt "mekanisk" färdighet för första gången i skolmatematikens historia ett övervägande positivt värde.

I diskussionen framgick det ofta relativt klart att det först och främst var förmågan att prestera inom utbildningssystemet som befrämjade av denna behandling av matematikämnet, men den ytterligare betoningen på övning motiverades också med hänvisning till högre mål. I diskussionen fokuserad på yngre barn kunde övandet givetvis liksom tidigare motiveras med hänvisning till vikten av att genom övning lägga en stadig grund för de fortsatta studierna. Högre upp i utbildningssystemet talade man om förmågan att snabbt och säkert göra uträkningar – helst i huvudet – som ett viktigt redskap i det praktiska livet. En viktig roll i argumentationen spelade även, som sagt, ganska vaga hänvisningar till matematik som tankegymnastik och övning på logiskt tänkande.

Avgörande för en förståelse av detta skede i den svenska skolmatematikens historia är att det var nu som matematiken blev en angelägenhet för hela samhället. I takt med att utbildningssystemet tog form utsträcktes det till hela det uppväxande släktet, som därmed – detta får man inte glömma – faktiskt blev tvunget att ägna sig åt matematik.[6] Förmåga att lösa skolans matematiska uppgifter fick nu stor betydelse för alla svenskar. Detta fick till följd att studierna intensifierades. På samma sätt som då det gällde de

[1] Gigerenzer, *The empire of chance: how probability changed science and everyday life*; Porter, *Trust in numbers: the pursuit of objectivity in science and public life.*
[2] C. E. Sjöstedt, "Studentskrivningarna i matematik," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1940).
[3] Ibid.
[4] A. B. C., "Betygsstatistiken," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1906).
[5] Gunnar Nordling, "Angående Realskolans matematikkurser," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1950).
[6] Det är för mig oklart i vilken mån skolplikten resulterade i aktivt motstånd. Se tex. "Bötesstraff för skolstrejk. Folkskolinspektörerna framhålla nödvändigheten av skärpta bestämmelser."

matematiska studierna vid kungliga krigsakademin på Karlberg under första halvan av 1800-talet kan man tala om ett sorts "blint engagemang" för att klara utbildningssystemets matematiska skrivningar. Väsentligt för mina syften är givetvis den betydelse båda dessa faktorer – för det första de matematiska studiernas utsträckande till hela befolkningen och för det andra intensifierandet av dessa studier – fick för utsträckandet av det jag kallar matematikens blick.

Alla de typer av matematiska studier som bedrevs inom utbildningssystemet bidrog på olika sätt till att måla upp en bild av en matematisk värld och ett samhälle inom vilken matematiken spelar en central roll. Från det allra mest grundläggande repetitiva räknandet och igenkännandet, uppmätandet och benämnandet av geometriska föremål, vilka leder till en föreställning om aritmetik och geometri som instrument för att fånga verklighetens "essens", till aritmetikens och algebrans behandling av stoff hämtat från samhällets olika sfärer, vilket leder till en bild av matematiken som allestädes närvarande i samhällslivet.[1]

Utbildningssystemet blev under 1900-talets lopp en av det svenska samhällets största offentliga institutioner. I och med den betydelsefulla roll som matematiken spelade *inom detta system* blev under detta skede skolmatematikens påstående att matematik spelar en viktig roll i samhället i en mening sant. Genom utbildningssystemets expansion blev matematiken i det närmaste allestädes närvarande, både som något man gör och som något man talar om, nämligen i skolan. Min teoretiska poäng är dock, som sagt, att den, genom det matematiska studiernas form, kom att *uppfattas* som närvarande på en annan plats och på ett annat sätt än i skolan.

Under den period som står i fokus för det här kapitlet, första halvan av 1900-talet, motiverades de matematiska studierna delvis med hänvisning till behovet av gallring, men denna gallrande funktion kunde bara framstå som legitim i den mån skolans matematik även kunde knytas till den matematiska vetenskapen. Detta blev dock tämligen problematiskt, eftersom den matematiska vetenskapens talesmän tenderade att betrakta skolmatematiken med allt annat än blida ögon.[2] Över huvud taget framstår den skolmatematiska diskussionen under denna tid som tämligen fragmentarisk, bortsett från den enande fokuseringen på elevernas prestationer. Man kan vid denna tid skilja mellan tre olika perspektiv på skolmatematiken. För det första ett ovanifrånperspektiv förankrat i den vetenskapliga matematiken. För det andra ett perspektiv förankrat i själva utbildningssystemet och dess gallrande funktion. För det tredje ett perspektiv med utgångspunkt i barnet. Fram till 1950-talet var det egentligen bara det första av dessa perspektiv som med framgång kunde göra anspråk på att tala i vetenskapens namn. Detta gjorde skolmatematiken svår att försvara.

Under hela perioden kan man följa en växande omsorg från utbildningssystemets och skolmatematikernas sida att dra en gräns mellan "lekmän" och "fackmän".[3] Man förde kort sagt en kamp för autonomi. För skolmatematikens del fördes denna kamp på flera fronter: dels gentemot övriga skolämnen, dels gentemot den matematiska vetenskapen, dels gentemot det omgivande samhället (t. ex. föräldrar). Beroende på hur man ser det, kan man antingen säga att denna strid, under perioden från 1950-1980 *vanns* eller att den *förlorades*. Klart är att utbildningssystemets struktur under denna period ytterligare en gång förändrades på ett genomgripande sätt. Utifrån mitt perspektiv skulle jag säga att striden förlorades. Fram till början av 1960-talet kan man följa en tilltagande centralisering, där en central byråkrati reser anspråk på att både planera och kontrollera utbildningssystemets sätt att fungera. Under 1960- och 1970-talet förlorade denna byråkrati i flera väsentliga avseenden makten över skolmatematiken. Vad som hände då kan enkelt uttryckas som att skolmatematiken fick en vetenskaplig förankring anpassad både till skolmatematikens funktion inom utbildningssystemet och den syn på bildning och vetenskap som nu sedan länge slagit rot i det omgivande samhället.

Det är inte svårt att se hur vetenskapen om mätning kom att samspela med vetenskapen om barnets utveckling för att ge utbildningssystemet en vetenskaplig förankring. Genom vetenskapen om mätning kunde utbildningssystemets sortering med utgångspunkt från prestationer att framstå som objektiv. Vetenskapen om barnet gav mätningarna en mening genom vilken sorteringen kunde framstå som relevant och legitim.

Det är dock viktigt att komma ihåg att båda dessa vetenskaper bara är möjliga med utgångspunkt från utbildningssystemet. Detta system, med sina upprepade prestationsmätningar och en kunskapssyn färgad av dessa mätningar, kom först. Vetenskaperna skall snarast förstås som en sorts utväxt i förhållande till

[1] Se Dowling, *The sociology of mathematics education: mathematical myths/pedagogic texts.*
[2] Se tex. Gårding et al., "Matematiken på det nya gymnasiet."
[3] T. ex. Sjöstedt, "Studentuppgifterna i matematik.", Henrik Petrini, "Studentexamens bibehållande," *Tidning för Sveriges Läroverk* (1924); Sjöstedt, "Den "orimligt svåra" matematikskrivningen."

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

detta system, som bidrar genom att producera en ström av mening rörande den verksamhet som tidigare, fram till 1960-talet, framstått som allt för meningslös för att kunna fortsätta. En omedelbar följd av de processer av vetenskapliggörande som tog fart i början av 1960-talet var att frågan om utbildningssystemets gallrande funktion försvann från diskussionen. Något förenklande kan man säga att man fick andra saker att tala om. Sedan växte ett myller av praktiker för vetenskaplig mätning och diskurser rörande tolkning av mätning fram, som fick utbildningssystemet att inte så mycket framstå som ett gallringsinstrument, utan som ett komplext system av praktiker för att hjälpa, stötta och korrigera en mångfald av på olika sätt avvikande beteenden. Skolans vetenskaper kom genast att framställa utbildningssystemet sociala funktion som sin egen värsta fiende, som de med hjälp av sina vetenskapliga metoder gjorde allt för att övervinna.

Helt väsentligt för mitt resonemang är hur detta sätt att tala om utbildningssystemet och skolmatematikens praktiska verklighet, följer det paradigm jag introducerade i kapitel 7. Vetenskaperna utgår från matematiken och barnet, som objekt med olika typer av egenskaper vilka framställs som huvudsakligen potentiella. Med detta som utgångspunkt framställs den faktiskt existerande verkligheten – vilken i viss mån naturligtvis ligger bortom vetenskapernas kontroll – som huvudsakligen defekt. Sedan presenteras vetenskapliga metoder, med vars hjälp den defekta praktiken kan förbättras.

På detta sätt kom vetenskaperna att understödja utbildningssystemet, genom att oupphörligen kritisera det. Skolmatematikens vetenskaper har kommit att framställa sig själva som skolmatematikens främsta kritiker, och har på så sätt undandragit skolmatematiken från varje annan form av kritik – vilken givetvis med nödvändighet måste framstå som, om inte ovetenskaplig så åtminstone oinitierad.

11. Slutsatser

11.1. Matematiken

- Våra nuvarande föreställningar om matematiken måste ses som ett resultat av en långsam historisk process som pågått sedan slutet av 1500-talet. Det är en process genom vilken matematiken successivt kommit att spela en allt viktigare roll för att konstituera västerlandets enhetliga världsbild.

11.2. Skolan

- Mot bakgrund av den historiska redogörelsen står det klart att den offentliga skolan spelat en avgörande roll för att understödja denna matematikens världsbild. Skolmatematikens praktiker är delvis formade med utgångspunkt från räknekonstens och den vetenskapliga matematikens särskilda egenskaper. Dessa har dock omformats i skolan, för att passa skiftande praktiska omständigheter och samhälleliga behov. Som en effekt av detta har skolan bidragit till att förskjuta och förändra bilden av matematiken, samtidigt som den utsträckt erkännandet av dess värde till allt större delar av samhället.

Bildningstänkandet

- I synnerhet bildningstänkandet, vilket ger mening till skolmatematikens praktiker, visar på skolmatematikens band till sitt förflutna. Det "kräver" att undervisningen: skall rikta sig till barn, kretsa kring den fysiska verkligheten, vara repetitiv och icke-diskursiv, men samtidigt intresseväckande rolig och lekfull, och så vidare – kort sagt allt det som gör det möjligt för den att konstituera matematiken som det objekt skolmatematikens samhälleliga funktion behöver.

Undervisningen och matematikens blick

- Skolmatematikens kännetecknande praktik, övning på matematikens tillämpning, väver samman matematiken med den fysiska och sociala verkligheten.

11.3. Samhället

- Det står klart att skolmatematiken fyller en rad praktiska funktioner, som att sysselsätta och sortera Sveriges barn och ungdomar. Den skolmatematiska praktiken är sådan att den genererar tro på en matematik som finns "där ute" i den sociala och fysiska verkligheten. Denna utgör sedan utgångspunkten för bedömning av såväl skolan som det samhälle den är en del av. Den matematik skolan konstituerar får både dess egna hierarkiserande praktiker och det hierarkiska samhälle den därmed bidrar till att reproducera att framstå som förankrade i en objektivt existerande matematiska verklighet.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

1957 års skolberedning, och Urban Dahllöf. *1957 års skolberedning, Statens offentliga utredningar, 1960:15*. Stockholm, 1960.
-id-. "Räknelära för folkskolor af C. A. Nyström." *Svensk Läraretidning* (1884): 321-22.
-k-. "Den första räkneundervisningen." *Pedagogisk Tidskrift* (1878).
A., A. "Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar af K. P. Nordlund." *Svensk Läraretidning* (1890): 308.
adn. "Är professor Keys fordran på en reform af den naturvetenskapliga undervisningen vid våra läroverk berättigad?" *Pedagogisk Tidskrift* (1875): 57-78.
Agrelius, Nicolaus. *Institutiones arithmeticae, eller Kårt underwisning, om de förnämsta och högnödigsta reglor, exempel, italienska practiquer och compendier, som i dagelig räkning mäst brukelige äro. Dem konst-älskadom! til nytto och gagn sammanskrefwen*. Stockholm, 1754 [1655].
———. *Institutiones arithmeticae, eller Kårt underwisning, om de förnämsta och högnödigsta reglor, exempel, italienska practiquer och compendier, som i dagelig räkning mäst brukelige äro. Dem konst-älskadom til nytto och gagn sammanskrefwen: af Nicolao P. Agrelio. Men nu förökt med några kårtare räkne-sätt, samt tydelig underrättelse om wäxel-räkningar och italienska bokhålleriet. Stockholm, Tryckt i Langeska Tryckeriet 1798*. Stockholm, 1798 [1655].
Alder, Ken. *Engineering the revolution: arms and enlightenment in France 1763-1815*. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1997.
———. "French Engineers Become Professionals; or, How Meritocracy Made Knowledge Objective." I *The Sciences in Enlightened Europe*, redigerad av William; Golinski Clark, Jan; Schaffer, Simon. Chicago & London: The University of Chicago Press, 1999.
Almqvist, Carl Jonas Love. *Lärobok i geometrien: innefattande grunderna för läran om linier, ytor (planimetri och landtmäteri), solida figurer (stereometri), samt deskriptiv geometri*. 3. uppl., öfversedd och tillökad utg. Stockholm: Hörberg, 1842 [1833].
———. *Lärobok i geometrien, innefattande grunderna för läran om Linier, Ytor Planimetri och Landtmäteri, solida Figurer Stereometri utgörande en ny bearbetning af Chr. Wolffs Anfangsgrnde allre mathematischen Wissenschaften 1 Th II Abschn.* Stockholm: Johan Hörberg, 1833.
———. *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*. Stockholm: Johan Hörberg, 1834 [1832].
———. *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*. Stockholm, 1832.
———. *Räknekonst för begynnare eller praktisk aritmetik*. 3. uppl. utg. Stockholm: W. Isberg, 1837.
Alreik, Anders. *Theoret. praktisk lärobok i elementar-geometrien och plana trigonometrien. Till Landtmätares, Skol-Lärares samt den Studerande ungdomens m. fl. tjenst*. Stockholm: Hörbergska tryckeriet, 1837.
———. *Theoret. praktisk lärobok i landtmäteriet. Till Landtmätares, lantbrukares, juristers och kameralisters m. fl. tjenst*. Stockholm: Hörbergska tryckeriet, 1843.
Andersson, Roloff. *Arithmetica tironica, eller Kort och grundlig anwisning at practice lära all nödwändig hus- och handels-räkning; efter den nu för tiden mäst brukliga och fördelaktigaste läromethode, til allmänhetens och i synnerhet scholarnes tjenst: och nytta, efter sednaste kongl. maj:ts mynt-ordning*. Örebro, 1830 [1779].
———. *Genwäg till borgerliga räkne-konsten*. 8. uppl. utg. Örebro, 1843.
Anjou, Christofer Ludvig, Carl Kastman, och Knut Arvid Kastman. *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Pedagogik.* 4. uppl. utg. Karlstad, 1876.
Anjou, Christofer Ludvig, Carl Kastman, Knut Kastman, och Albrekt Segerstedt. *Bidrag till pedagogik och metodik för folkskolelärare. Häftet V. Metodik: Räknekonsten i Folkskolan.* Stockholm: Hjalmar Kinbergs förlagsexpedition, 1876.
Anvisningar och råd till Lärare, angående tillämpningen af de till Nådiga Stadgan för Rikets allmänna Elementarläroverk af den 29 januari 1859 hörande undervisningplaner. 1859.
Anvisningar och råd till lärare, om sättet att verkställa hvad Kongl.: Maj:t i nåder uti skol-ordningen af den 16 Dec. 1820 stadgat och anbefallt. Bihang till uppfostrings-comiteens underdåniga förslag till skol-lag.Sthlm 1821. <S.l.>.
Aurelius, Aegidius Matthiae. "Arithmetica Eller Een Kort och Eenfaldigh Räknebook uthi helle och brutne Taal." I *Minnen och dokument*, redigerad av Bengt Johansson, 23, [1], clix. Uppsala: Fören. för svensk undervisningshistoria, [1614] 1995.
Barthes, Roland. *Mytologier*. 1. uppl., ny tr. utg., *Boc-serien*. Staffanstorp; Solna: Cavefors; Seelig, 1969.
Beckmark, Nils Petter. *Arithmetik, af Nils Petter Beckmark. Stockholm, tryckt hos Anders Zetterberg, 1795*. Stockholm, 1795.
———. *Utkast til föreläsningar öfver algebra, utgifvit af Nils Peter Beckmarck. Stockholm, tryckt hos Anders Zetterberg, 1794*. Stockholm, 1794.
Berg, Alfred. *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*. Stockholm: Fritze, 1888.

———. *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*. 12. uppl. utg. Stockholm: Fritze, 1902.
———. *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*. 10. uppl. utg. Stockholm, 1898.
———. *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor*. 5. uppl. utg. Stockholm: Fritze, 1886.
———. *Räknelära för folkhögskolor och folkskolor*. Stockholm: Fritze, 1877.
Berg, Alfred, och Karl Hagström. *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*. Stockholm, 1911.
Berg, Alfred, Karl Hagström, och Elis Hjalmar. *Räknelära för de allmänna läroverken och flickskolor*. 8. uppl. / utg. Stockholm, 1930.
Berg, Bernhard Alfred. *Berg-Hagström: Räknelära för allmänna läroverk och flickskolor. Tillägg till Berg-Hagström: Räknelära.: Andra delen. Av Elis Hjalmar. Med Svar.* Stockholm, 1949.
———. *Folkskolans räknelära*. Stockholm: Fritze, 1889.
Berg, Bernhard Alfred, och Karl Hagström. *Räknelära för allmänna läroverk och flickskolor.: Förberedande skolans kurs. Utarb. av Elis Hjalmar. Med svar.* Stockholm, 1934.
Bergius, Anders Theodor. "Är tiden inne, att åt naturvetenskaperna anvisa deras rätta plats inom skolan?" *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1849): 76-84.
Bergius, Axel Theodor. *Elementarkurs i algebra, innefattande läran om 1:a och 2:a gradens eqvationer*. Stockholm, 1853.
———. *Elementarkurs i räknekonsten jemte öfningar i hufvudräkning*. Stockholm, 1850.
———. *Elementarkurs i räknekonsten. Förra afdelningen*. Stockholm, 1850.
———. *Geometri och linearteckningar, utur åskådningen utvecklad, och för den första undervisningen utarb*. Stockholm, 1850.
———. "Om elementarundervisningen i matematik." *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1850).
———. "Om skolundervisningen i Matematik." *Pedagogisk Tidskrift* (1868): 212-26.
———. "Svar till Hr Otterström med anledning af hans replik." *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1849): 364-66.
———. "Utkast till Lärobok i Aritmetiken för skolor i allmänhet och
folkskolor i synnerhet, af J. Otterström Apologist. Stockholm 1849, på Z.
Haeggströms förlag." *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1849).
Bergmarck, Johan. *Svensk räkne-bok, eller et sådant räknesätt, hvarigenom alla.hushåldnings-mål kunna.vederbörligen utredas*. Stockholm, 1755.
Bergsten, Abel. *Folkskolans räkneundervisning: kurser och arbetssätt: en utredning, Pedagogiska skrifter, 163*. Lund, 1939.
Biagioli, Mario. "The social status of italian mathematicians, 1450-1600." *History of Science* 22 (1989): 41-68.
Bien, David. "Military Education in 18th-Century France: Technical and Non-Tehnical Determinants"." I *Science, Technology and Warfare: Third Military History Symposium*, redigerad av Monte and L. Paszek. Wright. Washington, D.C: General Publishing Office, 1969.
Bjerknes, V. "Om matematiken i skolen." *Skolan*, no. 1 (1901): 241-52.
Björling, E. G. *Elementar-lärobok i Algebra, af E. G. Björling, Ph. Mag., Lärare i Mathematik vid Hillska Skolan å Barnängen*. Stockholm: Tryckt hos Johan Hörberg, 1832.
———. "Några reflexioner, beträffande elementarundervisningen i mathematik, i anledning af den i Bihang till paedagogisk tidskrift intagna berättelsen om Rektorsmötet 1868." *Pedagogisk Tidskrift* (1869): 59-70.
Blidberg, A. H. "Geometrin på latinlinjen." *Pedagogisk Tidskrift* (1904): 347-50.
Bonnesen, T. "Om Geometriundervisning paa Grundlag af Erfaringen." *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* (1920): 1-9.
Brun, Frans de. "Några ord om matematiken och matematikundervisningen i våra elementarskolor." *Pedagogisk Tidskrift* (1908): 287-94.
Bråkenhielm, Per Reinhold, och Euklides. *De sex första samt elfte och tolfte böckerna af Euclidis Elementa jemte planimetri, stereometri och geometriska problem*. Örebro: Lindh, 1844.
Bucht, G. W.; Svensk, J. A. *Anteckningar i räknemetodik för folkskolan och småskolan*, 1894.
Burnyeat, M. F. "Plato on Why Mathematics is Good for the Soul." I *Mathematics and necessity: essays in the history of philosophy*, redigerad av Timothy Smiley och British Academy, x, 166. Oxford: Oxford University Press, 2000.
Butler, Judith, Slavoj Zizek, och Ernesto Laclau. *Contingency, hegemony, universality: contemporary dialogues on the left, Phronesis (London)*. London: Verso, 2000.
"Bötesstraff för skolstrejk. Folkskolinspektörerna framhålla nödvändigheten av skärpta bestämmelser." *Folkskollärarnas tidning* (1927): 87.
C., A. B. "Betygsstatistiken." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1906).
Carlsson, F. F.; m. fl. "Rektors-mötet 1868 [avdelning C: Mathematik]." *Pedagogisk Tidskrift* (1868).

Carlsson, Magda. "Räkneundervisningen." *Småskolan* (1929): 292.
Cartwright, Nancy. *The dappled world: a study of the boundaries of science*. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.
———. *How the laws of physics lie*. Oxford: Clarendon Press, 1983.
Cassel, Gustav. "Om den Euklidiska geometrin såsom undervisningsämne." *Pedagogisk Tidskrift* (1892).
Celsius, Anders. *Arithmetica Eller Räkne-konst, Til En Grundelig Inledning För Swea-Rikes Ungdom Utgifwen af And. Celsius Mathes. Prof. wid Kongl. Acad. och Secret. wid Kongl. Wetensk.Societ. i Upsala*. Stockholm: Hos Gottfried Keisewetter, Kongl. Academ. Bokhandlare i Upsala, 1741 [1727].
Clark, William. "The Death of Metaphysics in Enlightened Prussia." I *The Sciences in Enlightened Europe*, redigerad av William; Golinski Clark, Jan; Schaffer, Simon. Chicago & London: The University of Chicago Press, 1999.
Dahlgren, Harald. "Die Mathematik an den Volksschulen und volksschullehrerseminarien Schwedens." *Pedagogisk Tidskrift* (1911).
Dahlgren, Torsten. *Om undervisning i räkning*. Stockholm: Norstedt, 1924.
Dahllöf, Urban. "En empirisk kursplaneundersökning. Skolkurser och samhällskrav." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1957): 371-72.
———. "Nya enkäter från lärarhögskolan." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1958): 437.
Dahm, O. E. L. *Skolmästarkonst. Antydningar för Lärare och Skolinspektörer*. Kalmar: August Westin, 1846.
Dalin, Emil. "Provräkning som undervisningsmedel." *Småskolan* (1927): 390.
Dalström, J. J.;Jonsson, Alexander; Wennerqvist, F.; Edén, L. A. *Granskning af läroböcker i aritmetik, verkstäld af komiterade, utsedde af Stockholms folkskollärareförening*. Stockholm: C. E. Fritzes bokh., 1883.
Dear, Peter. "From Truth do Disinterestedness in the Seventeenth Century." *Social Studies of Science* 22, no. 4 (1992): 619-31.
———. "Jesuit mathematical science and the reconstitution of experience in the early secenteenth century." *Studies in History and Philosophy of Science* 18, no. 2 (1987): 133-75.
———. *Mersenne and the learning of the schools, Cornell history of science series*. Ithaca, N.Y.: Cornell University Press, 1988.
Dear, Peter Robert. *Discipline & experience: the mathematical way in the scientific revolution, Science and its conceptual foundations*. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1995.
Delander, J. *Lärobok i elementerne af algebra: innefattande första och andra gradens eqvationer, jemte logarithmer och serier*. Stockholm, 1836.
Descartes, René. *Discourse de la méthode*. Paris: Flammarion, [1637] 2000.
Dewey, John. "Mitt pedagogiska credo." I *Individ, skola och samhälle. Pedagogiska texter av John Dewey.*, redigerad av Ulf P. Lundgren och Sven G. Hartman. Stockholm: Natur och Kultur, 1980 [1897].
Dowling, Paul. *The sociology of mathematics education: mathematical myths/pedagogic texts, Studies in mathematics education series, 7*. London: Falmer, 1998.
E., B. "Provräkningsuppgifter till Folkskolans Räknebok. Av Värnder Rydén och Hedvig Norgren. 5:e delen. 7:e årsklassen och fortsättningsskolan." *Svensk Läraretidning* (1930): 403.
Eamon, William. *Science and the secrets of nature: books of secrets in medieval and early modern culture*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1994.
Ecklesiastikdepartementet. *Betänkande med undersökningar och förslag i anledning av tillströmningen till de intellektuella yrkena. SOU 1935:52, Statens offentliga utredningar*, 1935.
Edlund, Erland, m. fl. *Underdånigt betänkande och förslag afgifvet den 17 december 1858 af den för granskning af 1856 års Skol-Stadga i nåder förordnade Komité*. Stockholm, 1858.
Ehlin, Erik. *Lärobok i räkning: för barndomsskolans 1:a -7:e årsklass*. Ny uppl. utg. Stockholm: Ehlin, 1918.
Elowsson, Gullbrand. *Elementar-lärobok i aritmetik*. Uppsala, 1868.
———. "Om den aritmetiska undervisningsmetoden. 1 Diskussion om undervisningen i aritmetik." *Tidskrift för matematik och fysik* (1868): 294-97.
———. "Om den aritmetiska undervisningsmetoden. 1 Diskussion om undervisningen i aritmetik." *Tidskrift för matematik och fysik* (1869): 40-.
Emanuelsson, Göran. *Svårt att lära - lätt att undervisa? om kompetensutvecklingsinsatser för lärare i matematik 1965-2000, NCM-rapport, 2001:3*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs universitet, 2001.
en, ny. "Om matematik såsom undervisningsämne för flickor, I och II." *Tidskrift för Hemmet* (1865).

Ericsson, Elsa. *Barnens räknearbete under de sex första skolåren: metodiska anvisningar för lärare*. Stockholm: Bonnier, 1928.
———. "Nya vägar i matematikundervisningen. Rön och experiment ur min praktik." *Svensk Läraretidning* (1925).
———. "Några synpunkter på den grundläggande räkneudnervisningen." *Svensk Läraretidning* (1931): 403-04.
Erikson, Kenneth, Claes Johnson, Mats G. Larsson, Anders Logg, och Nils Svanstedt. ""Inte så himla viktigt kunna matematik"." *Dagens Nyheter*, 2004-10-31 2004.
Ernest, Paul. *The philosophy of mathematics education, Studies in mathematics education series, 1*. London: Falmer, 1991.
Falck, Henrik. *Practisk lärobok i arithmetiken med fullständig underrättelse om in- och utrikes mått, mål, vigt och mynt*. Upsala: Palmblad & c., 1830.
———. *Practisk lärobok i geometrien och trigonometrien med strängt bevis i läran om parallela linier*. Upsala: Palmblad, 1831.
Feyerabend, Paul K. "Classical empiricism." I *The Methodological Heritage of NEWTON*, redigerad av Robert E. Butts och John W. Davis, 150-70. Oxford: Basil Blackwell, 1970.
Fichte, Johann Gottlieb. *Tal till tyska nationen*. Stockholm: Albert Bonniers förlag, 1914 [1807/1808].
Fineman, Carl Olof. *Anvisning till folkscholors organisation och ledning efter wexelunderwisnings-methoden*. Stockholm, 1830.
———. *Inledning till geometrien jemnte linear-tecknings öfningar för folkscholor*. Stockholm: P. A. Norstedt & söner, 1832.
———. *Lärobok uti räknekonsten, lämpad efter vexelundervisnings-methoden*. Stockholm, 1826.
———. *Lärobok uti räknekonsten, lämpad efter vexelundervisnings-methoden.: 1:a - 3: cursen. 2:a uppl*. Stockholm, 1833.
"Folkskolebetygens praktiska betydelse." *Svensk Läraretidning* (1895): 35.
Forssell, Olof H. *Algebra för Begynnare. Författad och utgifven af Olof H. Forssell, Lector i Mathem. vid Kongl. Krigs-Academien*. Stockholm: Tryckt hos Carl F. Marquard, 1801.
———. *Arithmetik för Begynnare. Författad och utgifven af Olof H. Forssell, Professor och Kyrkoherde.* Stockholm: Tryckt hos A. Gadelius, 1818.
Foucault, Michel, Per Magnus Johansson, och Britta Gröndahl. *Sexualitetens historia*. Ny utg. / utg. Göteborg: Daidalos, 2002 [1976].
Fr. "Provräkningsuppgifter till Folkskolans räknebok av Värner Rydén, Karl Frank och Hedvig Norgren. Första-fjärde delarna. Fjärde-sjätte årsklassernas kurser." *Svensk Läraretidning* (1928): 785.
———. "Räknebok för folkskolan af L. T. Larsson, seminarieadjunkt, och N. Lundahl, folkskollärare. Tredje och fjärde årskurserna." *Svensk Läraretidning* (1890): 251.
———. "Räknebok för folkskolorna af K. O. Sjölander och A. G. Vihlander. Häft. III och IV. Stockholm, P. A. Nordstedt söners förlag." *Svensk Läraretidning* (1890): 310-11.
———. "Räknebok för folkskolorna utarbetad med ledning af folkskoleläroboksskommitténs grundsatser af K. O. Sjölander och A. G. Vihlander. Häft. III och IV. Stockholm, P. A. Nordstedt söners förlag." *Folkskolans vän* (1890): 5-6.
———. "Räknelära för folkskolan framstäld genom exempel enligt eqvationsmetoden af J. Thysell och P. Nordström. Första årskursen." *Svensk Läraretidning* (1888): 451-52.
———. "Räknelära för folkskolan, framstäld genom exempel enligt eqvationsmetoden af J. Thysell och P. Nordström. Första årskursen." *Svensk Läraretidning* (1888): 451-52.
———. "Sjölander-Vilanders räknebok." *Svensk Läraretidning* (1890): 376-77.
———. "Svar [till K. O. Sjölander]." *Svensk Läraretidning* (1890): 409.
———. "Svar [till Thysell och Nordström]." *Svensk Läraretidning* (1889): 16-17.
———. "Thysell-Nordströms räknelära. Svar på "protester och medgifvanden"." *Svensk Läraretidning* (1889): 46.
"Från Pedagogiska sällskapets i Stockholm förhandlingar. Den första undervisningen i geometri." *Verdandi* (1898): 198-203.
Frängsmyr, Tore. *Wolffianismens genombrott i Uppsala: frihetstida universitetsfilosofi till 1700-talets mitt, Skrifter utgivna till Uppsala universitets 500-årsjubileum. 2, Studier, 3*. Uppsala, 1972.
Frängsmyr, Tore, John L. Heilbron, och Robin E. Rider. *The quantifying spirit in the 18th century, Uppsala studies in history of science, 7*. Berkeley; Los Angeles; Oxford: Univ. of California Press, 1990.
Fröbel, Friedrich, och Jan-Erik Johansson. *Människans fostran*. Lund: Studentlitteratur, 1995.
Funkenstein, Amos. *Theology and the scientific imagination from the Middle Ages to the seventeenth century*. Princeton, N.J.: Princeton University Press, 1986.

Förhandlingar vid Femte Allmänna Svenska folkskolläraremötet i Gefle den 25, 26, och 27 Juli 1865. 1865.
Gallander, Otto. "Om geometriundervisningen i England." *Verdandi* (1902): 122-27.
———. "Om lösning af reguladetriuppgifter medelst ekvationer." *Skolan*, no. 1 (1901): 21-25.
Gascoigne, John. "From Bentley to the Victorians: The Rise and Fall of British Newtonian Natural Theology." *Science in Context* 2, no. 2 (1988): 219-56.
———. "Mathematics and Meritocracy: The Emergence of the Cambridge Mathematical Tripos." *Social Studies of Science* 14 (1984): 547-84.
Gaukroger, Stephen. *Explanatory structures: a study of concepts of explanation in early physics and philosophy*, *Harvester studies in philosophy*. Atlantic Highlands, N.J.: Humanities, 1978.
Giard, Luce. "Remapping knowledge, reshaping institutions." I *Science, culture and popular belief in Renaissance Europe*, redigerad av Stephen Pumfrey, Maurice Slawinski och Paolo Rossi, 19-47. Manchester: Manchester Univ. Press, 1991.
Gigerenzer, Gerd. *The empire of chance: how probability changed science and everyday life*, *Ideas in context, 12*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989.
Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande. Stockholm: Kongl. boktryckeriet, 1887.
Granskning af läroböcker för folkskolan: jemte grundsatser för deras uppställning: underdånigt utlåtande. Räkning. Stockholm: Kongl. boktryckeriet, 1887.
Great Britain. Committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools, och W. H. Cockcroft. *Mathematics counts: report of the Committee of inquiry into the teaching of mathematics in schools under the chairmanship of W.H. Cockcroft*. London: HMSO, 1982.
Green, Sven. "Barnens primära räkneövningar osm uppgift för grupparbete." *Skola och Samhälle* (1959): 171-76.
Gringas, Yves. "What did mathematics do to physics?" *History of Science* 39 (2001): 384-416.
Gräns, Johan. *Undervisning uti räknekonsten, lämpad så väl til de okunniges som mera kunniges begrep, grundeligen och på et tydligt samt lätt sätt innefattande handels-och hushålls-räkning*. Stockholm, 1801.
Gustafsson, Lars, och Lars Mouwitz. *Vuxna och matematik: ett livsviktigt ämne*, *NCM-rapport, 2002:3*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs univ., 2002.
Gustrin, E. F. "Euklides Elementa." *Pedagogisk Tidskrift* (1881): 141-53.
Gårding, Lars, Otto Frostman, Åke Pleijel, och C. E. Sjöstedt. "Matematiken på det nya gymnasiet." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1953): 488-91.
Göransson, Edvard. "Bidrag till kännedom om undervisningen i Sverige under 1800-talet." I *Redogörelse för Stockholms samgymnasium*, redigerad av O. G. A.;Lindqvist Hahr, J. M. Stockholm, 1905.
———. "Nyare riktlinjer för matematikundervisningen." I *Årsredogörelse för högre realläroverket å Norrmalm*, redigerad. Stockholm, 1907.
Haase, Hermann, och Petrus Norberg. *Den första räkneundervisningens metodik*. 3 uppl. / utg., *Pedagogiska skrifter, 65*. Lund: Lindstedts bokh., 1913.
Hacking, Ian. *The emergence of probability: a philosophical study of early ideas about probability, induction and statistical inference*. London: Cambridge U.P., 1975.
———. *The taming of chance*, *Ideas in context, 17*. Cambridge: Cambridge University Press, 1990.
Hagström, P. *Nyckel till Hagströms räknestafvar*. Trelleborg? 1885.
———. *Nyckel till Hagströms räknestafvar: anvisningar till stafvarnes uppställning till 3.000 räkneexempel för tyst öfning i småskolan*. 2. uppl. utg. Trelleborg: Utg., 1889.
Hamilton, William. "On the study of mathematics as an excercise of mind." I *Discussions on philosophy and literature, education and university reform*, redigerad, 262-340. London: Longman, Brodn, Green and Longmans, 1853.
Hassler-Göransson, Carita, Ossian Åhström, Frits Wigforss, 1939 års betygssakkunniga, och Ecklesiastikdepartementet. *Betänkande med utredning och förslag angående betygssättningen i folkskolan*, *Statens offentliga utredningar, 1942:11*. Stockholm, 1942.
Hatami, Reza. *Reguladetri: en retorisk räknemetod speglad i svenska läromedel från 1600-talet till början av 1900-talet*, *Reports from MSI, 07005*. Växjö: Växjö universitet, 2007.
Hedstöm, J. S. "Om geometriundervisningen i realskolans 4:e klass." *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* (1919).
hgm. "Om tysta öfningar i räkning (inom talområdet 1-1000)." *Folkskolans vän* (1885).
Hilbert, David. *Grundlagen der Geometrie*. Leipzig: Teubner, 1899.
Hultman, F.W. "Anmälan af tio stycken räkneböcker." *Tidskrift för matematik och fysik* (1868): 233-44.
———. "P. A. Siljeströms Lärobok i geometrin till folkskolornas tjenst. Stockholm 1867." *Pedagogisk Tidskrift* (1867): 382-85.

———. "Svenska aritmetikens historia." *Tidskrift för matematik och fysik* (1871).
———. "Svenska aritmetikens historia." *Tidskrift för matematik och fysik, 1868-1870, 1874*.
Husén, Torsten, och Urban Dahllöf. *Matematik och modersmålet i skola och yrkesliv: studier av kunskapskrav, kunskapsbehållning och undervisningens uppläggning*. Stockholm: Studieförb. Näringsliv o. samhälle, 1960.
Husén, Torsten, Anders Olsén, Ruth Wikström, och Sven Ingvar. *Räkenboken: 4-6 skolåren*. Stockholm: Svenska bokförlaget, 1958.
Husserl, Edmund. "Philosophie der Arithmetik." I *Husserliana. Edmund Husserl. Gesammelte Werke. Band XII: Philosophie der Arithmetik.*, redigerad av Lothar Eley. Haag: Martinus Nijhoff, 1970 [1891].
Håstad, Matts. *Matematikutbildningen från grundskola till teknisk högskola i går - idag - i morgon: Training in mathematics from grade school to technical university yesterday - today - tomorrow, Trita-EDU, 016*. Stockholm, 1978.
Illich, Ivan. *Deschooling society, World perspectives, 44*. New York: Harper & Row, 1972.
J-n, J. "Folkskolans geometri af J. E. Johansson, folkskollärare." *Folkskolans vän* (1890): 276-77.
"J. H. Pestaozzi och hans uppfostrings-grundsatser." *Tidskrift för Folkskolelärare och Folkskolebildningens vänner* (1849): 199-206.
Johansson, Bengt; m. fl. *Hög tid för matematik, NCM-rapport, 2001:1*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs univ., 2001.
Johansson, Jan-Erik. "Om räkneundervisningens i folkskolan." *Folkskolans vän* (1889): 14-32.
Jonsson, K. G. *Undersökningar rörande problemräkningens förutsättningar och förlopp*, 1919.
Josephson, Olof. "Till frågan om gymnasiets matematikkurser." *Pedagogisk Tidskrift* (1905): 301-08.
Kaleen, Gustaf, och Föreningen för svensk undervisningshistoria. *Sveriges första folkskollärarförening: ett bidrag till den pedagogiska och didaktiska diskussionen vid mitten av 1800-talet, Årsböcker i svensk undervisningshistoria, 46(1966); 116*. Stockholm: Föreningen för svensk undervisningshistoria, 1966.
Karlström, Gustav. "Räkneprov för folkskolan." *Folkskollärarnas tidning* (1927): 161.
Kastman, Carl. "Bör läraren aldrig använda något af barnen till hjelp vid undervisningen?" *Folkskolans vän*, no. 8 (1872): 116-20.
———. "De tysta öfningarna i Folkskolan." *Tidning för Folkskolan* (1877): 72-77.
———. "De tysta öfningarna i skolan." *Tidning för Folkskolan* (1877?): 229-34.
———. "De tysta öfningarna i skolan." *Folkskolans vän* (1872): 229-34.
———. "Om tysta öfningar i räkning." *Folkskolans vän* (1886): 3-5.
———. "Ytterligare om "de tysta öfningarna"." *Tidning för Folkskolan* (1879): 209-15.
Kastman, Karl. "Om åskådningsundervisningen." *Tidning för Folkskolan* (1875): 55-60.
Kastman, Knut Arvid. "Samling af Räkneexempel, till Folkskolornas tjenst utgif." *Folkskolans vän* (1874): 292-93.
———. "Samling af Räkneexempel, till Folkskolornas tjenst utgif." *Folkskolans vän* (1871): 132-33.
Kellin, S. O. *Den omutlige monitören: gm hvilken läraren kontrollerar utan facitbok uträkningen af Räknenötter*. Höör: Förf., 1878.
———. *Nya räknenötter*. Höör: Förf., 1881.
Kellin, Sven. "Ett strå till frågan om "de tysta öfningarne"." *Tidning för Folkskolan* (1879): 281-83.
Kellin, Sven O. *Anvisning vid användandet af "Nyaste räknenötter" jämte själfkontrollerande facit.* Malmö, 1897.
———. *Nyaste räknenötter: praktisk räknebok med själfkontrollerande facit*. Stockholm: Bille, 1898.
Kilpatrick, Jeremy, och George M. A. Stanic. *A history of school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003.
Kjellberg, K. R. "Undervisningen i räkning med decimaler." *Svensk Läraretidning* (1886).
Kjellin, Carl Eric. *Grunderna till Arithmetiken, innehållande, jemte dess Tillämpning till alla vanligen förefallande Räkningar, åtskilliga andra, Genvägar till deras förenklande, särdeles genom Decimal-Räkningen, samt Flera Reductions-Tabeller. Författade och utgifna af Carl Eric Kjellin, Prof. i Mathem. i Lund, L. K. W. A. etc.* Stockholm: Tryckta hos Elmén och Granberg, 1816.
Klein, Felix, och Ernst Hellinger. *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus, Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften; 14-16*. Berlin: Springer, [1908] 1968.
Kommissionen för behandling af åtskilliga till undervisningen i matematik och naturvetenskap inom elementarläroverken hörande frågor. *Underdånigt betänkande*. Stockholm, 1872.
Kongl. Maj:ts nådiga Stadga angående Afgångs-examen wid Rikets högre Elementar-lärowerk; Gifwen Stockholms Slott den 11 April 1862. Swensk författnings-Samling, 1862.
Kongl. Maj:ts Nådiga Stadga angående folk-underwisningen i Riket; Gifwen Stockholms Slott den 18 Junii 1842. Falun: J. S. Åkerbloms Boktryckeri, 1844.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Kristiansson, Margareta. *Matematikkunskaper Lgr 62, Lgr 69: Knowledge of mathematics curriculum 62, curriculum 69, Göteborg studies in educational sciences, 29*. Göteborg: Acta Universitatis Gothoburgensis, 1979.

Kruse, Anna. *Åskådningsmatematik: Ett försök till plan för de fyra första skolårens arbete på matematikens område*. 2. uppl. utg. Stockholm: Norstedt, [1910] 1921.

Kuhn, Thomas S. "Mathematical vesus Experimental Traditions in the Development of Physical Science." I *The Essential Tension*, redigerad av Thomas S. Kuhn, 31-65. Chicago och London, 1977.

Kungl. Maj:t. *Kongl. maj:ts förnyade nådiga skol-ordning; gifwen Stockholms slott den 16. december 1820. Cum gratia & privilegio s:ae r:ae maj:tis. Stockholm, tryckt i kongl. tryckeriet, 1821*. Stockholm, 1821.

L., K. E. "Ett pedagogiskt experiment." (1900): 338.

Laclau, Ernesto, och Chantal Mouffe. *Hegemony & socialist strategy*. London: Verso, 1985.

Larsson, Esbjörn. *Från adlig uppfostran till borgerlig utbildning: Kungl. krigsakademien mellan åren 1792 och 1866, Studia historica Upsaliensia, 220*. Uppsala: Acta Universitatis Upsaliensis: Uppsala University Library distributör, 2005.

Laurin, P. G. "Om matematiken och fysiken i kommittébetänkandet." *Skolan*, no. 2 (1902): 252-64.

———. "Är skollagskommitténs förslag rörande den matematiskt-naturvetenskapliga undervisningen tidsenligt?" *Verdandi* (1891): 57-77.

Lave, Jean. *Cognition in practice: mind, mathematics and culture in everyday life*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988.

Lavén, Abraham Wilhelm. *Lärobok uti mathematik: bok 1. räknelära, Handbok uti sjövetenskapen, 1*. Stockholm, 1842.

———. *Lärobok uti mathematik.: Bok 1. Räknelära. 2:a uppl. 1. Arithmetik och algebra till läran om eqvationer; jemte kort tillägg om serier ochlogarithmer samt en tabell öfver mått, vigter och mynt*. Stockholm, 1852.

Lindberg, Bo. *Humanism och vetenskap: den klassiska filologien i Sverige från 1800-talets början till andra världskriget, Lychnos-bibliotek, 37*. Grillby; Stockholm: Lärdomshistoriska samf.; Almqvist & Wiksell International distributör, 1987.

Lindblom, L. C. "Om öfverensstämmelse mellan form och innehåll vid räkneundervisningen." *Folkskolans vän* (1884): 3.

———. "Räknestafvar af P. Hagström. Utgifvarens förlag, Kyrkoköpinge, Trelleborg." *Folkskolans vän* (1885): 3.

Lindgren, G. E. "Den första räkneundervisningen. Talbegreppet måste vila på konkret underlag." *Svensk Läraretidning* (1936): 995-96.

Lindhagen, A.;m. fl. "Räkneundervisningen." *Svensk Läraretidning* (1895): 578-79.

Lithander, C. L. *Aritmetik och Euklides' Elementer uti Geometrien*. Stockholm: Tryckt hos Carl Delén, 1814.

Lundqvist, Evert, och Stig Persson. *Lärobok i räkning*. Stockholm: V. Petterson, 1951.

Läroverkskommittén. *Betänkande afgifvet den 8 december 1902 af den för utredning af vissa frågor rörande de allmänna läroverken den 26 maj 1899 i nåder tillsatta kommitté*. Stockholm, 1902.

m. "Lärobok i Aritmetik. Till skolornas tjenst utgifven af P. A. Siljeström." *Svensk Läraretidning* (1883).

Mahoney, Michael S. "Changing Canons of Mathematical and Physical Intelligibility in the Later 17th Century." *Historia Mathematica* 11 (1984): 417-23.

Matematikdelegationen. *Att lyfta matematiken: intresse, lärande, kompetens: betänkande, Statens offentliga utredningar, 2004:97*. Stockholm: Fritzes offentliga publikationer, 2004.

Mellin-Olsen, Stieg. *The politics of mathematics education, Mathematics education library*. Dordrecht: Reidel, 1987.

Meyer, Ad. "Granskning af läroböcker i Aritmetik verkstäld af komiterade, utsedde af Stockholms folkskollärareförening. Stockholm 1883. C. E. Fritze." *Pedagogisk Tidskrift* (1884): 241-42.

Michalowica, Karen D., och Arthur C. Howard. "Pedagogy in Text: An Analysis of Mathematics Texts from the Nineteenth Century." I *A history of school mathematics*, redigerad av Jeremy Kilpatrick och George M. A. Stanic, 77-113. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 2003.

Mill, John Stuart. *An Examinationof Sir William Hamilton's Philosophy and of The Principal Philosophical Questions Discussed in his Writings*. Redigerad av J. M Robson. Toronto and Buffalo: University of Toronto Press, 1979 [1865].

Molin, Carl A. "Motioner i Andra kammaren, Nr. 49." 1923.

Morgenstern, Lina. *Barndomens paradis: praktisk och utförlig handbok för mödrar och lärarinnor i småbarnskolorna: efter Fredik Fröbels grunder*. Örebro N. M. Lindh, 1867.

Mouwitz, Lars. *Hur kan lärare lära? internationella erfarenheter med fokus på matematikutbildning, NCM-rapport, 2001:2*. Göteborg: Nationellt centrum för matematikutbildning Göteborgs universitet, 2001.
Mårtensson, L. J. "Inträdesprov i modersmål och räkning av K. I. Asplund." *Folkskollärarnas tidning* (1929): 308.
———. "Räkneprov för folkskolan av Anna Maria Roman och Fritz Wigforss." *Folkskollärarnas tidning* (1932): 1234.
———. "Uppgifter för provräkning i folkskolan av J. O. Laurin och Tage Lundholm." *Folkskollärarnas tidning* (1930): 73.
Mönster, P. H.;Abrahamsson, J. *Om den indbyrdes Underviisnings väsen och värd*. Köpenhamn, 1821.
Newton, Isaac, I. Bernard Cohen, och Anne Miller Whitman. *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Berkeley, Calif.: University of California Press, [1687]1999.
Niléhn, Lars. *Nyhumanism och medborgarfostran: åsikter om läroverkets målsättning 1820-1880*. Lund: Gleerup, 1975.
Niss, Mogens. *"Hvad er meningen med matematikundervisningen?" - Fire artikler. IMFUFA tekst nr. 36*, 1980.
———. "Mål för matematikundervisningen." I *Matematikdidaktik: ett nordiskt perspektiv*, redigerad av Barbro Grevholm, 351. Lund: Studentlitteratur, 2001.
———. "Nogle perspektiver for matematikundervisningen i de gymnasiala uddannelser i 1990." I *"Hvad er meningen med matematikundervisningen?" - Fire artikler. IMFUFA tekst nr. 36*, redigerad, 1980.
Nordin, Thor. *Växelundervisningens allmänna utveckling och dess utformning i Sverige till omkring 1830: The general development of the monitorial method and its form in Sweden to about 1830, Årsböcker i svensk undervisningshistoria, 53(1973); 130*. Stockholm, 1973.
Nordling, Gunnar. "Angående Realskolans matematikkurser." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1950): 115.
Nordlund, K. P. *En samling räkneuppgifter jemte fullständig redogörelse för deras lösning för seminarier, skolor och sjelfstudium bihang till samme utgifvares Räkneöfningsexempel*. Gefle: Utgifvarens förlag, 1879.
———. "Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen. Svar på Herr Rollins uppsats i Ped. Tidskrift 1891:10." *Pedagogisk Tidskrift* (1892): 1-52.
———. "Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen. Svar på hr Rollins uppsats i fjärde häftet af pedagogisk tidskrift för år 1892." *Pedagogisk Tidskrift* (1892).
———. *Lärogång vid den grundläggande undervisningen i räkning jämte metodiska anvisningar*. Redigerad av Fridtjuv Berg, *Bibliotek för undervisningen. En samling åskådliga skildringar till skolbruk och själfstudium*. Stockholm: C. E. Fritze's K. Hofbokhandel, 1890.
———. *Räkne-öfningsexempel i algebra för skolor*. Gefle, 1872.
———. *Räkneöfningsexempel för skolor uppställda med afseende på heuristiska methodens användande: Med svar*. Gefle, 1867.
Nordlund, Karl Peter. *Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen: svar på Herr Rollins uppsats i Ped. Tidskrift 1891:10*. S.L., 1892.
———. *Räkneöfningsexempel för skolor: uppställda med afseende på heuristiska methodens användande*. Gefle, 1867.
Nyhlén, Ragnar. "Geometriläroböckerna. Replik till lektor Hj. Olson." *Elementa* (1939): 38-40.
———. "Om grundbegreppen och axiomsystemen i våra geometriläroböcker." *Elementa* (1938): 10-34.
Nyström, C. A. *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran, med talrika öfningsexempel och särskildt häftad facitbok*. 2:a förb.o.betydl.tillökta uppl. (äfven upptagande den nya indelningen af sorter) utg. Stockholm, 1855 [1853].
———. *Försök till lärobok i aritmetiken eller sifferräkneläran, med talrika öfningsexempel och särskildt häftad facitbok*. Stockholm, 1853.
———. "J. E. Johanssons "Räknelära" och folkskolekommitterades "utvecklande metod" m. m." *Svensk Läraretidning* (1888): 146-48.
———. "Vidräkning med kommitterade för granskning af folkskolans läroböcker." *Svensk Läraretidning* (1888): 113-18.
Nyström, Carl Alfred. *Räknelära för folkskolor*. Stockholm: Kinberg, 1884.
———. *Räknelära för fruntimmer: Omsl.: Med åtföljande särskildt häftad facitbok.* Stockholm, 1853.
"Några nutida strävanden inom skolundervisningen." *Svensk Läraretidning* (1913): 302-05.
Ohlon, Sven Emrik. "Skolkommissionens kursplaner i matematik, fysik och kemi. Några randanmärkningar." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1922): 198-200.
Oldberg, Anders. *Praktisk handbok i pedagogik och methodik för swenska folkunderwisningen*. 2. uppl. utg. Stockholm, 1846.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

Olson, Hjalmar. "Geometrien och realskolan. Slutreplik till lektor C. E. Sjöstedt." *Elementa* (1939): 245-47.
———. "Om geometriens grunder och geometriundervisningen i realskolan." *Elementa* (1938): 81-97.
———. "Om geometriundervisningen, mål och metod." *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* (1925): 12-23, 72-89.
———. "Om realskolans geometriundervisning. Slutreflexioner." *Elementa* (1939): 110-12.
———. *Plan geometri för realskolor, mellanskolor, högre folkskolor och därmed jämförliga läroanstalter*. 5., oförändr. uppl. utg. Stockholm: J. Beckman, 1935.
Olsson, Georg. "Om provräkningar." *Svensk Läraretidning* (1933): 952.
"Om den s. k. åskådningsundervisningen som särskildt läroämne." *Tidning för Folkskolan* (1869): 65-73, 81-89.
Otterström, J. "Den "nya" räknemetoden. Replik." *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1849): 331-36.
———. *Till skolbildningens upplyste vänner*, 1880.
Otterström, Jakob. *Lärobok i aritmetik för skolans lägre stadium*. Stockholm: Haeggström, 1880.
Palmqvist, Anders. *Underwisning i Räkne-Konsten gifwen af Fredric Palmqvist, Ledamot af Kong.Wetenskaps-Adaemien*. Stockholm: Tryckt på Direct. Lars Salvii kostnad, 1763 [1750].
Palmqvist, Fredrik. *Inledning til algebra (I-II)*. Stockholm: Lars Salvius, 1748.
———. *Inledning til algebra (III)*. Stockholm: Lorentz Ludwig Grefing, 1749.
———. *Tal, om mathematiska vetenskapernas nytta i allmänna lefvernet*. Stockholm, 1754.
Pappas, John. "L'Esprit de finesse contre l'esprit de géometrie: en débat entre Diderot et Alembert." *Studies on Voltaire and the eighteenth century* LXXXIX (1972): 1229-53.
Pascal, Blaise. *Tankar, Forum pocket*. Stockholm: Forum, 1971.
Pearson, Karl. *The grammar of science*. New utg. Gloucester,Mass., 1957 [1892].
Peirce, Charles Sanders. "How to make our ideas clear." I *Pragmatism. The classic writings*, redigerad av H. S. Thayer, 79-100. Indianapolis/Cambridge: Hackett publishing company, [1878] 1970.
———. "The nature of mathematics." I *Philosophical writings of peirce*, redigerad av Justus Butler, 135-49. New York: Dover publications inc., [1898] 1970.
Pestalozzi, Johann Heinrich. *Enslingens aftonstund, Pedagogiska skrifter, 17*. Lund: Lindstedts univ.-bokh., 1901.
———. *Lienhard och Gertrud: en bok för folket, Skrifter af uppfostringskonstens stormän; 5*. Göteborg: Wettergren & Kerber, 1890.
Pestalozzi, Johann Heinrich, Carl Adolph Agardh, och Magnus Bruzelius. *Pestalozzi's Elementar-böcker*. Lund, 1808.
Pestalozzi, Johann Heinrich, och Otto Salomon. *Huru Gertrud undervisar sina barn: ett försök att gifva mödrarna ledning att sjelfva undervisa sina barn, i bref, Skrifter af uppfostringskonstens stormän; 8*. Göteborg: Wettergren & Kerber, 1895.
Petrini, Henrik. "De geometriska axiomen i skolundervisningen." *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* (1918): 193-203.
———. "Det Euklideiska systemet i geometrin." *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* (1924): 129-44.
———. "Matematiken i skolan." *Pedagogisk Tidskrift* (1905).
———. "Om geometrins grunder enligt Hilberg och lektor Perssons avhandling därom." *Tidskrift för elementär matematik, fysik och kemi* (1917): 197-207.
———. "Studentexamens bibehållande." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1924): 225-27.
Petterson, Lars. *Frihet, jämlikhet, egendom och Bentham*. Uppsala: Almqvist & Wiksell International, 1992.
Piaget, Jean. *Psykologi och undervisning*. Stockholm: Bokförlaget Aldes/Bonniers, [1969] 1972.
Pierce, Charles Sanders. "The fixation of Belief." I *Pragmatism. The classic writings*, redigerad av H. S. Thayer, 61-79. Indianapolis/Cambridge: Hackett publishing company, [1877] 1970.
Pingel, V., och N. J. Nörlund. "Den gamla och nya pedagogiken." *Svensk Läraretidning* (1886): 33-34.
Popkin, Richard Henry. *The history of scepticism: from Savonarola to Bayle*. Oxford: Oxford Univ. Press, 2003.
Porter, Theodore M. *The rise of statistical thinking, 1820-1900*. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1986.
———. *Trust in numbers: the pursuit of objectivity in science and public life*. Princeton: Princeton Univ. Press, 1995.
Prytz, Johan, och Uppsala universitet. Matematiska institutionen. *Speaking of Geometry: a study of geometry textbooks and literature on geometry instruction for elementary and lower secondary levels in Sweden, 1905-1962, with a special focus on professional debates, Uppsala Dissertations in Mathematics, 49*. Uppsala: Department of Mathematics Uppsala university, 2007.

Rancière, Jacques. *The ignorant schoolmaster: five lessons in intellectual emancipation*. Stanford, Calif.: Stanford Univ. Press, 1991.
Richards, Joan L. "God, truth, and mathematics in nineteenth century England." I *The Invention of Physical Science: Intersections of Mathematics, Theology and Natural Philosophy since the Seventeenth Century*, redigerad av M. J. Nye, J. Richards och R Stuewer, 51-78: Kluwer Academic Publishers, 1992.
Riemann, Bernhard, och Hermann Weyl. *Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*. Berlin: Springer, 1919 [1854, 1868].
Riksdagen. *Andra kammarens första tillfälliga utskotts utlåtande Nr. 5*, 1928.
———. *Riksdagens skrivelse till Konungen, angående upptagande av ämnet räkning å fortsättningsskolornas läsordning, Nr. 137.*, 1923.
Robinson. "Mera om "Geometrin såsom läroämne i flickskolan." *Verdandi* (1893): 217-21.
Rollin, Birger. "Ifrågasatta reformer vid räkneundervisningen." *Pedagogisk Tidskrift* (1891): 403-12.
Rossander, Jenny. *Nya elementarskolan för flickor vid afslutningen af höstterminen 1871; Förberedande lärokursen för qvinliga elever; afhandling: om matematik och dess studium vid våra flickskolor*. Stockholm, 1871.
Rousseau, Jean Jacques, och C. A Fahlstedt. *Emil eller om uppfostran*. Uppsala, 1912.
Rudenschöld, Torsten. *Svenska folkskolans praktiska ordnande*, 1856.
Rydman, A. "Provräkningsblad, Emil Dalin." *Folkskollärarnas tidning* (1927): 746.
Rönström, Anna. "Geometrin såsom läroämne i flickskolan. Föredrag vid femte allmänna flickskolemötet i Lund." *Verdandi* (1893).
———. "Om en praktisk anordning af räkneundervisningen." *Verdandi* (1894).
Samtal emellan en Herre och en Fru om geometriens nytta för unga studerande. Stockholm: Lars Salvius, 1743.
Sandberg, Fredrik. *Småskolan. En handledning för dem, hvilka sysselsätta sig med den första barnaundervisningen i skolan.* Stockholm: F. & G. Beijer's förlag., 1869.
———. *Småskolans metodik i kort sammandrag för småskolelärarinne-seminarier*. Stockholm: A. V. Carlsons förlag, 1869.
———. *Undervisningslära med särskilt hänsyn till folkskolan*. Stockholm: P. Palmqvists förlag, 1870.
Sarfatti Larson, Magali. "In the matter of experts and professionals, or How impossible it is to leave nothing unsaid." I *The formation of professions: Knowledge, state and strategy*, redigerad av Rolf Torstendahl och Michael Burrage. London, 1990.
Schubring, Gert. "Introduction. History of Teaching and Learning Mathematics." *Pedagogica Historica* 42, no. 4&5 (2006): 511-14.
———. "Researching into the History ofTeaching and Learning Mathematics: the State of the Art." *Pedagogica Historica* 42, no. 4&5 (2006): 665-77.
Schuster, John A. "Cartesian Method as Mythic Speech: A Diachronic and Structural Analysis." I *The politis and rhetoric of scientific method*, redigerad av John A. Schuster och Richard R. Yeo, 33-96. Dodrecht: D. Reidel Publishing Company, 1986.
Segerstedt, Albrekt. *Geometrien i folkskolan och för nybegynnare. Metodiska anvisningar af Albrekt Segerstedt, seminarii-adjunkt.*, 1883.
Setterberg, Gösta. "Åskådlig matematikundervisning." *Verdandi* (1910): 184-98.
Shapin, Steven. *Den vetenskapliga revolutionen*. Stockholm: Brutus Östling, 2000.
———. "Robert Boyle and Mathematics: Reality, Representation, and Experimental Practice." *Science in Context* (1988): 23-58.
———. *The scientific revolution*. Chicago, Ill.: Univ. of Chicago Press, 1996.
———. *A social history of truth: civility and science in seventeenth-century England, Science and its conceptual foundations*. Chicago: Univ. of Chicago Press, 1994.
Shapin, Steven, Simon Schaffer, och Thomas Hobbes. *Leviathan and the air-pump: Hobbes, Boyle, and the experimental life: including a translation of Thomas Hobbes, Dialogus physicus de natura aeris by Simon Schaffer*. Princeton, N.J.: Princeton Univ. Press, 1985.
Shea, William R. "The Unfinished Revolution: Johann Bernoulli (1667-1748) and the Debate Between the Cartesians and the Newtonians." I *Revolutions in science: their meaning and relevance*, redigerad av William R. Shea, Universidade de Coimbra, International Union of the History and Philosophy of Science och International Council of Scientific Unions, 70-92. Canton, MA: Science History Publications/U.S.A, 1988.
Siljeström, Pehr Adam. "Geometri för nybegynnare, af P. N. Ekman, Lektor i Matematiken vid Wexjö Gymnasium." *Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1846): 100.
———. *Lärobok i räknekonsten til folkskolornas tjänst*. Stockholm, 1866.
Siljeström, Per Adam. *Lärobok i geometrien, till folkskolornas tjenst*. Stockholm: Norstedt, 1867.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf

———. *Samling af räkne-exempel till folkskolornas tjenst: första häftet innehållande omkr. 1100 exempel i de fyra räknesätten med hela tal: med svar*. Stockholm, 1870.
Sjöstedt, C. E. "Den "orimligt svåra" matematikskrivningen." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1950): 173-74.
———. "Geometri." *Folkskollärarnas tidning* (1956).
———. "Geometri och geometriundervisning." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1948).
———. "Geometriens grundbegrepp och axiom, särskilt i undervisningen." *Elementa* (1938): 165-80.
———. "Geometrin och provräkningen i realexamen." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1953): 371.
———. "Geometriundervisningen i den obligatoriska skolan." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1961).
———. ""Matematikherravälder"." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1933): 203.
———. "Realskolans geometriundervisning." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1937).
———. "Studentskrivningarna i matematik." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1940): 20.
———. "Studentuppgifterna i matematik." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1949): 152-53.
Sjöstrand, Wilhelm. *Pedagogikens historia*. 4. uppl. / utg. Lund: Gleerup, 1966.
"Skolkommissionens verk bedömt av pressen." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1922): 145-46.
Skolöverstyrelsen, Kungl. *Sammanfattning av utlåtanden och yttranden i anledning av skolkommissionens den 28 april 1922 avgivna betänkande*. Stockholm, 1922.
Skovsmose, Ole. *Towards a philosophy of critical mathematics education, Mathematics education library, 15*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1994.
———. *Travelling through education: uncertainty, mathematics, responsibility*. Rotterdam: Sense Publishers, 2005.
St-. "En av dagens frågor." *Tidskrift för Hemmet* (1863).
Stavrakakis, Yannis. *Lacan and the political, Thinking the political*. London: Routledge, 1999.
Strömer, Mårten. *De Sex Första Böckerna Af Euklidis Elementa, eller grundeliga inledning til geometrien*, 1748 [1744].
———. *De Sex Första Jämte Ellofte och Tolfte Böckerna Af Euclidis Elementa, eller grundeliga inledning til geometrien, til Svenska ungdomens tjänst utgifne af Mårten Strömer, För detta Astronomie professor i Uppsala, och Ledamot af Kongl. Vetensk. Acad. i Stockholm och Societ. R. Lit. et Scient. i Uppsala*. Stockholm, 1800 [1744].
"Stärkt ställning i folkskolan åt modersmål och räkning." *Småskolan* (1931): 82,91-93,107.
Sverige. Myndigheten för skolutveckling. *Baskunnande i matematik, Stödmaterial [2003:2]*. Stockholm: Myndigheten för skolutveckling: Fritzes kundservice distributör, 2003.
Swetz, Frank J. *Capitalism and arithmetic*. La Salle, Illinois: Open Court, 1987.
Thorndike, Edward L. *The psychology of arithmetic*. New York: Macmillan, 1922.
Toulmin, Stephen, Lars Göran Larsson, och Bo Holmqvist. *Kosmopolis: hur det humanistiska arvet förfuskades*. Stockholm: Ordfront, 1995.
Ullman, Annika. *Stiftarinnegenerationen: Sofi Almquist, Anna Sandström, Anna Ahlström*. Stockholm: Stockholmia, 2004.
Unenge, Jan. *Från räkning till matematisk klokskap*. Jönköping.: Institutionen för undervisning, kultur och information, 1991.
———. *Skolmatematiken i går, i dag och i morgon: -med mina ögon sett*. 1. uppl. utg., *Lärare lär*. Stockholm: Natur och kultur, 1999.
"Uttalanden av sektionen för matematik och fysik vid läroverkslärarемötet." *Tidning för Sveriges Läroverk* (1922): 309-10.
W. "Elementarkurs i Räknekonsten, jemte öfningar i Hufvudräkning. Af. A. TH. Bergius. Särskilt häftade svar medfölja. Sthlm, 1850." *Ny Tidskrift för lärare och uppfostrare* (1850): 227-31.
Wahlgren, Agne. "Om kurserna i matematik på latingymnasiet." *Pedagogisk Tidskrift* (1905): 65-76.
Walkerdine, Valerie. *The mastery of reason: cognitive development and the production of rationality*. London: Routledge, 1988.
Weijne, Josef. "Motioner i Andra kammaren, Nr 406, angående beredande åt ämnena modersmålet och räkning en stärkt ställning vid rikets folkskolor." 1928.
Velander, J. P. "Hela tal i folkskolan." *Svensk Läraretidning* (1885).
———. *Lilla räknebok för folkskolan: 3,200 uppgifter jemte anvisn:r*. Stereotyp. uppl. utg. Stockholm: P. A. Norstedt & S:r, 1888.
———. *Velanders Räknebok för folkskolan*. Stockholm, 1884.
———. "Ämnet räkning i folkskolan." *Svensk Läraretidning* (1884).
Wester-Wåhlström, Vendela. "Om räkneundervisning. Några funderingar med anledning av en utkommen räknelära för nybörjare." *Svensk Läraretidning* (1920): 417-19.
Red., ed.^red. *Nordisk familjebok, fjortonde bandet*, 1911.

Whewell, William. *Thoughts on the study of mathematics as a part of a liberal eduation*. Cambridge: Cambridge University Press, 1836.
Wigforss, Frits. *Den grundläggande matematikundervisningen: översikt av folkskolans kurs i räkning och geometri ur metodisk synpunkt*. Stockholm: Bergvall, 1925.
———. "Lektor Wigforss om provräkningar i folkskolan." *Lärarinneförbundet* (1933): 10-11.
Wilson, Guy Mitchell. *Teaching the new arithmetic*. 2nd utg., *McGraw-Hill series in education*. New York: McGraw-Hill, 1951.
———. *Teaching the new arithmetic*. 2nd utg., *McGraw-Hill series in education*. New York: McGraw-Hill, 1951 [1939].
———. *What Arithmetic Shall We Teach?* Boston: Houghton Mifflin Company, 1926.
Vinell, Klas. "Om Euklides och den första undervisningen i geometri." *Verdandi* (1899): 30-34.
Wittgenstein, Ludwig. *Om visshet*. Stockholm: Thales, 1992.
Wittgenstein, Ludwig, och Georg Henrik von Wright. *Remarks on the foundations of mathematics: Bemerkungen über die Gründlagen der Mathematik*. Oxford: Blackwell, 1956.
Wolff, Christian von. *Auszug aus den Anfangs-Gründen aller Mathematischen Wissenschafften: zu bequemerem gebrauche der Anfänger auf Begehren verfertiget*. Neue Aufl. verb. und mit einem Register verm. utg. Franckfurt und Leipzig. MDCCXLIII, 1743.
———. *Auszug aus den Anfangs-Gründen aller Mathematischen Wissenschafften: zu bequemerem gebrauche der Anfänger auf Begehren verfertiget*. Neue Aufl. verb. und mit einem Register verm. utg. Franckfurt und Leipzig. MDCCXLIII, [1713] 1743.
Zizek, Slavoj. *Ideologins sublima objekt*. Göteborg: Glänta, 2001.
———. *The sublime object of ideology, Phronesis (London)*. London: Verso, 1989.
———. *The ticklish subject: the absent centre of political ontology*. New York, N.Y.: Verso, 1999.
Zweigbergk, Per Anton von. *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel*. Stockholm, 1877.
———. *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel: med facit-tabeller*. Stockholm, 1839.
———. *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel: med facit-tabeller [vilken upplaga kom 1842?]*. Stockholm, 1842.
———. *Lärobok i räknekonsten med talrika öfnings-exempel, utgifven af P. A. v. Zweigbergk, Phil. Magister. Tredje Upplagan.* Stockholm: Hörbergska boktryckeriet, 1843 [1839].
Åhström, Ossian. "Frits Wigforss: Den grundläggande räkneundervisningen." *Folkskolan* (1951): 121.
Öberg, Tore. "Gymnasiets matematikkurs." *Elementa* (1970): 257-63.
Öije, Einar. "Realitet och skolmässighet i matematiska problem." *Pedagogisk Tidskrift* (1918): 217-30.

p-lundin-sverker-080610-avhmanus-rubbet.pdf